ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2013 - 2014

Đề thi số: 2

Bài thi môn: Giải Tích II. **Số tín chỉ:** 5.
Hệ đào tạo: Chính quy.
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề).

Câu 1: (2đ)

a. Tính giới hạn:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

b. Tính cực trị của hàm số sau

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

Câu 2: (2đ)

Tính tích phân đường sau:

$$\int_L (2x+5y)dx + (6x+y^2)dy$$

L là các đoạn thẳng nối A(-2,0) đến B(0,3) đến C(4,4) đến D(6,0)

Câu 3: (2đ)

Tính tích phân $\iint_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, trong đó S là mặt ngoài của mặt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Câu 4: (2đ)

Tính tích phân $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ với D giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2-y=0$

Câu 5: (2đ) Giải phương trình vi phân:

$$y'' + 2y' + y = x^2 + 4x - 1 + 4e^x.$$

Ghi chú: *Giáo viên không giải thích gì thêm,*

Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2013 - 2014

Đáp án đề thi số: 2

Bài thi môn: Giải Tính II. **Số tín chỉ:** 5.
Hệ đào tạo: Chính quy.
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề).

Câu 1: (2đ)

a. (0.5) $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^2|y|}{2|xy|} = \frac{|x|}{2}$

(0.25) Vì $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{2} = 0$.

(0.25) Nên $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

b. -Bước 1 (0,25 điểm)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 6x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được 4 nghiệm tương ứng với 4 điểm kỳ dị của hàm số

$M_1(0,0)$, $M_2(0,2)$, $M_3(1,1)$ và $M_4(-1,1)$

- *Bước 2 (0,25 điểm)*

Tính

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y - 6\ ;\quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x\ ;\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6$$

- *Bước 3 (0,5 điểm)*

Tại M_1: ta có s=-6, r=0, t=-6 nên r^2-st=-36<0 và s=-6<0 nên M_1 là điểm cực đại

$f_{max} = f(M_1) = 2$

Tại M_2: ta có s=6, r=0, t=6 nên r^2-st=-36<0 và s=6>0 nên M_2 là điểm cực tiểu

$f_{min} = f(M_2) = -2$

- *Bước 4 (0,25 điểm)*

Tại M_3: ta có s=0, r=6, t=0 nên r^2-st=36>0 nên M_3 không phải là điểm cực trị

Tại M_4: ta có s=0, r=-6, t= nên r^2-st=36>0 nên M_4 không phải là điểm cực trị

Câu 2:(2đ)

(0.25đ) L không kín nên ta thêm đoạn DA:

(0.25đ) $I = \oint\limits_{L\cup DA}(2x+5y)dx+(6x+y^2)dy - \int\limits_{DA}(2x+5y)dx+(6x+y^2)dy = I_1 + I_2$

(0.25đ) Trên DA: $y=0 \Rightarrow dy=0 \Rightarrow I_2 = \int\limits_6^{-2} 2xdx = \left.\dfrac{2x^2}{2}\right|_6^{-2} = -32$

(0.25đ) Ta có: $P(x,y)=2x+5y; Q(x,y)=6x+y^2; P'_y=5; Q'_x=6$.

(0.25đ) Theo Green, $I_1 = -\iint\limits_D dxdy$,

(0.25đ) D : tứ giác ABCDA.

(0.25đ) $I_1 = -\iint\limits_D dxdy = -(\frac{1}{2}.3.2 + \frac{(3+4).4}{2} + \frac{1}{2}.4.2) = -21$

(0.25đ) $\Rightarrow I = -21+32 = 11$

Câu 3:(2đ)

(0.5đ) Áp dụng công thức Ostrogradsky- Gauss, tích phân mặt trở thành

$\iint\limits_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3\iiint\limits_D dxdydz$

(0.25đ) Chuyển sang tọa độ cầu $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi, J = abcr^2\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$

(0.25đ) Tích phân trở thành $3\iiint\limits_D dxdydz = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} d\theta\int\limits_0^1 abcr^2\sin\theta dr$

(0.25đ) $= 3abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta \left.\dfrac{r^3}{3}\right|_0^1 =$

(0.25đ) $= abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta$

(0.25đ) $= abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}$

(0.25đ) $= 2abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi abc$

Câu 4: (2đ)

(**0.25 đ**) Miền D nằm trong đường tròn, được xác định bất đẳng thức $x^2+y^2-y \le 0$. (**0.25 đ**) Đổi biến sang hệ tọa độ trụ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ với *r*>0. Jacobien của phép biến đổi là *J*=*r*.

(**0.25 đ**) Thay phép đổi biến vào bất đẳng thức mô tả miền D có $0 \le r \le \sin\varphi$

(**0.25 đ**) Từ điều kiện $\sin\varphi \ge 0$ suy ra $0 \le \varphi \le \pi$. Sinh viên có thể vẽ hình và suy ra cận của φ như trên thì cũng được đầy đủ điểm

(**0.25 đ**) Tích phân được tính có dạng $I = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\varphi} r^2 dr d\varphi$

(**0.25 đ**) Biến đổi $I = \int_0^{\pi} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{\sin\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3\varphi}{3} d\varphi$

(**0.25 đ**) Biến đổi $I = \frac{-1}{3} \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2\varphi\right) d\left(\cos\varphi\right) = \frac{1}{3}\left. \left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) \right|_{\pi}^{0}$. Sinh viên có thể làm bằng cách hạ bậc của $\sin^3\varphi$ cũng được đầy đủ điểm

(**0.25 đ**) Kết luận $I = \frac{4}{9}$

<u>Câu 5: (2đ)</u>

<u>(0.25)</u> Pt đặc trưng: $k^2 + 2k + 1 = 0$ có nghiệm $k_{1,2} = -1$.

<u>(0.25)</u> Pt thuần nhất tương ứng: $y'' + 2y' + y = 0$ có nghiệm tổng quát:

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

<u>(0.25)</u> Pt: $y'' + 2y' + y = x^2 + 4x - 1$ có nghiệm riêng dạng: $y_1 = Ax^2 + Bx + C$.

<u>(0.5)</u> Dùng phương pháp hệ số bất định, tìm được: $y_1 = x^2 - 3$.

<u>(0.25)</u> Pt: $y'' + 2y' + y = 4e^x$ có nghiệm riêng dạng: $y_1 = e^x A$.

<u>(0.25)</u> Dùng phương pháp hệ số bất định, tìm được: $y_2 = e^x$.

<u>(0.25)</u> Nghiệm tổng quát của ptvp:

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 - 3 + e^x$.