TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ
*****

ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN HỌC GIẢI TÍCH 1
(Học kỳ I năm học 2019-2020)

Thời gian làm bài 120 phút

Mã số đề thi: **61**

1.(1,0đ) Chứng minh rằng, hàm số $y = f(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

2.(2,0đ) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} & \text{khi} \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ p & \text{khi} \quad x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, tìm giá trị của tham số p để hàm số này liên tục trên tập số thực **R**

3.(2,5đ) Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, chứng minh rằng $f^{(n)}(0) = (n-1)!$

4.(2,5đ) Tính chu vi và diện tích của hình hoa 4 cánh được tạo bởi 4 đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + (y \pm 1)^2 = 1 \\ (x \pm 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

5.(2,0đ) Tính tích phân $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^3}{e^{x^2}} dx$

==================================

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ
*****

ĐÁP ÁN ĐỀ THI GIẢI TÍCH 1
(Thi giữa kỳ, học kỳ I năm học 2019-2020)

Mã số đề thi: **61**

1.(1,0đ) Ta có $y = f(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ (1)

$$y' = f'(x) = [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]' = \cos(\ln x).(\ln x)' - \sin(\ln x).(\ln x)'$$

$$= \cos(\ln x).\frac{1}{x} - \sin(\ln x).\frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x} \quad \textbf{(0,25đ)} \ (2)$$

$$y'' = [f'(x)]' = \left[\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x}\right]' = \frac{[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]'.x - [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)].x'}{x^2}$$

$$= \frac{[-\sin(\ln x).(\ln x)' - \cos(\ln x).(\ln x)'].x - [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)].1}{x^2}$$

$$= \frac{\left[-\sin(\ln x).\frac{1}{x} - \cos(\ln x).\frac{1}{x}\right].x - \cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{-\sin(\ln x) - \cos(\ln x) - \cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{x^2} = \frac{-2\cos(\ln x)}{x^2} \quad \textbf{(0,5đ)} \ (3)$$

Thay (1), (2) và (3) vào biểu thức $x^2 y'' + xy' + y$ ta được

$$x^2 y'' + xy' + y = x^2.\frac{-2\cos(\ln x)}{x^2} + x.\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x} + \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$$

$$= -2\cos(\ln x) + \cos(\ln x) - \sin(\ln x) + \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 0 \quad \textbf{(0,25đ)} \ \text{(đpcm)}$$

2.(2,0đ) Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} & \text{khi } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ p & \text{khi } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ có D(f) = **R** **(0,25đ)** liên tục với $\forall x\in R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ vì biểu thức tạo ra f(x) là các hàm số sơ cấp **(0,25đ)**. Điểm gián đoạn của hàm số có thể có tại điểm $x=\dfrac{\pi}{2}$ **(0,25đ)**.

Đặt $t=\sqrt[6]{\sin x}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\sin x}=t^3\\ \sqrt[3]{\sin x}=t^2\\ \sin x=t^6\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^{12}\end{cases}$ **(0,25đ)** và khi $x\to\dfrac{\pi}{2}$ thì $t\to 1$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}=\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}=\frac{(t^2-1)-(t^3-1)}{t^{12}-1}=\frac{(t-1)(t+1)-(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t^{11}+t^{10}+...+t+1)}$$

$$=\frac{(t-1)(-t^2)}{(t-1)(t^{11}+t^{10}+...+t+1)}=\frac{-t^2}{t^{11}+t^{10}+...+t+1}\ \textbf{(0,25đ)}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}=\lim_{t\to 1}\frac{-t^2}{t^{11}+t^{10}+...+t+1}=\frac{-1^2}{1^{11}+1^{10}+...+1+1}-\frac{1}{12}\ \textbf{(0,25đ)}$$

Hàm số f(x) liên tục tại điểm $x=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow-\dfrac{1}{12}=p$, do đó khi $p=-\dfrac{1}{12}$ thì hàm số f(x) đang xét liên tục trên tập số thực **R**. **(0,25đ)**

*Có thể tìm $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$ bằng cách sử dụng Quy tắc L'Hospitale: Biểu thức $\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$ cần tìm giới hạn khi $x\to\dfrac{\pi}{2}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x})'}{(\cos^2 x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{2}.\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\dfrac{1}{3}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}}{-2\cos x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin x}\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}-\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right)=\frac{1}{2.1}\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}}-\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$$

3.(2,5đ) Biến đổi $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\ln 1-\ln(1-x)=-\ln(1-x)$ **(0,25đ)** và tính đạo hàm cấp 1, cấp 2, cấp 3 và cấp 4 của f(x):

$$f^{(1)}(x)=[-\ln(1-x)]'=-\frac{1}{1-x}.(1-x)'=-\frac{1}{1-x}.(-1)=1.(1-x)^{-1}$$

$$f^{(2)}(x)=[f^{(1)}(x)]'=[(1-x)^{-1}]'=(-1)(1-x)^{-2}(1-x)'=(-1)(1-x)^{-2}(-1)=1.(1-x)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x)=[f^{(2)}(x)]'=[1.(1-x)^{-2}]'=1.(-2)(1-x)^{-3}(1-x)'=1.(-2)(1-x)^{-3}(-1)=1.2.(1-x)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x)=[f^{(3)}(x)]'=[1.2.(1-x)^{-3}]'=1.2.(-3).(1-x)^{-4}(1-x)'=1.2.(-3).(1-x)^{-3}(-1)=1.2.3.(1-x)^{-4}$$

Dự đoán $f^{(n)}(x)=(n-1)!(1-x)^{-n}=\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$ với quy ước 0! = 1 **(0,75đ)** (4)

Bây giờ ta chứng minh (4) bằng phương pháp quy nạp toán học:

Bước 1. Với n = 1, ta có $f^{(1)}(x)=(1-1)!(1-x)^{-1}=0!.(1-x)^{-1}=1.(1-x)^{-1}=(1-x)^{-1}$ (4) đúng

Bước 2. Giả sử (4) đúng với n, tức là ta có $f^{(n)}(x)=(n-1)!(1-x)^{-n}=\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}$

Bước 3. Ta phải chứng minh (4) đúng với (n+1), thật vậy:

$$f^{(n+1)}(x)=[f^{(n)}(x)]'=[(n-1)!(1-x)^{-n}]'=(n-1)!.(-n)(1-x)^{-n-1}(1-x)'=(n-1)!.(-n)(1-x)^{-n-1}(-1)$$

$$=(n-1)!n(1-x)^{-n-1}=n!(1-x)^{-n-1}=[(n+1)-1]!(1-x)^{-(n+1)}=\frac{[(n+1)-1]!}{(1-x)^{n+1}}$$ (đpcm) **(0,75đ)**

Như vậy, công thức xác định đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ là $f^{(n)}(x)=(n-1)!(1-x)^{-n}=\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}$ với quy ước 0! = 1.**(0,5đ)** Bây giờ khi thay x = 0 vào công thức $f^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}$ ta được $f^{(n)}(0)=\dfrac{(n-1)!}{(1-0)^{n}}=\dfrac{(n-1)!}{1}=(n-1)!$ **(0,25đ)**

*Để chứng minh công thức xác định đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, ta có thể làm bằng cách gọn hơn như sau:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\Rightarrow f'(x)=\left[\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]'=\frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)'}{\frac{1}{1-x}}=\frac{\frac{0.(1-x)-1.(1-x)'}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}}=\frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{1-x}$$

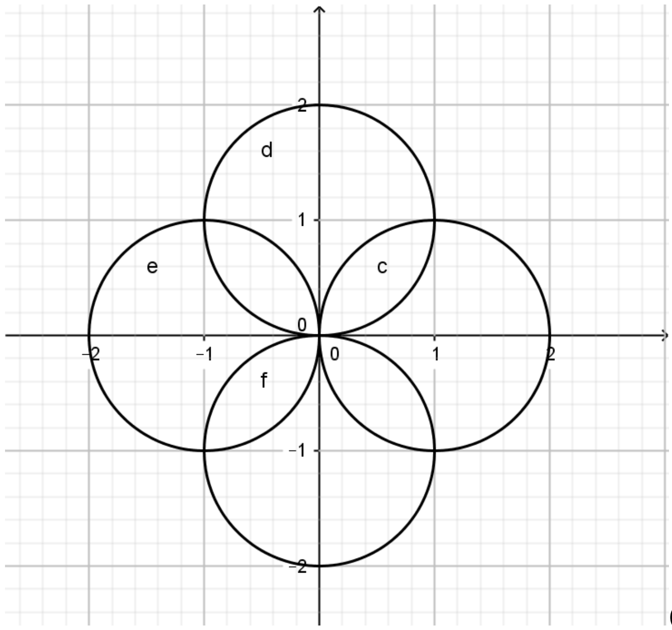
$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-1)}$$

Mặt khác, ta đã biết $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n-1)}=\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^{n-1+1}}=\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}$$

4.(2,5đ) (**a**) Vẽ đồ thị

- Đồ thị của hai đường tròn $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=1\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}$ giao nhau tại các điểm O(0,0); A(1,1)
- Đồ thị của hai đường tròn $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\x^2+(y+1)^2=1\end{cases}$ giao nhau tại các điểm O(0,0); B(1,-1)
- Đồ thị của hai đường tròn $\begin{cases}x^2+(y+1)^2=1\\(x+1)^2+y^2=1\end{cases}$ giao nhau tại các điểm O(0,0); C(-1,-1)
- Đồ thị của hai đường tròn $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=1\\x^2+(y-1)^2=1\end{cases}$ giao nhau tại các điểm O(0,0); C(-1,1) **(0,25đ)**



(0,25đ)

(**b**) Tính chu vi

Do tính đối xứng của hình vẽ nên chu vi L của hình hoa bốn cánh này là $L = 8L_1$ với L_1 là độ dài cung OA của đường tròn $x^2 + (y-1)^2 = 1$ có phương trình $y = f_1(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $0 \le x \le 1$.**(0,25đ)**

Theo công thức tính độ dài cung $L_1 = \int_a^b \sqrt{1+[f_1'(x)]^2}\,dx$ với $\begin{cases} f_1(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ **(0,25đ)**

ta có $f_1'(x) = (1-\sqrt{1-x^2})' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1+[f_1'(x)]^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow L_1 = \int_0^1 \sqrt{1+[f_1'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Do đó $L = 8L_1 = 8.\dfrac{\pi}{2} = 4\pi$ **(0,5đ)**

(**c**) Tính diện tích

Do tính đối xứng của hình vẽ nên diện tích S của hình hoa bốn cánh này là $S = 4S_1$ với S_1 là diện tích của cánh hoa nằm ở góc vuông thứ nhất của hệ tọa độ Oxy được tạo bởi cung OA của đường tròn $x^2 + (y-1)^2 = 1$ trên đoạn $0 \le x \le 1$ và cung OA của đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$ có phương trình $y = f_2(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ trên đoạn $0 \le x \le 1$.**(0,25đ)**

Theo công thức tính diện tích hình phẳng $S_1 = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$ với $\begin{cases} f_1(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} \\ f_2(x) = \sqrt{1-(x-1)^2} \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow S_1 = \int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{1-(x-1)^2} - \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\right]dx = \int_0^1 \left[\sqrt{1-(x-1)^2} + \sqrt{1-x^2} - 1\right]dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}d(x-1)+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}+1^2.\arcsin\frac{x-1}{1}\right]\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+1^2.\arcsin\frac{x}{1}\right)\Bigg|_0^1-x\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}+\arcsin(x-1)\right]_0^1+\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)\Big|_0^1-x\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1-1)\sqrt{1-(1-1)^2}+\arcsin(1-1)-(0-1).\sqrt{1-(0-1)^2}-\arcsin(0-1)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(1.\sqrt{1-1^2}+\arcsin 1-0.\sqrt{1-0^2}-\arcsin 0\right)-(1-0)$$

$$=\frac{1}{2}\left[0{,}1+\arcsin 0+1.0-\arcsin(-1)\right]+\frac{1}{2}\left(1.0+\arcsin 1-0.1-\arcsin 0\right)-1$$

$$=\frac{1}{2}\left[0+0+0-\frac{-\pi}{2}\right]+\frac{1}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}-0-0\right)-1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-1=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\Rightarrow S=4S_1=4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2(\pi-2)\ \textbf{(0,5đ)}$$

*Ở trên ta đã dùng công thức tích phân $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C$

5.(2,0đ) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}dx=\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}d(x^2)$ **(0,25đ)**

Đặt $t=x^2\Rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow t=0\\x=+\infty\rightarrow t=+\infty\end{cases}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$ **(0,25đ)**

Đặt $\begin{cases}u(t)=t\\v(t)=e^{-t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=u'(t)dt=1.dt=dt\\dv=v'(t)dt=-e^{-t}dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du(t)=dt\\dv(t)=e^{-t}dt\end{cases}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u(t)dv(t)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b u(t)dv(t)=-\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to+\infty}u(t)v(t)\Big|_0^b-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b v(t)du(t)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[u(t)v(t)\Big|_0^b-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b v(t)du(t)\right]=-\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to+\infty}te^{-t}\Big|_0^b-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-t}dt\right]=-\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to+\infty}\frac{t}{e^t}\Big|_0^b+\lim_{b\to+\infty}e^{-t}\Big|_0^b\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}-\frac{0}{e^0}\right)-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^t}\Bigg|_0^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}-\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}-\frac{1}{e^0}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}-\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}+\frac{1}{2}\ \textbf{(0,75đ)}$$

Khi $b\rightarrow+\infty$ thì $e^b\rightarrow+\infty$ nên biểu thức cần tìm giới hạn $\frac{b}{e^b}$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\Rightarrow\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}\overset{(L)}{=}\lim_{b\to+\infty}\frac{b'}{(e^b)'}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}=0\ \textbf{(0,25đ)}$$

Do đó $I=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.0+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ **(0,25đ)**