ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014 - 2015

Đề thi số 2

Môn thi: Giải tích II. Số tín chỉ: 5.
Hệ: Chính quy. Thời gian làm bài: 120 phút.

Câu I. (2đ) Cho hàm số:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ; \quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & ; \quad x^2+y^2=0 \end{cases}.$$

a. Xét tính liên tục của $f(x,y)$ tại $(0,0)$.

b. Tính đạo hàm riêng cấp một của $f(x,y)$ tại $(0,0)$.

Câu II. (2đ) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x,y)=e^{-xy},$$

trên miền $D=\{(x,y): x^2+4y^2\leq 1\}$.

Câu III. (2đ) Tính tích phân:

$$\int_C (1+xy)e^{xy}dx+(e^y+x^2e^{xy})dy,$$

với C là đường cong $y=x^2$, định hướng từ điểm $O(0,0)$ tới điểm $B(1,1)$.

Câu IV. (2đ) Tính tích phân:

$$\iint_S xydydz+yzdzdx+zxdxdy,$$

với S là phía trên (nhìn từ phía dương của trục Oz) của phần mặt cong:

$z=4-x^2-y^2$ và nằm phía trên hình vuông $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$.

Câu V. (2đ) Giải phương trình vi phân:

$$y''+2y'+y=x^2+4x-1+4e^x.$$

Ghi chú: Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu.

Đáp án Đề số 2

Câu I:

a. (0.5đ) Xét dãy điểm $M\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n^2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$; $k,l=const$.

(0.5đ) Khi đó: $f(M)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{k^2l}{k^4+l^2}$, do đó $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nên f(x,y) không liên tục tại (0,0).

b. (0.5đ) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

(0.5đ) $f'_y(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

Câu II:

(0.5đ) Trong miền mở D, các điểm dừng thỏa mãn: $\begin{cases} f'_x=-ye^{-xy}=0\\ f'_y=-xe^{-xy}=0\end{cases}$

Điểm dừng: $(0,0)$. Khi đó: $f(0,0)=1$.

(0.5đ) Trên biên của miền D, lập hàm Lagrange: $L(x,y)=e^{-xy}+\lambda(x^2+4y^2-1)$

Điểm dừng của hàm Lagrange: $\begin{cases} L'_x=-ye^{-xy}+2\lambda x=0\\ L'_y=-xe^{-xy}+8\lambda y=0\\ x^2+4y^2=1\end{cases}$

(0.5đ) Các điểm dừng: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},\pm\frac{1}{2\sqrt2}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},\mp\frac{1}{2\sqrt2}\right)$.

$f_{CT}\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},\pm\frac{1}{2\sqrt2}\right)=e^{-1/4}, f_{CD}\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},\mp\frac{1}{2\sqrt2}\right)=e^{1/4}$.

(0.5đ) Do đó: $f_{min}\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},\pm\frac{1}{2\sqrt2}\right)=e^{-1/4}, f_{max}\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},\mp\frac{1}{2\sqrt2}\right)=e^{1/4}$.

Câu III:

$P(x,y)=(1+xy)e^{xy}\to P'_y=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}$

(0.5đ) $Q(x,y)=e^y+x^2e^{xy}\to Q'_x=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}$

$\to P'_y=Q'_x$

(0.5đ) Suy ra, tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân. Do đó:

$I=\int\limits_{\overline{OA}}(1+xy)e^{xy}dx+(e^y+x^2e^{xy})dy+\int\limits_{\overline{AB}}(1+xy)e^{xy}dx+(e^y+x^2e^{xy})dy\quad ;\quad A(0,1)$

(0.5đ) $=\int\limits_0^1 e^y dy+\int\limits_0^1(1+x)e^x dx$

(0.5đ) $=e^y\Big|_0^1+xe^x\Big|_0^1=2e-1$

Câu IV:

(0.5đ) Phương trình mặt cong: $z=4-x^2-y^2$

Vecto pháp tuyến của mặt cong: $\vec{l}=\left(-z'_x,-z'_y,1\right)=\left(2x,2y,1\right)$

(0.5đ) Hình chiếu của phần mặt cong xuống mp Oxy: $D_{xy}=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

(0.5đ) $\rightarrow I = \iint\limits_{D_{xy}} \left[xy.2x + y(4-x^2-y^2).2y + (4-x^2-y^2)x \right] dxdy$

(0.5đ) $= \int_0^1 \left(\frac{34}{15} + \frac{11}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - x^3 \right) dx = \frac{713}{180}$

Câu V:

(0.5đ) Pt không thuần nhất: $y'' + 2y' + y = x^2 + 4x - 1 + 4e^x$.

Pt thuần nhất: $y'' + 2y' + y = 0$

Pt đặc trưng: $k^2 + 2k + 1 = 0 \rightarrow k = -1$

(0.5đ) Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

(0.25đ) Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng: $\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x$

(0.5đ) Dùng phương pháp đồng nhất thức: A=1,B=0,C=-3,D=1.

(0.25đ) Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^2 - 3 + e^x$$