ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2013 - 2014

Đề thi số: 1

Bài thi môn: Giải Tích II. **Số tín chỉ:** 5.
Hệ đào tạo: Chính quy.
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề).

Câu 1: (2đ)

a. Tính giới hạn:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{tg(2xy)}{x^2y}.$$

b. Cho mặt cong có phương trình $z = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})^3$. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong tại điểm $A = (100,125)$. Tính gần đúng $z(98,123)$.

Câu 2: (2đ) Tính thể tích vật thể được giới hạn bởi các mặt:

$$x^2 + y^2 + z = 1, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0,$$

nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Câu 3: (2đ) Tính tích phân:

$$I = \oint_C (2x^5 + 3y^2 + sin^2x)dx + [(x+y)^2 + sin^2y]dy\,,$$

C là đường cong có phương trình: $x^2 + y^2 = 2x$, chiều của C là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 4: (2đ) Tính tích phân:

$$I = \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy\,,$$

S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}, 0 \le x \le h$. Hướng dương của mặt S là phía dưới, nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Câu 5: (2đ) Giải phương trình vi phân:

$$y'' + y' - 2y = -2x^2 + 2x + 2 + 4e^{2x}\,.$$

Ghi chú: *Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.*

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II - NĂM HỌC 2013 - 2014

<u>Đáp án đề thi số: 1</u>

Bài thi môn: Giải Tích II. **Số tín chỉ:** 5.
Hệ đào tạo: Chính quy.
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề).

<u>Câu 1: (2đ)</u>

<u>a. (0.25</u>) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{tg(2xy)}{x^2y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2tg(2xy)}{x(2xy)}$

<u>(0.25)</u> Vì $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{tg(2xy)}{2xy} = 1.$

<u>(0.25)</u> Và $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2}{x} = 2.$

<u>(0.25)</u> Nên $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2tg(2xy)}{x(2xy)} = 2.$

<u>b. (0.25</u>) $z_x = \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}\right)^2}{2\sqrt{x}}, z_y = \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}\right)^2}{\sqrt[3]{y^2}}.$

<u>(0.25)</u> $(x_0, y_0) = (100,125) \to z_0 = 3375.$

<u>(0.25)</u> Phương trình mặt tiếp diện: $z = z(x_0,y_0) + z_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
$= 3375 + \frac{134}{4}(x-100) + \frac{3}{5}(y-125).$

<u>(0.25)</u> $z(98,123) \approx 3375 + \frac{134}{4}(98-100) + \frac{3}{5}(123-125) = 3306.8.$

<u>Câu 2: (2đ)</u>

<u>(0.25)</u> Thể tích vật thể: $V = \iiint_E \, dxdydz.$

<u>(0.25)</u> E là khối nằm trong góc phần tám thứ nhất, giới hạn bởi mặt trên: $z = 1 - x^2 - y^2$, mặt dưới: $z = 0$, và 2 mặt bên: $y = x, y = \sqrt{3}x.$

<u>(0.25)</u> $V = \iiint_E \, dxdydz = \iint_{D(x,y)} dxdy \int_0^{1-x^2-y^2} dz =$

<u>(0.25)</u> $= \iint_{D(x,y)} (1 - x^2 - y^2) dxdy$

$$D(x,y) = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1, y \ge x, y \le \sqrt{3}x\}.$$

<u>(0.25)</u> Đổi biến sang hệ tọa độ cực, đặt: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi.$

$$D(r,\varphi) = \{(r,\varphi): 0 \le r \le 1, \pi/4 \le \varphi \le \pi/3\}.$$

<u>(0.25)</u> $V = \iint_{D(r,\varphi)} (1 - r^2).r.drd\varphi =$

<u>(0.25)</u> $= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 (1-r^2) rdr =$

<u>(0.25)</u> $= \frac{\pi}{12}.\frac{1}{4} = \frac{\pi}{48}.$

<u>Câu 3: (2đ)</u>

<u>(0.25)</u> $P(x,y) = 2x^5 + 3y^2 + sin^2x; Q(x,y) = (x+y)^2 + sin^2y.$

$$Q_x = 2(x+y), P_y = 6y.$$

<u>(0.25)</u> Theo Green:

$I = \iint_{D(x,y)} \left(Q_x - P_y\right) dxdy = 2\iint_{D(x,y)} (x - 2y) dxdy.$

(0.25) $D(x,y) = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 2x\}$.
(0.25) Đổi biến sang hệ tọa độ cực, đặt: $x = 1 + rcos\varphi, y = rsin\varphi$.
(0.25) $D(r,\varphi) = \{(r,\varphi): 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$.
(0.25) Do đó: $I = 2\iint_{D(r,\varphi)} (1 + rcos\varphi - 2rsin\varphi).r.drd\varphi$.
(0.25) $= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + rcos\varphi - 2rsin\varphi)rdr$.
(0.25) $= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}cos\varphi - \frac{2}{3}sin\varphi + \frac{1}{2}\right) d\varphi = 2\pi$.

Câu 4: (2đ)

(0.25) Phương trình mặt $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, vector pháp tuyến của mặt $S: \boldsymbol{l} = (z_x, z_y, -1)$.
(0.25) $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
(0.25) $D(x,y) = \{(x,y): x^2 + y^2 \le h^2, 0 \le x \le h\}$.
(0.25) $I = \iint_{D(x,y)} \left[(y - z)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (z - x)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x - y)\right] dxdy$.
$= \iint_{D(x,y)} \left[\frac{-zx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}} - x + y\right] dxdy$.
(0.25) $= \iint_{D(x,y)} [-2x + 2y] dxdy$.
(0.25) Đổi biến sang hệ tọa độ cực, đặt: $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$.
$D(r,\varphi) = \{(r,\varphi): 0 \le r \le h, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2\}$.
(0.25) $= 2\iint_{D(r,\varphi)} [rsin\varphi - rcos\varphi].r.drd\varphi$.
(0.25) $= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (sin\varphi - cos\varphi) d\varphi \int_0^h r^2 dr$.
$= \frac{-4h^3}{3}$.

Chú ý: SV có thể sử dụng công thức Gauss, hoặc tham số hóa mặt S qua hệ tọa độ trụ (cầu), kết quả đúng vẫn chấm điểm tối đa.

Câu 5: (2đ)

(0.25) Pt đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0$ có nghiệm $k_1 = 1, k_2 = -2$.
(0.25) Pt thuần nhất tương ứng: $y'' + y' - 2y = 0$ có nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

(0.25) Pt: $y'' + y' - 2y = -2x^2 + 2x + 2$ có nghiệm riêng dạng: $y_1 = Ax^2 + Bx + C$.
(0.5) Dùng phương pháp hệ số bất định, tìm được: $y_1 = x^2$.
(0.25) Pt: $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$ có nghiệm riêng dạng: $y_1 = e^{2x}A$.
(0.25) Dùng phương pháp hệ số bất định, tìm được: $y_2 = e^{2x}$.
(0.25) Nghiệm tổng quát của ptvp:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 + e^{2x}.$$