

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014 - 2015

Đề thi số 1

Môn thi: Giải tích II.
Hệ: Chính quy.

Số tín chỉ: 5.
Thời gian làm bài: 120 phút.

Câu I. (2đ) Cho hàm số:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & ; x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x^2+y^2 = 0 \end{cases} .$$

- a. Xét tính liên tục của $f(x, y)$ tại $(0,0)$.
b. Tính đạo hàm riêng cấp một của $f(x, y)$ tại $(0,0)$.

Câu II. (2đ) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2),$$

trên miền $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Câu III. (2đ) Tính tích phân:

$$I = \int_C \left[2x^2 + 2y^2 + \cos^2 x \right] dx + \left[(x+y)^2 + e^{y^2} \right] dy,$$

C là nửa trên của Ellip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, chiều của C ngược chiều kim đồng hồ.

Câu IV. (2đ) Tính tích phân:

$$I = \iiint_S x^2 y^2 z dx dy,$$

trong đó S là phía ngoài của hình cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Câu V. (2đ) Giải phương trình vi phân:

$$y'' + y' - 2y = -2x^2 + 2x + 2 + 4e^{2x}.$$

Ghi chú: Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.

Đáp án Đề số 1

Câu I:

a. (0.5đ) $0 \leq \left| \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x+y|}{2} \rightarrow 0, (x,y) \rightarrow (0,0)$

(0.5đ) Do đó: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, nên hàm số liên tục tại $(0,0)$.

b. (0.5đ) $f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$

(0.5đ) $f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$

Câu II:

(0.5đ) Trong miền mở D, các điểm dừng thỏa mãn:
$$\begin{cases} f'_x = 2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2) = 0 \\ f'_y = 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2) = 0 \end{cases}$$

(0.5đ) Các điểm dừng: $(0,0), (\pm 1,0), (0, \pm 1)$.

$f(0,0) = 0, f(0, \pm 1) = \frac{2}{e}, f(\pm 1,0) = \frac{1}{e}$.

(0.5đ) Trên biên của miền D: $f(x,y) = f(y) = \frac{y^2+4}{e^4}, -2 \leq y \leq 2$.

(0.5đ) $f_{CT}(\pm 2,0) = 4/e^4, f_{CD}(0, \pm 2) = 8/e^4$.

Do đó: $f_{min}(0,0) = 0, f_{max}(0, \pm 1) = 2/e$.

Câu III:

(0.5đ) $P(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + \cos^2 x \rightarrow P'_y = 4y$

$Q(x,y) = (x+y)^2 + e^{y^2} \rightarrow Q'_x = 2(x+y)$

(0.5đ) Gọi $L = C \cup \overline{AB}$; $A(-a,0), B(a,0)$. Chiều của L là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

$$\rightarrow \int_L = \int_C + \int_{\overline{AB}} \rightarrow I = \int_C = \int_L - \int_{\overline{AB}}$$

(0.5đ) Dùng công thức Green đối với đường cong kín L:

$$J = \int_L Pdx + Qdy = 2 \iint_D (x-y) dx dy \quad ; \quad D = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}$$

Đặt $x = a.r.\cos \varphi, y = b.r.\sin \varphi$

$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1\}$$

$$\rightarrow J = 2 \iint_{D_{r\varphi}} r(a \cos \varphi - b \sin \varphi) \cdot abr \cdot dr d\varphi$$

$$= 2ab \int_0^\pi (a \cos \varphi - b \sin \varphi) d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 dr$$

$$= -\frac{4ab^2}{3}$$

$$(0.5đ) \text{ Tham số đường thẳng } AB: K = \int_{\overline{AB}} Pdx + Qdy = \int_{-a}^a (2x^2 + \cos^2 x) dx = \frac{4a^3}{3} + a + \frac{\sin 2a}{2}$$

$$\text{Do đó: } I = J - K = -\frac{4ab^2}{3} - \frac{4a^3}{3} - a - \frac{\sin 2a}{2}$$

Câu IV:

$$(0.25đ) \text{ Phương trình mặt cầu: } z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$(0.25đ) \text{ Vecto pháp tuyến của mặt cầu: } \vec{l} = (-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

$$(0.5đ) \text{ Hình chiếu của phần mặt cầu xuống mp Oxy: } D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\rightarrow I = \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy. \text{ Đặt: } x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi.$$

$$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1\}; J = r.$$

$$(0.5đ) \rightarrow I = \iint_{D_{r\varphi}} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{1-r^2} \cdot r dr d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^3 \cdot \sqrt{1-r^2} dr$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(\frac{1}{15} (x^2 - 1)(3x^2 + 2)\sqrt{1-x^2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

Câu V:

$$(0.5đ) \text{ Pt không thuần nhất: } y'' + y' - 2y = -2x^2 + 2x + 2 + 4e^{2x}.$$

$$\text{Pt thuần nhất: } y'' + y' - 2y = 0$$

$$\text{Pt đặc trưng: } k^2 + k - 2 = 0 \rightarrow k = 1, k = -2$$

$$(0.5đ) \text{ Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: } y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$(0.25đ) \text{ Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng: } \bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + De^{2x}$$

$$(0.5đ) \text{ Dùng phương pháp đồng nhất thức: } A=1, B=C=0, D=1.$$

$$(0.25đ) \text{ Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:}$$

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 + e^{2x}$$