

Đề thi số: 1

Bài thi môn: Giải Tích II.

Số tín chỉ: 5.

Hệ đào tạo: Chính quy.

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề).

Câu 1: (2đ)

a. Tính giới hạn: $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{tg(2xy)}{x^2y}$.

b. Tìm giới hạn : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{\frac{\sin xy}{x^2y^2}}$

Câu 2: (2đ)

Tính tích phân đường sau:

$$I = \int_L (3x + 2y)dx + (3x + y^2)dy$$

L là các đoạn thẳng nối A(-2,0) đến B(0,3) đến C(4,4) đến D(6,0)

Câu 3: (2đ)

1. Tính tích phân đường sau: $\int_L -x^2ydx + xy^2dy$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Câu 4: (2đ)

Tính tích phân $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$ với D giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 - x = 0$

Câu 5: (2đ) Giải phương trình vi phân:

$$y'' + y' - 2y = -2x^2 + 2x + 2 + 4e^{2x}.$$

Ghi chú: Giáo viên không giải thích gì thêm,

Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.

Đáp án đề thi số: 1

Bài thi môn: Giải Tích II.

Số tín chỉ: 5.

Hệ đào tạo: Chính quy.

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề).

Câu 1: (2đ)

Câu a (1đ):

$$(0.25) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\operatorname{tg}(2xy)}{x^2y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2\operatorname{tg}(2xy)}{x(2xy)}$$

$$(0.25) \text{ Vì } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\operatorname{tg}(2xy)}{2xy} = 1$$

$$(0.25) \text{ Và } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2}{x} = 2$$

$$(0.25) \text{ Nên } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2\operatorname{tg}(2xy)}{x(2xy)} = 2$$

Câu b (1đ):

$$(0.25) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{\frac{\sin xy}{x^2y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \left[(1 + xy^2)^{\frac{1}{xy^2}} \right]^{\frac{\sin xy}{x}}$$

$$(0.25) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} e^{\frac{\sin xy}{x}}$$

$$(0.25) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} e^{y \frac{\sin xy}{xy}}$$

$$(0.25) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} e^{y \cdot 1} = e^3$$

Câu 2: (2đ)

(0.25đ) L không kín nên ta thêm đoạn DA:

$$(0.25đ) \oint_{L \cup DA} (3x + 2y)dx + (3x + y^2)dy - \int_{DA} (3x + 2y)dx + (3x + y^2)dy = I_1 + I_2$$

$$(0.25đ) \text{ Trên DA: } y = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow I_2 = \int_6^{-2} 3x dx = \frac{3x^2}{2} \Big|_6^{-2} = -48$$

(0.25đ) Ta có: $P(x, y) = 3x + 2y$; $Q(x, y) = 3x + y^2$; $P'_y = 2$; $Q'_x = 3$.

(0.25đ) Theo Green, $I_1 = -\iint_D dx dy$,

(0.25đ) D : tứ giác ABCDA.

(0.25đ) $I_1 = -\iint_D dx dy = -\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{(3+4) \cdot 4}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\right) = -21$

(0.25đ) $\Rightarrow I = -21 + 48 = 27$

Câu 3 (2đ)

(0.25đ) Ta có: $P(x,y) = -x^2y$; $Q(x,y) = xy^2$

(0.25đ) Áp dụng công thức Green. $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$

(0.25đ) Do đó tích phân đường chuyển về tích phân kép sau: $\oint_L -x^2y dx + xy^2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$

(0.25đ) $= \iint_D (y^2 + x^2) dx dy$, trong đó miền D: $x^2 + y^2 = 1$

(0.25đ) Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad J = r$

(0.25đ) D: $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$

(0.25đ) $\iint_D (y^2 + x^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr$

(0.25đ) $= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$

Câu 4 (2đ)

(0.25 đ) Miền D nằm trong đường tròn, được xác định bất đẳng thức $x^2 + y^2 - x \leq 0$.

(0.25 đ) Đổi biến sang hệ tọa độ trụ $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ với $r > 0$. Jacobien của phép biến đổi là $J=r$.

(0.25 đ) Thay phép đổi biến vào bất đẳng thức mô tả miền D có $0 \leq r \leq \cos \varphi$

(0.25 đ) Từ điều kiện $\cos \varphi \geq 0$ suy ra $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Sinh viên có thể vẽ hình và suy ra cận của φ như trên thì cũng được đầy đủ điểm

(0.25 đ) Tích phân được tính có dạng $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \varphi} r^2 dr d\varphi$

(0.25 đ) Biến đổi $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{\cos \varphi} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \varphi}{3} d\varphi$

(0.25 đ) Biến đổi $I = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{1}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$. Sinh viên có thể làm

bằng cách hạ bậc của $\cos^3 \varphi$ cũng được đầy đủ điểm

(0.25 đ) Kết luận $I = \frac{4}{9}$

Câu 5: (2đ)

(0.25) Pt đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0$ có nghiệm $k_1 = 1, k_2 = -2$.

(0.25) Pt thuần nhất tương ứng: $y'' + y' - 2y = 0$ có nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

(0.25) Pt: $y'' + y' - 2y = -2x^2 + 2x + 2$ có nghiệm riêng dạng: $y_1 = Ax^2 + Bx + C$.

(0.5) Dùng phương pháp hệ số bất định, tìm được: $y_1 = x^2$.

(0.25) Pt: $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$ có nghiệm riêng dạng: $y_1 = e^{2x} A$.

(0.25) Dùng phương pháp hệ số bất định, tìm được: $y_2 = e^{2x}$.

(0.25) Nghiệm tổng quát của ptvp:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 + e^{2x}.$$