ĐỀ THI GIỮA KỲ HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 2

(Học kỳ II năm học 2016-2017)

Câu 1.(1,25đ) Khảo sát tính liên tục tại điểm O(0,0) của hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ trong đó a là tham số.

Bài giải.

Miền xác định của hàm số f(x,y) đang xét là D = $\mathbf{R}^2$.(0,25đ)

Vì $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1$ với $\forall(x,y)$ nên $0\le|f(x,y)|=\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|=|x^2+y^2|\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le (x^2+y^2).1=x^2+y^2\to 0$ khi (x,y) → 0 (0,25đ) nên theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.(0,25đ)

Do đó, nếu a = 0 thì f(0,0) = 0 và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\Rightarrow$ hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại điểm (0,0) (0,25đ); ngược lại, nếu a ≠ 0 thì f(0,0) = a ≠ 0 tức là $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)\Rightarrow$ hàm số f(x,y) đang xét không liên tục tại điểm (0,0).(0,25đ)

Câu 2.(1,5đ) Cho hàm số $f(x,y)=(1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}}$

2.1. Tìm miền xác định D của hàm số f(x,y); **2.2.** Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} f(x,y)$.

Bài giải.

2.1. Hàm số $f(x,y)=(1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}}$ xác định khi $x^2y+xy^2\neq 0\Leftrightarrow xy(x+y)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ y\neq 0\\ x+y\neq 0\end{cases}\Rightarrow$ miền xác định của hàm số là D = $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x\neq 0\}\cap\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|y\neq 0\}\cap\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|\ x+y\neq 0\}$, tức là tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy không nằm trên hai trục tọa độ Ox, Oy và đường thẳng y = -x.(0,5đ)

2.2. Biến đổi $f(x,y)=(1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}}=(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}\cdot\frac{xy^2.y}{x^2y+xy^2}}=\left[(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}\right]^{\frac{xy^2.y}{x^2y+xy^2}}=$

$\left[(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}\right]^{\frac{y^2}{x+y}}\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}(1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y+xy^2}}=\left[\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}\right]^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}\frac{y^2}{x+y}}$.

Đặt $t=xy^2\Rightarrow t\to 0$ khi $(x,y)\to(0,3)\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}\dfrac{y^2}{x+y}=\dfrac{\lim\limits_{y\to 3}y^2}{\lim\limits_{y\to 0}x+\lim\limits_{y\to 3}y}=\dfrac{3^2}{0+3}=3$.

Suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} f(x,y)=e^3$.(1,0đ)

Câu 3.(0,75đ) Chứng minh rằng hàm số $f(x,y)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thỏa mãn phương trình Laplace $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$ trong không gian $\mathbf{R}^2$.

Bài giải.

Ta có $f(x,y) = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{2x}{x^2+y^2} = -\dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\dfrac{1.(x^2+y^2)-x.2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ **(0,5đ)**, tương tự ta cũng có $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$ **(0,25đ)**.

Câu 4.(1,25đ) Cho hàm số $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$. Tính $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ và $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial \vec{l}}$ tại điểm $M_0(1,1,1)$, biết rằng $\vec{l}$ được xác định bởi véc tơ $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(-1,-1,2)$.

Bài giải.

$$+ \text{ Ta có } \begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^2z^2 \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2x^2yz^2 \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2x^2y^2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(1,1,1)}{\partial x} = 2.1.1^2.1^2 = 2 \\ \dfrac{\partial f(1,1,1)}{\partial y} = 2.1^2.1.1^2 = 2 \\ \dfrac{\partial f(1,1,1)}{\partial z} = 2.1^2.1^2.1 = 2 \end{cases} \textbf{(0,25đ)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(1,1,1) = \dfrac{\partial f(1,1,1)}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f(1,1,1)}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f(1,1,1)}{\partial z}\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \ \textbf{(0,25đ)}$$

+ Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1-1)\vec{i} + (-1-1)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2} = 3$

do đó các cosin chỉ phương của véc tơ $\vec{l}$ là $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{3}$.**(0,5đ)**

+ Suy ra $\dfrac{\partial f(1,1,1)}{\partial \vec{l}} = \left(2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\right) =$

$\left(2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(-\dfrac{2}{3}\vec{i} - \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{1}{3}\vec{k}\right) = -2$ **(0,25đ)**.

Câu 5.(2,0đ) Khảo sát cực trị của hàm số $f(x,y) = 6x^2y - 24xy - 6x^2 + 24x + 4y^3 - 15y^2 + 36y + 1$.

Bài giải.

Miền xác định của hàm số f(x,y) đang xét là $D = \mathbf{R}^2$.

$$\text{- Ta có } \begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12xy - 24y - 12x + 24 = 12\left(xy - 2y - x + 2\right) = 12(x-2)(y-1) \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6x^2 - 24x + 12y^2 - 30y + 36 = 6(x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6) \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình để xác định các điểm dừng (nếu có) của hàm số đang xét là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12(x-2)(y-1) = 0 \\ 6(x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1) = 0 \\ x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \textbf{(0,25đ)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2=0 \\ x^2-4x+2y^2-5y+6=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-1=0 \\ x^2-4x+2y^2-5y+6=0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=2 \\ 2y^2-5y+2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=1/2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y=1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}\end{array}\right.$$ **(0,25đ)**

Như vậy, hàm số đang xét có 4 điểm dừng $M_1(2,2)$; $M_2(2,1/2)$; $M_3(1,1)$; $M_4(3,1)$.

- Ta có $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 12y-12 = 12(y-1) \Rightarrow A(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 12(y-1) \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 12x-24 = 12(x-2) \Rightarrow B(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 12(x-2) \\ \dfrac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2} = 24y-30 = 6(4y-5) \Rightarrow C(x,y) = \dfrac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2} = 6(4y-5) \end{cases} \Rightarrow$

$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) = 12^2(x-2)^2 - 12(y-1).6(4y-5) = 72\left[2(x-2)^2 - (y-1)(4y-5)\right]$ **(0,5đ)**

+ Tại điểm dừng $M_1(2,2)$ ta có $\begin{cases} \Delta(2,2) = -216 < 0 \\ A(2,2) = 12 > 0 \end{cases}$ nên nó là điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu là f_{ct} = f(2,2) = 21.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_2(2,1/2)$ ta có $\begin{cases} \Delta(2,1/2) = -108 < 0 \\ A(2,1/2) = -6 > 0 \end{cases}$ nên nó là điểm cực đại và giá trị cực đại là $f_{cđ}$ = f(2,1/2) = 111/4.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_3(1,1)$ ta có $\Delta(1,1) = 144 > 0$ nên nó không phải là điểm cực trị.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_4(3,1)$ ta có $\Delta(3,1) = 144 > 0$ nên nó không phải là điểm cực trị.**(0,25đ)**

Câu 6.(1,5đ) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x,y) = xy trên miền đóng D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$.

Bài giải.

Miền xác định của hàm số đang xét là $\mathbf{R}^2$ và hiển nhiên là hàm số f(x,y) đang xét liên tục với mọi x, y trong miền xác định của nó, nên hàm số này đạt GTLN và GTNN trên miền đóng D.**(0,25đ)**

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x = 0 \end{cases}$ để xác định các điểm dừng. Hệ phương trình này có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, tức là có 1 điểm dừng (0,0) là điểm trong của D và giá trị của hàm số f(x,y) tại điểm này là $f(0,0) = 0.0 = 0$.**(0,25đ)**

Bây giờ ta xét giá trị của hàm số f(x,y) trên biên của miền D, tức là x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$, vì $y^2 \ge 0$ nên $1 - x^2 \ge \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$, do đó $f(x,y) = xy = \pm x\sqrt{1-x^2} \equiv g(x)$ với $-1 \le x \le 1$. **(0,25đ)**

Khảo sát cực trị của hàm số g(x) trong 2 trường hợp ($y \ge 0$ và $y \le 0$) với $-1 \le x \le 1$ ta nhận được $f_{min} = f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ và $f_{max} = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.**(0,75đ)**

So sánh các giá trị của hàm f(x,y) tìm được ở trên ta nhận được $\text{GTNN}(f)=-\frac{1}{2}$ tại các điểm $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\text{GTLN}(f)=\frac{1}{2}$ tại các điểm $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.**(0,25đ)**

Cách khác. (1) Phương trình tham số của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ với $0\le t\le 2\pi$, khi đó hàm số $f(x,y)=xy=\cos t\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t$ với $0\le t\le 2\pi$. Vì -1 ≤ sin2t ≤ 1 ⇒ $-\frac{1}{2}\le xy\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le f(x,y)\le\frac{1}{2}$ nên ta cũng nhận được kết quả như trên.

(2) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy $\frac{x^2+y^2}{2}\ge |x||y|=|xy|\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ge|xy|\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le xy\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2}\le f(x,y)\le\frac{1}{2}$ nên ta cũng nhận được kết quả như trên.

Câu 7.(1,75đ) Tìm cực trị của hàm số $f(x,y)=e^{xy}$ với điều kiện x + y = 1.

Bài giải.

Ta có x + y = 1 ⇔ x + y – 1 = 0 ⇒ φ(x,y) = x + y – 1 = 0.

Lập hàm L(x,y,λ) = f(x,y) + φ(x,y) = e^{xy} + λ(x + y – 1)**(0,25đ)**$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=ye^{xy}+\lambda \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=xe^{xy}+\lambda \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=x+y-1 \end{cases}$, **(0,25đ)**

do đó ta được hệ phương trình xác định các điểm dừng là $\begin{cases} ye^{xy}+\lambda=0 \\ xe^{xy}+\lambda=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x_0=y_0=\frac{1}{2} \\ \lambda_0=-\frac{\sqrt[4]{e}}{2} \end{cases}$. **(0,25đ)**

Tại $\lambda_0=-\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$ ta có $\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=ye^{xy} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xe^{xy} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=y^2e^{xy} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=e^{xy}(1+xy) \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=x^2e^{xy} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} A=\frac{\partial^2 f(1/2,1/2)}{\partial x^2}=\frac{\sqrt[4]{e}}{4} \\ B=\frac{\partial^2 f(1/2,1/2)}{\partial x\partial y}=\frac{5\sqrt[4]{e}}{4} \\ C=\frac{\partial^2 f(1/2,1/2)}{\partial y^2}=\frac{\sqrt[4]{e}}{4} \end{cases}$

(0,25đ)$\Rightarrow d^2f(x_0,y_0)=Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2=\frac{\sqrt[4]{e}}{4}dx^2+\frac{5\sqrt[4]{e}}{2}dxdy+\frac{\sqrt[4]{e}}{4}dy^2$.**(0,25đ)** Mặt khác ta có φ(x,y) = x + y – 1 = 0 ⇒ dφ(x,y) = dx + dy = 0 ⇒ dy = -dx $\Rightarrow d^2f(x_0,y_0)=-2\sqrt[4]{e}dx^2<0$, tức là dạng toàn phương $d^2f(x_0,y_0)$ xác định âm, **(0,25đ)** do đó hàm số f(x,y) = e^{xy} đạt cực đại tại điểm $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ và giá trị cực đại $f_{max}=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\sqrt[4]{e}$.**(0,25đ)**

Cách khác. Vì e > 1 nên hàm số f(x,y) = e^{xy} đồng biến với hàm số g(x,y) = xy, nên để đơn giản, ta xét cực trị của hàm số g(x,y) = xy, sau đó suy ra cực trị của hàm số f(x,y) = e^{xy} = $e^{g(x,y)}$. Kết quả nhận được cũng như kết quả trên.