TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ
*****

Đáp án và Thang điểm
ĐỀ THI GIỮA KỲ HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 2
(Học kỳ II năm học 2016-2017)

Câu 1.(1,25đ) Khảo sát tính liên tục tại điểm O(0,0) của hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ b & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ trong đó b là tham số.

Bài giải.

Miền xác định của hàm số f(x,y) đang xét là D = $\mathbf{R}^2$.(0,25đ)

Vì khi (x,y) → (0,0) thì $\dfrac{1}{x^2+y^2}\to+\infty$ do đó $\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}\le\dfrac{\pi}{2}$ khi (x,y) → (0,0)

$\Rightarrow 0\le|f(x,y)|=\left|(x^2+y^2)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le(x^2+y^2)\dfrac{\pi}{2}\to 0$ khi (x,y) → 0 (0,25đ) nên theo nguyên lý kẹp thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.(0,25đ)

Do đó, nếu b = 0 thì f(0,0) = 0 và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\Rightarrow$ hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại điểm (0,0)(0,25đ); ngược lại, nếu b ≠ 0 thì f(0,0) = b ≠ 0 tức là $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)\Rightarrow$ hàm số f(x,y) đang xét không liên tục tại điểm (0,0). (0,25đ)

Câu 2.(1,5đ) Cho hàm số $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+(y-5)^2+1}-1}{x^2+(y-5)^2}$

2.1. Tìm miền xác định D của hàm số f(x,y); **2.2.** Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,5)} f(x,y)$.

Bài giải.

2.1. Hàm số $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+(y-5)^2+1}-1}{x^2+(y-5)^2}$ xác định khi $x^2+(y-5)^2\neq 0 \Leftrightarrow$ hoặc x ≠ 0 hoặc y ≠ 5 nên miền xác định của hàm số là D = $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,5)\}$.(0,5đ)

2.2. Đặt $t = x^2 + (y-5)^2 \Rightarrow t\to 0$ khi (x,y) → (0,5).

Biến đổi $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+(y-5)^2+1}-1}{x^2+(y-5)^2}=\dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t}=\dfrac{(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)}{t(\sqrt{t+1}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,5)} f(x,y)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{\sqrt{t+1}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.(1,0đ)

Câu 3.(0,75đ) Chứng minh rằng hàm số $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ thỏa mãn phương trình Laplace $\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}=0$ trong không gian $\mathbf{R}^3$.

Bài giải.

Ta có $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=-\dfrac{1}{2}.(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}-1}.2x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = -1.\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - x.\left(-\frac{3}{2}\right).\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}-1}.2x = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

(0,5đ),tương tự ta cũng có $\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$

và $\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = -3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} = 0$$

(0,25đ).

Câu 4.(1,25đ) Cho hàm số f(x,y,z) = $x^2y^2z^2$. Tính gradf(x,y,z) và $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \vec{l}}$ tại điểm $M_0(-1,1,1)$, biết rằng $\vec{l}$ được xác định bởi véc tơ $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(0,-1,-1)$.

Bài giải.

+ Ta có $\begin{cases} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^2z^2 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2x^2yz^2 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2x^2y^2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(-1,1,1)}{\partial x} = 2.(-1).1^2.1^2 = -2 \\ \frac{\partial f(-1,1,1)}{\partial y} = 2.(-1)^2.1.1^2 = 2 \\ \frac{\partial f(-1,1,1)}{\partial z} = 2.(-1)^2.1^2.1 = 2 \end{cases}$ **(0,25đ)**

$\Rightarrow \text{gradf}(-1,1,1) = \frac{\partial f(-1,1,1)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(-1,1,1)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(-1,1,1)}{\partial z}\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ **(0,25đ)**

+ Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1-0)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (1+1)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = 3$ do đó các cosin chỉ phương của véc tơ $\vec{l}$ là $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.**(0,5đ)**

+ Suy ra $\frac{\partial f(-1,1,1)}{\partial \vec{l}} = \left(-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\right) =$

$\left(-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(-\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}\right) = 3\frac{1}{3}$ **(0,25đ)**.

Câu 5.(2,0đ) Khảo sát cực trị của hàm số f(x,y) = $6x^2y - 24xy - 6x^2 + 24x + 4y^3 - 15y^2 + 36y + 1$.

Bài giải.

Miền xác định của hàm số f(x,y) đang xét là D = $\mathbf{R}^2$.

- Ta có $\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12xy - 24y - 12x + 24 = 12\left(xy - 2y - x + 2\right) = 12(x-2)(y-1) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6x^2 - 24x + 12y^2 - 30y + 36 = 6(x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6) \end{cases}$

Suy ra hệ phương trình để xác định các điểm dừng (nếu có) của hàm số đang xét là

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12(x-2)(y-1) = 0 \\ 6(x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1) = 0 \\ x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases}$$ **(0,25đ)**

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=0\\x^2-4x+2y^2-5y+6=0\end{cases}\\\begin{cases}y-1=0\\x^2-4x+2y^2-5y+6=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\2y^2-5y+2=0\end{cases}\\\begin{cases}y=1\\x^2-4x+3=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\\left[\begin{array}{l}y=2\\y=1/2\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}y=1\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$ **(0,25đ)**

Như vậy, hàm số đang xét có 4 điểm dừng $M_1(2,2)$; $M_2(2,1/2)$; $M_3(1,1)$; $M_4(3,1)$.

- Ta có $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=12y-12=12(y-1)\Rightarrow A(x,y)=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=12(y-1)\\\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=12x-24=12(x-2)\Rightarrow B(x,y)=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=12(x-2)\\\dfrac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2}=24y-30=6(4y-5)\Rightarrow C(x,y)=\dfrac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2}=6(4y-5)\end{cases}\Rightarrow$

$\Delta(x,y)=B^2(x,y)-A(x,y)C(x,y)=12^2(x-2)^2-12(y-1).6(4y-5)=72\left[2(x-2)^2-(y-1)(4y-5)\right]$ **(0,5đ)**

+ Tại điểm dừng $M_1(2,2)$ ta có $\begin{cases}\Delta(2,2)=-216<0\\A(2,2)=12>0\end{cases}$ nên nó là điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu là f_{ct} = f(2,2) = 21.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_2(2,1/2)$ ta có $\begin{cases}\Delta(2,1/2)=-108<0\\A(2,1/2)=-6>0\end{cases}$ nên nó là điểm cực đại và giá trị cực đại là $f_{cđ}$ = f(2,1/2) = 111/4.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_3(1,1)$ ta có $\Delta(1,1)=144>0$ nên nó không phải là điểm cực trị.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_4(3,1)$ ta có $\Delta(3,1)=144>0$ nên nó không phải là điểm cực trị.**(0,25đ)**

Câu 6.(1,5đ) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x,y) = xy + x + y trên miền đóng D là hình chữ nhật được giới hạn bởi các đường thẳng x = 1, x = 2, y = 2 và y = 3.

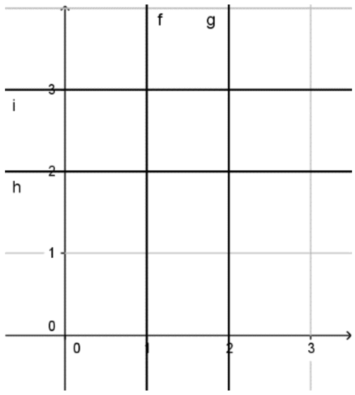
Bài giải.

Miền xác định của hàm số đang xét là $\mathbf{R}^2$ và hiển nhiên là hàm số f(x,y) đang xét liên tục với mọi x, y trong miền xác định của nó, nên hàm số này đạt GTLN và GTNN trên miền đóng D.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y+1=0\\\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x+1=0\end{cases}$ để xác định các điểm dừng. Hệ phương trình này có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$, tức là có 1 điểm dừng (-1,-1) là điểm nằm ngoài miền D nên không xét.**(0,25đ)**

Bây giờ ta xét giá trị của hàm số f(x,y) trên biên của miền D:

- Trên đường x = 1 thì f(1,y) = 1y + 1 + y = 2y + 1 với $2 \le y \le 3$ nên f_{min} = f(1,2) = 5 và f_{max} = f(1,3) = 7.**(0,25đ)**



- Trên đường x = 2 thì f(2,y) = 2y + 2 + y = 3y + 2 với $2 \le y \le 3$ nên f_{min} = f(2,2) = 8 và f_{max} = f(2,3) = 11.**(0,25đ)**

- Trên đường y = 2 thì f(x,2) = 2x + x + 2 = 3x + 2 với $1 \le x \le 2$ nên f_{min} = f(1,2) = 5 và f_{max} = f(2,2) = 8.**(0,25đ)**

- Trên đường y = 3 thì f(x,3) = 3x + x + 3 = 4x + 3 với $1 \le x \le 2$ nên f_{min} = f(1,3) = 7 và f_{max} = f(2,3) = 11.**(0,5đ)**

So sánh các giá trị của hàm f(x,y) tìm được ở trên ta nhận được GTNN(f) = 5 tại điểm (1,2) và GTLN(f) = 11 tại điểm (2,3).**(0,25đ)**

Câu 7.(1,75đ) Tìm cực trị của hàm số f(x,y) = xy với điều kiện 2x + 3y = 5.

Bài giải.

Ta có $2x + 3y = 5 \Leftrightarrow 2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow \varphi(x,y) = 2x + 3y - 5 = 0$.

Lập hàm $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \varphi(x,y) = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$**(0,25đ)** $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = y + 2\lambda \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = x + 3\lambda \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 5 \end{cases}$,

(0,25đ) do đó ta được hệ phương trình xác định các điểm dừng là $\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5/4 \\ y_0 = 5/6 \\ \lambda_0 = -5/12 \end{cases}$.

(0,25đ)

Tại $\lambda_0 = -\dfrac{5}{12}$ ta có $\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\partial^2 f(5/4,5/6)}{\partial x^2} = 0 \\ B = \dfrac{\partial^2 f(5/4,5/6)}{\partial x \partial y} = 1 \\ C = \dfrac{\partial^2 f(5/4,5/6)}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$ **(0,25đ)**

$\Rightarrow d^2 f(x_0,y_0) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = 2dxdy$.**(0,25đ)** Mặt khác ta có $\varphi(x,y) = 2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow$ $d\varphi(x,y) = 2dx + 3dy = 0 \Rightarrow dy = -\dfrac{2}{3}dx \Rightarrow d^2 f(x_0,y_0) = -\dfrac{4}{3}dx^2 < 0$, tức là dạng toàn phương $d^2f(x_0,y_0)$ xác định âm, **(0,25đ)** do đó hàm số f(x,y) = xy đạt cực đại tại điểm $(x_0,y_0) = \left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{6}\right)$ và giá trị cực đại $f_{max} = f\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{25}{24}$.**(0,25đ)**