TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ
*****

ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN HỌC GIẢI TÍCH 1
(Học kỳ I năm học 2019-2020)

Thời gian làm bài 120 phút

Mã số đề thi: **62**

1.(1,0đ) Chứng minh rằng, hàm số $y = f(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^k$ là nghiệm của phương trình

$$\left(1+x^2\right)y'' + xy' = k^2 y$$

2.(2,0đ) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ q & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$, tìm giá trị của tham số q để hàm số này liên tục trên tập số thực **R**

3.(2,5đ) Cho hàm số $f(x,a) = \dfrac{x^2}{e^{\frac{x}{a}}}$ (với tham số $a \neq 0$), chứng minh rằng $f^{(n)}(0,-1) = n(n-1)$

4.(2,5đ) Tính chu vi và diện tích của hình hoa 4 cánh được tạo bởi 4 đường parabol

$$\begin{cases} x = \pm y^2 \\ y = \pm x^2 \end{cases}$$

5.(2,0đ) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{mx+n}{e^{px}}\,dx \; (p > 0)$

==================================

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ
*****

ĐÁP ÁN ĐỀ THI GIẢI TÍCH 1
(Thi giữa kỳ, học kỳ I năm học 2019-2020)

Mã số đề thi: **62**

1.(1,0đ) Ta có $y = f(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^k$ (1)

$$y' = f'(x) = \left[\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\right]' = k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$= k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}.\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{ky}{\sqrt{x^2+1}}$$ **(0,25đ)** (2)

$$y'' = [f'(x)]' = \left(\frac{ky}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(ky)'\sqrt{x^2+1} - ky\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{ky'\sqrt{x^2+1} - ky.\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{ky'\sqrt{x^2+1} - \dfrac{kxy}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$ **(0,25đ)** (3)

Thay (2) vào (3) ta được $y'' = \dfrac{k\dfrac{ky}{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1} - \dfrac{kxy}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{k^2y - \dfrac{kxy}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$ **(0,25đ)** (4)

Thay (1), (2) và (4) vào biểu thức $\left(1+x^2\right)y'' + xy'$ ta được

$$\left(1+x^2\right)y''+xy'=\left(1+x^2\right)\frac{k^2y-\frac{kxy}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}+x\frac{ky}{\sqrt{x^2+1}}=k^2y$$ (đpcm) **(0,25đ)**

2.(2,0đ) Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} & \text{khi} \quad x\neq 0\\ q & \text{khi} \quad x=0\end{cases}$ có D(f) = **R** **(0,25đ)** liên tục với $\forall x\in R\setminus\{0\}$ vì biểu thức tạo ra f(x) là các hàm số sơ cấp **(0,25đ)**. Điểm gián đoạn của hàm số có thể có tại điểm $x=0$ **(0,25đ)**.

Đặt $t=\sqrt[6]{\cos x}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\cos x}=t^3\\ \sqrt[3]{\cos x}=t^2\\ \cos x=t^6\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^{12}\end{cases}$ **(0,25đ)** và khi $x\to 0$ thì $t\to 1$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}=\frac{(t^2-1)-(t^3-1)}{t^{12}-1}=\frac{(t-1)(t+1)-(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t^{11}+t^{10}+...+t+1)}$$

$$=\frac{(t-1)(-t^2)}{(t-1)(t^{11}+t^{10}+...+t+1)}=\frac{-t^2}{t^{11}+t^{10}+...+t+1}$$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{t\to 1}\frac{-t^2}{t^{11}+t^{10}+...+t+1}=\frac{-1^2}{1^{11}+1^{10}+...+1+1}-\frac{1}{12}$$ **(0,25đ)**

Hàm số f(x) liên tục tại điểm $x=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow-\frac{1}{12}=q$, do đó khi $q=-\frac{1}{12}$ thì hàm số f(x) đang xét liên tục trên tập số thực **R**. **(0,25đ)**

* Có thể tìm $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ bằng cách sử dụng Quy tắc L'Hospitale: Biểu thức $\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ cần tìm giới hạn khi $x\to 0$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x\to 0$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x})'}{(\sin^2 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}.\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{3}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}-\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)=\frac{1}{2.1}\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}}-\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$$

3.(2,5đ) $f(x,a)=\frac{x^2}{e^{\frac{x}{a}}}=x^2e^{-\frac{x}{a}}$, đặt $\begin{cases}u(x,a)=e^{-\frac{x}{a}}\\ v(x)=x^2\end{cases}$ **(0,25đ)** và sử dụng công thức $f^{(n)}(x,a)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^n u^{(n-k)}(x,a).v^{(k)}(x)$ để tìm công thức đạo hàm bậc n của hàm số f(x) = u(x,a).v(x) với quy ước $\begin{cases}u^{(0)}(x,a)=u(x,a)\\ v^{(0)}(x)=v(x)\end{cases}$ **(0,25đ)**

Nếu đặt $\alpha=-\frac{1}{a}\Rightarrow u(x,a)=e^{\alpha x}$ thì dễ thấy rằng $(e^{\alpha x})^{(k)}=\alpha^k e^{\alpha x}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow u^{(k)}(x,a)=\left(-\frac{1}{a}\right)^k e^{-\frac{x}{a}}=\frac{(-1)^k}{a^k}e^{-\frac{x}{a}}$$ **(0,25đ)**

và vì v(x) = x²$\Rightarrow v^{(k)}(x)=\begin{cases}2x & \text{khi} \quad k=1\\ 2 & \text{khi} \quad k=2\\ 0 & \text{khi} \quad k\ge 3\end{cases}$ **(0,25đ)**

Do đó $f^{(n)}(x,a)=\sum_{k=0}^{2}C_n^n u^{(n-k)}(x,a).v^{(k)}(x)$

$=C_n^0u^{(n)}(x,a).v^{(0)}(x)+C_n^1u^{(n-1)}(x,a).v^{(1)}(x)+C_n^2u^{(n-2)}(x,a).v^{(2)}(x)$ **(0,25đ)**

$=1.\frac{(-1)^n}{a^n}e^{-\frac{x}{a}}.x^2+n.\frac{(-1)^{n-1}}{a^{n=1}}e^{-\frac{x}{a}}.2x+\frac{n(n-1)}{2}.\frac{(-1)^{n-2}}{a^{n-2}}e^{-\frac{x}{a}}.2$ **(0,25đ)**

$=\frac{(-1)^n}{a^n}.\frac{x^2-2xna+n(n-1)a^2}{e^{\frac{x}{a}}}$ **(0,25đ)** (5)

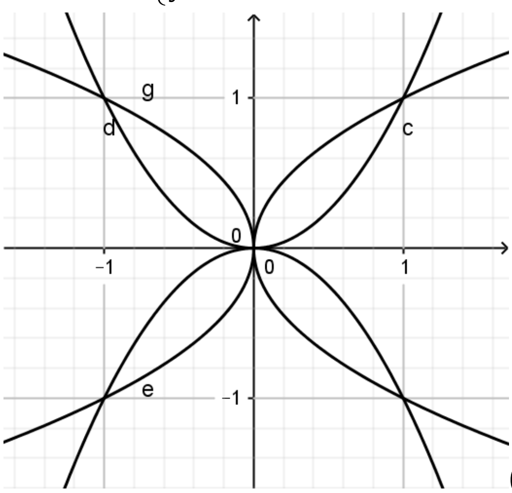
vì $\begin{cases}C_n^0=\frac{n!}{(n-0)!.0!}=\frac{n!}{n!}=1\\ C_n^1=\frac{n!}{(n-1)!.1!}=\frac{n!}{(n-1)!}=n\\ C_n^2=\frac{n!}{(n-2)!.2!}=\frac{n!}{(n-2)!.2}=\frac{n(n-1)}{2}\end{cases}$ và $\begin{cases}(-1)^{n-1}=\frac{(-1)^n}{(-1)^1}=-(-1)^n\\ (-1)^{n-2}=\frac{(-1)^n}{(-1)^2}=(-1)^n\end{cases}$ **(0,25đ)**

Thay x = 0 và a = -1 vào (5) ta được

$$f^{(n)}(0,-1)=\frac{(-1)^n}{(-1)^n}.\frac{0^2-2.0.n.(-1)+n(n-1).(-1)^2}{e^{\frac{0}{-1}}}=n(n-1)$$ **(0,25đ)**

4.(2,5đ) (**a**) Vẽ đồ thị

- Đồ thị của hai đường parabol $\begin{cases}y=x^2\\ x=y^2\end{cases}$ giao nhau tại các điểm O(0,0); A(1,1)
- Đồ thị của hai đường parabol $\begin{cases}x=y^2\\ y=-x^2\end{cases}$ giao nhau tại các điểm O(0,0); B(1,-1)
- Đồ thị của hai đường parabol $\begin{cases}y=-x^2\\ x=-y^2\end{cases}$ giao nhau tại các điểm O(0,0); C(-1,-1)
- Đồ thị của hai đường parabol $\begin{cases}x=-y^2\\ y=x^2\end{cases}$ giao nhau tại các điểm O(0,0); C(-1,1) **(0,25đ)**



(0,25đ)

(**b**) Tính chu vi

Do tính đối xứng của hình vẽ nên chu vi L của hình hoa bốn cánh này là $L = 8L_1$ với L_1 là độ dài cung OA của đường parabol $y = f_1(x) = x^2$ trên đoạn $0 \le x \le 1$.**(0,25đ)**

Theo công thức tính độ dài cung $L_1 = \int_a^b \sqrt{1+[f_1'(x)]^2}dx$ với $\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ **(0,25đ)**

ta có $f_1'(x) = (x^2)' = 2x \Rightarrow \sqrt{1+[f_1'(x)]^2} = \sqrt{1+4x^2}$

$$\Rightarrow L_1 = \int_0^1 \sqrt{1+[f_1'(x)]^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}dx$$

$$= 2.\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \left[1.\sqrt{1^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(1+\sqrt{1^2+\frac{1}{4}}\right)\right] -$$

$$\left[0.\sqrt{0^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(0+\sqrt{0^2+\frac{1}{4}}\right)\right] = \left[.\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right] - \left[0+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4} \Rightarrow L = 8L_1 = 8.\left[\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}\right] = 4\sqrt{5}+2\ln(2+\sqrt{5})$$ **(0,5đ)**

*Ở trên ta đã dùng công thức tích phân $\int \sqrt{x^2+\beta}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\beta}+\beta\ln\left|x+\sqrt{x^2+\beta}\right|\right)+C$

(**c**) Tính diện tích

Do tính đối xứng của hình vẽ nên diện tích S của hình hoa bốn cánh này là $S = 4S_1$ với S_1 là diện tích của cánh hoa nằm ở góc vuông thứ nhất của hệ tọa độ Oxy được tạo bởi cung OA của đường parabol $y = f_1(x) = x^2$ trên đoạn $0 \le x \le 1$ và cung OA của đường parabol $x = y^2$ hay $y = f_2(x) = \sqrt{x}$ trên đoạn $0 \le x \le 1$.**(0,25đ)**

Theo công thức tính diện tích hình phẳng $S_1 = \int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$ với $\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = \sqrt{x} \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow S_1 = \int_0^1 [f_2(x)-f_1(x)]dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Do đó $S = 4S_1 = 4.\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ **(0,5đ)**

5.(2,0đ) $I=\int_0^{+\infty}\frac{mx+n}{e^{px}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b(mx+n)e^{-px}dx=-\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b(mx+n)d(e^{-px})$ **(0,25đ)**

$$=-\frac{1}{p}\left[\lim_{b\to+\infty}(mx+n)e^{-px}\Big|_0^b-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-px}d(mx+n)\right]=-\frac{1}{p}\left[\lim_{b\to+\infty}\frac{mx+n}{e^{px}}\Big|_0^b-\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-px}d(mx+n)\right]$$

$$=-\frac{1}{p}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{mb+n}{e^{pb}}-\frac{m.0+n}{e^{p.0}}\right)+\frac{m}{P}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-px}dx=-\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{mb+n}{e^{pb}}+\frac{n}{p}-\frac{m}{p^2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b d(e^{-px})$$

$$=\frac{n}{p}+\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{mb+n}{e^{pb}}-\frac{m}{p^2}\lim_{b\to+\infty}e^{-px}\Big|_0^b=\frac{n}{p}+\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{mb+n}{e^{pb}}-\frac{m}{p^2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{px}}\Big|_0^b$$

$$=\frac{n}{p}+\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{mb+n}{e^{pb}}-\frac{m}{p^2}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{pb}}-\frac{1}{e^{p.0}}\right)=\frac{n}{p}+\frac{m}{p^2}+\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{mb+n}{e^{pb}}-\frac{m}{p^2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{pb}}$$ **(1,0đ)**

Vì $p>0$ nên $\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{pb}}=0$ và $e^{pb}\to+\infty$ khi $b\to+\infty$, do đó biểu thức cần tìm giới hạn $\frac{b}{e^{pb}}$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim_{b\to+\infty}\frac{mb+n}{e^{pb}}\overset{(L)}{=}\lim_{b\to+\infty}\frac{(mb+n)'}{(e^{pb})'}=\lim_{b\to+\infty}\frac{m}{pe^{pb}}=\frac{m}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{pb}}=\frac{m}{p}.0=0$ **(0,5đ)**

$$\Rightarrow I=\int_0^{+\infty}\frac{mx+n}{e^{px}}dx=\frac{n}{p}+\frac{m}{p^2}+\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{mb+n}{e^{pb}}-\frac{m}{p^2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{pb}}=\frac{n}{p}+\frac{m}{p^2}+\frac{1}{p}.0-\frac{m}{p^2}.0=\frac{1}{p}\left(n+\frac{m}{p}\right)$$

(0,25đ)