**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ**

*****

**ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 2**

(Học kỳ II năm học 2016-2017)

**Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian phát đề**

**Đề số 1**

**Câu 1.(1.5đ).** Khảo sát sự liên tục tại điểm (0,0) của hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)} & \text{khi} \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi} \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

**Câu 2.(1.5đ)** Tìm cực trị của hàm số $f(x,y)=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+8$.

**Câu 3.(1.5đ)** Tính tích phân hai lớp $I=\int_0^2 dx\int_0^{4-x^2}\dfrac{2xe^{2y}}{4-y}dy$.

**Câu 4.(1.5đ)** Tính thể tích của vật thể được giới hạn bởi các mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2=2$.

**Câu 5.(1.5đ)** Cho tích phân đường loại hai $I=\oint_L x^2dy-y^2dx$ với L là biên của nửa hình tròn $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0\end{cases}$ định hướng dương. Tính I theo 2 cách: Tính trực tiếp và dùng định lý Green, so sánh 2 kết quả thu được.

**Câu 6.(1.5đ)**. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân $(y + e^x\sin y)dx + (x + e^x\cos y)dy = 0$ với điều kiện ban đầu $y(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

**Câu 7.(1.0đ).** Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y' + y\cos x = \sin x\cos x$ đi qua điểm $(x,y) = (0,1)$.

-------------------------------------------------------

# ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

**Câu 1.(1,5đ)**

Điều kiện để hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi } x^2+y^2=0\end{cases}$ có nghĩa là $1-\cos(x^2+y^2)\neq 0 \Leftrightarrow \cos(x^2+y^2)\neq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2\neq 2k\pi$ ($k\in N^*$) do đó miền xác định của hàm số f(x,y) đang xét là $D=\{(x,y)\in R^2 |\ x^2+y^2\neq 2k\pi\ (k\in N^*)\}$.**(0,25đ)**

Khi $(x,y)\neq(0,0)$ ta có $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}=\dfrac{x^2y^3(x^2+y^2)}{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\dfrac{2x^2y^3\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(x^2+y^2)\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}=$

$$\frac{2x^2y^3}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right)^2}\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y^3}{x^2+y^2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\left(\dfrac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right)^2}$$ **(1)(0,5đ)**

+ Ta có $0\le\left|\dfrac{2x^2y^3}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{2x^2y^3}{x^2}\right|=\left|2y^3\right|\le 2|y|^3\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$ nên theo nguyên lý kẹp ta được $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y^3}{x^2+y^2}=0$ **(2)(0,25đ)**

+ Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow t\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$ $\Rightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\Rightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\left(\dfrac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right)^2}=\frac{1}{\left(\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right)^2}=\frac{1}{1^2}=1$$ **(3)(0,25đ)**

Thay **(2)** và **(3)** vào **(1)** ta được $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.1=0=f(0,0)$ nên theo định nghĩa thì hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại điểm (0,0).**(0,25đ)**

*Cách khác.*

(C1) Khi $(x,y)\neq(0,0)$ ta có $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}=\dfrac{x^2y^3(x^2+y^2)\left[1+\cos(x^2+y^2)\right]}{\left[1-\cos(x^2+y^2)\right]\left[1+\cos(x^2+y^2)\right]}=$

$$\frac{x^2y^3(x^2+y^2)\left[1+\cos(x^2+y^2)\right]}{1-\cos^2(x^2+y^2)}=\frac{x^2y^3(x^2+y^2)\left[1+\cos(x^2+y^2)\right]}{\sin^2(x^2+y^2)}=\frac{x^2y^3\left[1+\cos(x^2+y^2)\right]}{(x^2+y^2)\left[\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]^2}$$

Vì $0 \le \left|\frac{2x^2y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{2x^2y^3}{x^2}\right| = |2y^3| \le 2|y|^3 \to 0$ khi (x,y) → (0,0) nên theo nguyên lý kẹp ta được $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^3}{x^2+y^2} = 0$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [1+\cos(x^2+y^2)] = 2$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ nên ta được $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{0.2}{1^2} = 0 = f(0,0)$ nên theo định nghĩa thì hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại điểm (0,0).

(C2) Khi (x,y) ≠ (0,0) ta có $f(x,y) = \frac{x^2y^3(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)} = \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{(x^2+y^2)^2}{[1-\cos(x^2+y^2)]}$

- Ta có $0 \le \left|\frac{2x^2y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{2x^2y^3}{x^2}\right| = |2y^3| \le 2|y|^3 \to 0$ khi (x,y) → (0,0) nên theo nguyên lý kẹp ta được $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^3}{x^2+y^2} = 0$;

- Mặt khác, đặt $t = x^2+y^2 \Rightarrow t \to 0$ khi (x,y) → (0,0) và 1 – cost → 0 khi t → 0

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{1-\cos(x^2+y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{1-\cos t} \overset{(L')}{=} \lim_{t\to 0} \frac{2t}{\sin t} \overset{(L')}{=} \lim_{t\to 0} \frac{2}{\cos t} = \frac{2}{1} = 2.$$

Do đó $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.2 = 0 = f(0,0)$ nên theo định nghĩa thì hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại điểm (0,0).

**Câu 2.(1,5đ)**

Miền xác định của hàm số $f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 8$ đang xét là D = {(x,y)∈$\mathbf{R}^2$|y≥0}.

- Ta có $\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sqrt{y} - 2x + 6 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{y}} - 1 \end{cases}$ **(0,25đ)**

Do đó hệ phương trình để xác định các điểm dừng của hàm số đang xét là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y} - 2x + 6 = 0 \\ \dfrac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

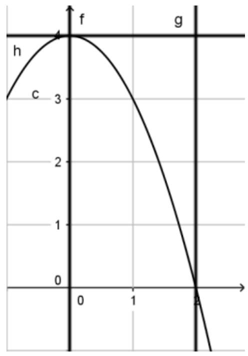
Như vậy, hàm số đang xét có điểm dừng duy nhất là P(4,4).**(0,25đ)**

- Ta có $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -2 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \\ \dfrac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2} = -\dfrac{x}{4y\sqrt{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \equiv \dfrac{\partial^2 f(4,4)}{\partial x^2} = -2 \\ B \equiv \dfrac{\partial^2 f(4,4)}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{4} \\ C \equiv \dfrac{\partial f^2(4,4)}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \Delta = B^2 - AC = -\dfrac{3}{16}$ **(0,5đ)**

Tại điểm dừng P(4,4) ta có $\begin{cases} \Delta < 0 \\ A < 0 \end{cases}$ nên nó là điểm cực đại và giá trị cực đại là $f_{cđ}$ = f(4,4) = 20.**(0,5đ)**

**Câu 3.(1,5đ)**

Từ các cận của tích phân $I=\int_0^2 dx\int_0^{4-x^2}\frac{2xe^{2y}}{4-y}dy$ ta vẽ miền lấy tích phân D trong hệ tọa độ Oxy là



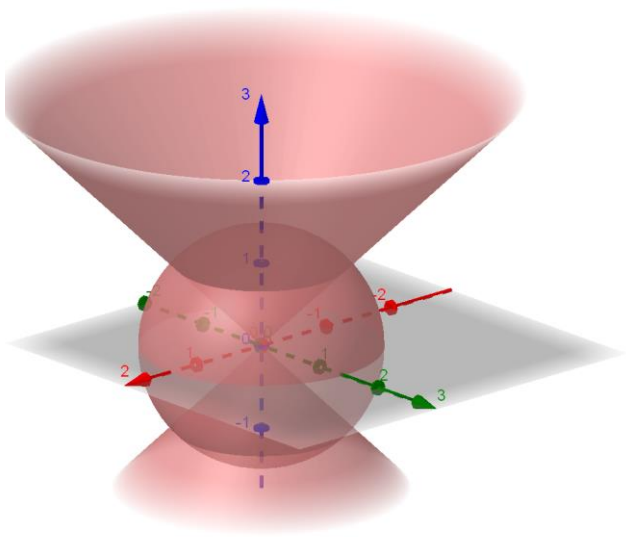

Nếu tính theo chiều dương của trục Oy thì $D=\left\{\begin{matrix}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 4-x^2\end{matrix}\right\}$, còn nếu tính theo chiều dương của trục Ox thì $D=\left\{\begin{matrix}0\le y\le 4\\ 0\le x\le \sqrt{4-y}\end{matrix}\right\}$.**(0,5đ)**

Để tính I được dễ dàng, ta đổi thứ tự lấy tích phân $I=\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{2xe^{2y}}{4-y}dx=$ **(0,5đ)**

$\int_0^4\left(\frac{e^{2y}x^2}{4-y}\Big|_0^{\sqrt{4-y}}\right)dy=\int_0^4 e^{2y}dy=\frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}d(2y)=\frac{e^{2y}}{2}\Big|_0^4=\frac{e^8-1}{2}$.**(0,5đ)**

**Câu 4.(1,5đ)**

Thể tính cần tính là $V=\iiint_V dxdydz$ **(0,25đ)**



Vật thể V được giới hạn bởi mặt trên là mặt cầu $x^2+y^2+z^2=2\Rightarrow z_2=\sqrt{2-x^2-y^2}$ và mặt dưới là mặt nón $z_1=\sqrt{x^2+y^2}$, nên $z_1\le z\le z_2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$. Còn hình chiếu của vật thể V lên mặt phẳng tọa độ Oxy là miền D là hình tròn $x^2+y^2\le 1$ vì giao tuyến của mặt cầu

$x^2+y^2+z^2=2$ với mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ chính là đường tròn $x^2+y^2=1$.**(0,25đ)**

*Cách 1.*

Do đó $V=\iint_D dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}dz=\iint_D\left(z\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right)dxdy=\iint_D\left(\sqrt{2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ **(4)**.

Để tính tích phân hai lớp trên, ta đổi biến từ tọa độ Descarter (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ khi đó J = r và $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=r \\ \sqrt{2-x^2-y^2}=\sqrt{2-r^2} \end{cases}$ **(5)**. Qua phép đổi biến này, miền D sẽ biến thành miền D'. Trong tọa độ cực (r,φ) miền D' được xác định như sau:

- Đối với tọa độ r: Thay $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình hình tròn $x^2+y^2\le 1$ ta được $r^2\le 1 \Rightarrow 0\le r\le 1$**(6)**;

- Đối với tọa độ φ: $0\le\varphi\le 2\pi$**(7)**.**(0,5đ)**

Thay **(5)**, **(6)** và **(7)** vào **(4)** ta được $V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(\sqrt{2-r^2}-r\right)rdr=\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}dr-\int_0^1 r^2dr\right)=$

$$2\pi\left[-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{2-r^2}d(2-r^2)-\int_0^1 r^2dr\right]=2\pi\left[-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{2-r^2}d(2-r^2)-\int_0^1 r^2dr\right]=$$

$$2\pi\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{r^3}{2}\Big|_0^1\right]=2\pi\left(-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}\pi$$ **(0,5đ)**

*Cách 2.*

Đổi biến từ tọa độ Descarter (x,y,z) sang tọa độ trụ (r,φ,z) $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$ khi đó J = r. Qua phép đổi biến này, miền V sẽ biến thành miền V'.

Trong hệ tọa độ trụ, miền V' được xác định như sau:

- Đối với tọa độ r: Thay $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình hình tròn $x^2+y^2\le 1$ ta được $r^2\le 1\Rightarrow 0\le r\le 1$;

- Đối với tọa độ φ: $0\le\varphi\le 2\pi$.

- Đối với tọa độ z: Vì $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ nên từ $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$ suy ra $r\le z\le\sqrt{2-r^2}$. **(0,5đ)**

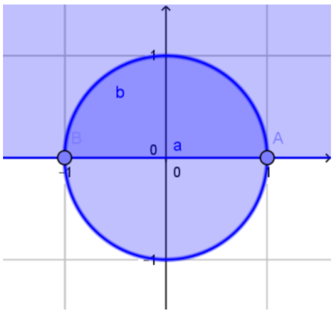
Do đó $V=\iiint_V dxdydz=\iiint_{V'} rdrd\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}dz=\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\int_0^1 r\left(z\Big|_r^{\sqrt{2-r^2}}\right)dr=$

$$2\pi\int_0^1 r(\sqrt{2-r^2}-r)dr=2\pi\left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}dr-\int_0^1 r^2dr\right)=2\pi\left[-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{2-r^2}d(2-r^2)-\int_0^1 r^2dr\right]=$$

$$2\pi\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{r^3}{2}\Big|_0^1\right]=2\pi\left(-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}\pi\ .\textbf{(0,5đ)}$$

**Câu 5.(1,5đ)**

(*)Tính trực tiếp tích phân $I=\oint\limits_L x^2dy-y^2dx$ với L là biên của nửa hình tròn $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0\end{cases}$ định hướng dương.




Ta có $I=\oint\limits_{L^+}x^2dy-y^2dx=I_1+I_2$ với $\begin{cases}I_1=\oint\limits_{L_1^+}x^2dy-y^2dx\\ I_2=\oint\limits_{L_2^+}x^2dy-y^2dx\end{cases}$ trong đó $L_1$ là đoạn thẳng có điểm đầu B(-1,0) và điểm cuối A(1,0), $L_2$ là nửa đường tròn (cung AB) $x^2+y^2=1$ $(y\ge 0)$.

- Trên đoạn BA: $y=0$ với $-1\le x\le 1\Rightarrow dy=0\Rightarrow I_1=\oint\limits_{L_1^+}x^2dy-y^2dx=\int\limits_{-1}^{1}x^2.0-0^2.dx=\int\limits_{-1}^{1}0dx=0$.

- Trên cung AB: Phương trình tham số của nửa đường tròn AB là $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ với $0\le t\le\pi$, khi đó

$$\begin{cases}dx=-\sin tdt\\ dy=\cos tdt\end{cases}\Rightarrow I_2=\oint\limits_{L_2^+}x^2dy-y^2dx=\int\limits_0^{\pi}\cos^2t\cos tdt-\sin^2t(-\sin tdt)=\int\limits_0^{\pi}(\cos^3t+\sin^3t)dt=\int\limits_0^{\pi}\cos^3tdt+$$

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^3tdt=\int\limits_0^{\pi}(1-\sin^2t)d(\sin t)-\int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2t)d(\cos t)=\left(\sin t-\frac{\sin^3t}{3}\right)\Big|_0^{\pi}-\left(\cos t-\frac{\cos^3t}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=0+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

Suy ra $I=I_1+I_2=0+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$.**(0,5đ)**

(**)Tính tích phân $I=\oint\limits_L x^2dy-y^2dx$ với L là biên của nửa hình tròn $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0\end{cases}$ định hướng dương, bằng cách dùng định lý Green.

Theo định lý Green $\oint\limits_{L^+}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]dxdy$ và đối với tích phân

$I=\oint\limits_{L^+}x^2dy-y^2dx\Rightarrow\begin{cases}P(x,y)=-y^2\\ Q(x,y)=x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-2y\\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2(x+y)$, khi đó ta

được $I=\oint\limits_{L^+}x^2dy-y^2dx=\iint\limits_D 2(x+y)dxdy=2\iint\limits_D(x+y)dxdy$ với D là nửa hình tròn $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0\end{cases}$.**(0,5đ)**

Để tính $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ được thuận lợi, ta đổi biến từ tọa độ Descarter (x,y) sang tọa độ cực (r,φ) $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ khi đó J = r. Qua phép đổi biến này, miền D sẽ biến thành miền D'.

Trong hệ tọa độ cực, miền D' được xác định như sau:

- Đối với tọa độ r: Thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình của hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$ ta được $r^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$;

- Đối với tọa độ φ: $0 \le \varphi \le \pi$.

Do đó $\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 (r\cos\varphi + r\sin\varphi)rdr = \left(\int\limits_0^1 r^2 dr\right)\left(\int\limits_0^\pi (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi\right) =$

$\left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1\right)(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^\pi = \frac{1}{3}.2 = \frac{2}{3}$.

Suy ra $I = \oint\limits_{L^+} x^2dy - y^2dx = 2\iint\limits_D (x+y)dxdy = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.**(0,5đ)**

Như vậy, kết quả tính tích phân I bằng hai cách theo yêu cầu có cùng một giá trị.

**Câu 6.(1,5đ)**

Từ phương trình vi phân $(y + e^x\sin y)dx + (x + e^x\cos y)dy = 0$ suy ra $\begin{cases} P(x,y) = y + e^x\sin y \\ Q(x,y) = x + e^x\cos y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 + e^x\cos y \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1 + e^x\cos y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

do đó biểu thức $(y + e^x\sin y)dx + (x + e^x\cos y)dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần (cấp 1) của một hàm số u(x,y) nào đó, tức là $du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ và phương trình vi phân đã cho trở thành du(x,y) = 0 **(8)**.**(0,5đ)**

Do đó $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx = \int P(x,y)dx + \varphi(y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u(x,y) = \int (y + e^x\sin y)dx + \varphi(y) \Leftrightarrow u(x,y) = xy + e^x\sin y + \varphi(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x + e^x\cos y + \frac{d\varphi(y)}{dy} \Rightarrow Q(x,y) = x + e^x\cos y + \frac{d\varphi(y)}{dy} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + e^x\cos y = x + e^x\cos y + \frac{d\varphi(y)}{dy} \Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy} = 0 \Rightarrow \varphi(y) = K$ với K là hằng số tùy ý.**(0,5đ)**

Như vậy, ta được $u(x,y) = xy + e^x\sin y + K$ với K là hằng số tùy ý. Thay u(x,y) vừa tìm được vào **(8)** ta được $du(x,y) = d(xy + e^x\sin y + K) = 0 \Rightarrow xy + e^x\sin y = C$ với C là hằng số tùy ý, là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho.

Thay điều kiện ban đầu $y(0) = \frac{\pi}{2}$ vào nghiệm tổng quát vừa tìm được:

$0.\frac{\pi}{2} + e^0.\sin\frac{\pi}{2} = C \Leftrightarrow C = 1$ nên nghiệm riêng cần tìm là $xy + e^x\sin y = 1$.**(0,5đ)**

*Cách khác*. Thay $\begin{cases} P(x,y) = y + e^x \sin y \\ Q(x,y) = x + e^x \cos y \end{cases}$ vào công thức $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt + K$ với K là hằng số tùy ý và $x_0 = y_0 = 0$, ta được $u(x,y) = \int_0^x (0 + e^t \sin 0)dt + \int_0^y (x + e^x \cos t)dt + K =$ $0 + (xt + e^x \sin t)\Big|_0^y + K = xy + e^x \sin y + K$ .**(0,5đ)**

Thay u(x,y) vừa tìm được vào **(8)** ta được du(x,y) = d(xy + $e^x$siny + K) = 0 $\Rightarrow$ xy + $e^x$siny = C với C là hằng số tùy ý, là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho.

Thay điều kiện ban đầu $y(0) = \frac{\pi}{2}$ vào nghiệm tổng quát vừa tìm được:

$0.\frac{\pi}{2} + e^0.\sin\frac{\pi}{2} = C \Leftrightarrow C = 1$ nên nghiệm riêng cần tìm là xy + $e^x$siny = 1.**(0,5đ)**

**Câu 7.(1,0đ)**

Phương trình y’ + ycosx = sinxcosx là phương trình vi phân tuyến tính với $\begin{cases} p(x) = \cos x \\ q(x) = \sin x \cos x \end{cases}$. **(0,25đ)**

Ta có $\int p(x)dx = \int \cos x dx = \sin x \Rightarrow \begin{cases} e^{\int p(x)dx} = e^{\sin x} \\ e^{-\int p(x)dx} = e^{-\sin x} \end{cases} \Rightarrow \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx =$ $\int \sin x e^{\sin x} d(\sin x) = \int \sin x d(e^{\sin x}) = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} = (\sin x - 1)e^{\sin x}$, do đó $y = \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C\right] e^{-\int p(x)dx} = \left[(\sin x - 1)e^{\sin x} + C\right] e^{-\sin x} = \sin x - 1 + \frac{C}{e^{\sin x}}$ .**(0,5đ)**

Từ yêu cầu nghiệm đi qua điểm (x,y) = (0,1) ta có $1 = \sin 0 - 1 + \frac{C}{e^{\sin 0}} \Leftrightarrow 1 = 0 - 1 + \frac{C}{e^{\sin 0}} \Leftrightarrow C = 2$ nên nghiệm phải tìm là $y = \sin x + \frac{2}{e^{\sin x}} - 1$.**(0,25đ)**

**Ghi chú:**

**1.** Theo Quy chế đào tạo, điểm được cho lẻ đến 0,1

**2.** Đối với mỗi câu, thí sinh có thể giải bằng cách khác với đáp án, khi đó người chấm thi, trên cơ sở thang điểm đã có của câu này, đề nghị thang điểm và trao đổi trực tiếp với Tổ trưởng để thống nhất, nhằm bảo đảm tính chính xác và công bằng.