TailieuVNU.com

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017 - 2018

Đề thi số 1

Môn thi: Giải tích II. Số tín chỉ: 4.
Hệ: Chính quy. Thời gian làm bài: 120 phút.

Câu 1. (1.5 điểm) Cho hàm 2 biến $f(x,y) = \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

Chứng tỏ rằng: $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Câu 2. (2 điểm) Tính tích phân 2 lớp $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$ với D là miền phẳng nằm bên trên trục hoành y=0, giới hạn bởi parabol y^2=x và 2 đường thẳng x=0,y=1.

Câu 3. (1.5 điểm) Tính thể tích khối vật thể giới hạn bởi mặt paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng z=0

Câu 4. (2 điểm). Tính tích phân đường loại 2 trên một đường cong kín $\oint\limits_C (xy+y)dx + xydy$, với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, chiều C ngược chiều đồng hồ.

Câu 5. (1.5 điểm). Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân toàn phần:

$$3x^2(1+\ln y)dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0, \text{ với } y>0$$

Câu 6. (1.5 điểm). Giải phương trình vi phân $y'' + y = xe^x$

Sinh viên không sử dụng tài liệu

Đáp án đề thi số 1, Môn thi: Giải tích II

Câu 1. (1.5 điểm) Ta có $f(x,y)=y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{-1}{2}}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{-5}{2}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}x^{\frac{-1}{2}}$$

Vậy $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{3}{4}y^{\frac{3}{2}}x^{\left(\frac{-5}{2}+2\right)}=\frac{3}{4}y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{-1}{2}}$, $\quad y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{3}{4}y^{\left(\frac{-1}{2}+2\right)}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{3}{4}y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{-1}{2}}$ (đpcm)

Câu 2. (2 điểm) Miền D được xác định bởi các bất đẳng thức $y^2\ge x$, $x\ge 0$, $0\le y\le 1$. Vậy tích phân được tính có dạng:

$$I=\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{y^2}e^{\frac{x}{y}}dx\right)dy=\int_0^1\left(ye^{\frac{x}{y}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=y^2}dy=\int_0^1\left(ye^y-y\right)dy$$

$$=\left((y-1)e^y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}$$

Câu 3. (1.5 điểm) Khối vật thể được xác định bởi các bất đẳng thức $0\le z\le 1-x^2-y^2$. Từ đó dẫn tới $0\le 1-x^2-y^2\Rightarrow x^2+y^2\le 1$. Vậy thể tích được tính bởi:

$$V=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^{1-x^2-y^2}dz\right)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(1-x^2-y^2\right)dxdy$$

Sử dụng phép đổi biến trụ $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$, $r\ge 0$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Jacobien của phép biến đổi bằng r. Thay vào bất đẳng thức $x^2+y^2\le 1$ có $r\le 1$. Vậy tích phân bằng:

$$V=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr\right)d\varphi=2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

Câu 4. (2 điểm). Sinh viên có thể làm theo 2 cách, nếu đúng được đủ điểm:

Cách 1

Sử dụng công thức Green đối với đường cong kín C. Đặt:

$P = xy + y;\ \ Q = xy$.

Tích phân tính bằng

$$I = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \iint_D (y - x - 1)\,dxdy$$

Đặt

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, |J| = r, D_{r\varphi} = \{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1\}$

Do đó

$$I = \iint_{D_{r\varphi}} r\left(r\sin\varphi - r\cos\varphi - 1\right)drd\varphi = \int_0^{2\pi}(\sin\varphi - \cos\varphi)\,d\varphi\int_0^1 r^2dr - \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr$$

$$= \left[-\sin\varphi - \cos\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 - [\varphi]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = -\pi$$

Cách 2

Tham số hóa đường tròn dạng: $x = \cos\varphi, y = \sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$

Có $dx = -\sin\varphi d\varphi, dy = \cos\varphi d\varphi$. Thay vào tích phân có:

$$I = \int_0^{2\pi}\left(-(\cos\varphi + 1)\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$-\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = -\pi$$

Câu 5. (1.5 điểm). Đặt hàm F(x,y) sao cho

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2(1 + \ln y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y} - 2y \qquad (2)$$

Lấy tích phân (1) theo *x* và lấy tích phân (2) theo *y* ta có:

$F = x^3(1 + \ln y) + C_1(y)$

$F = x^3\ln y - y^2 + C_2(x)$

So sánh 2 biểu thức ta thu được

$F = x^3(1 + \ln y) - y^2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân toàn phần là:

$x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$ với C là hằng số tùy ý

Câu 6. (1.5 điểm).

Giải phương trình đặc trưng: $k^2+1=0$ cho ra 2 nghiệm k_1=i, k_2=-i. Đặt $y_1=\cos x, y_2=\sin x$

Vế phải có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ với α=1,β=0, n=1, α+iβ=1 là nghiệm bội 0 của phương trình đặc trưng.Vậy ta tìm nghiệm riêng dạng:

$y_r=(ax+b)e^x$

với a,b là các hằng số cần tìm. Ta có:

$y_r'=(ax+a+b)e^x$

$y_r''=(ax+2a+b)e^x$

Thay vào phương trình vi phân có:

$(2ax+2a+2b)e^x=xe^x$

Cân bằng hệ số 2 vế, giải ra có $a=\frac{1}{2}, b=\frac{-1}{2}$. Vậy $y_r=\frac{(x-1)e^x}{2}$. Nghiệm tổng quát có dạng:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y_r=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{(x-1)e^x}{2}$$