TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

*****

Đáp án và Thang điểm

ĐỀ THI GIỮA KỲ HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 2

(Học kỳ II năm học 2016-2017)

Câu 1.(1,25đ) Khảo sát tính liên tục tại điểm O(0,0) của hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ c & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ trong đó c là tham số.

Bài giải.

Miền xác định của hàm số f(x,y) đang xét là D = $\mathbf{R}^2$.(0,25đ)

Ta có $0\le|f(x,y)|=\left|\dfrac{x^3\sin y-y^3\sin x}{x^2+y^2}\right|=\left|\dfrac{x^3\sin y}{x^2+y^2}+\dfrac{-y^3\sin x}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x^3\sin y}{x^2+y^2}\right|+\left|\dfrac{-y^3\sin x}{x^2+y^2}\right|=$

$\left|\dfrac{x^3\sin y}{x^2+y^2}\right|+\left|\dfrac{y^3\sin x}{x^2+y^2}\right|=\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right||\sin y|+\left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right||\sin x|\le\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right|.1+\left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right|.1=\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right|\le$

$\left|\dfrac{x^3}{x^2}\right|+\left|\dfrac{y^3}{y^2}\right|=|x|+|y|\to 0$ (0,25đ) khi (x,y) → 0 nên theo nguyên lý kẹp thì

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3\sin y-y^3\sin x}{x^2+y^2}=0$.(0,25đ)

Do đó, nếu d = 0 thì f(0,0) = 0 và $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)\Rightarrow$ hàm số f(x,y) đang xét liên tục tại điểm (0,0)(0,25đ); ngược lại, nếu d $\neq$ 0 thì f(0,0) = d $\neq$ 0 tức là $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)\neq f(0,0)\Rightarrow$ hàm số f(x,y) đang xét không liên tục tại điểm (0,0).(0,25đ)

Câu 2.(1,5đ) Cho hàm số $f(x,y)=(ax+by)\sin\dfrac{a}{x}\sin\dfrac{b}{y}$

2.1. Tìm miền xác định D của hàm số f(x,y); **2.2.** Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

Bài giải.

2.1. Hàm số $f(x,y)=(ax+by)\sin\dfrac{a}{x}\sin\dfrac{b}{y}$ xác định khi $\begin{cases}x\neq 0\\ y\neq 0\end{cases}\Rightarrow$ miền xác định của hàm số là D = {(x,y)$\in\mathbf{R}^2$|x $\neq$ 0}$\cap${(x,y)$\in\mathbf{R}^2$|y $\neq$ 0}, tức là tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy không nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy.(0,5đ)

2.2. Ta có $0\le|f(x,y)|=\left|(ax+by)\sin\dfrac{a}{x}\sin\dfrac{b}{y}\right|=|ax+by|.\left|\sin\dfrac{a}{x}\right|\left|\sin\dfrac{b}{y}\right|\le|ax+by|.1.1=$

$|ax+by|\le|a||x|+|b||y|\to 0$ khi (x,y) → (0,0) nên theo nguyên lý kẹp thì

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(ax+by)\sin\dfrac{a}{x}\sin\dfrac{b}{y}=0$.(1,0đ)

Câu 3.(0,75đ) Chứng minh rằng hàm số $f(x,y,z)=\arctan\dfrac{x}{y}+\arctan\dfrac{y}{z}+\arctan\dfrac{z}{x}$ thỏa mãn phương trình Laplace $\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}=0$ trong không gian $\mathbf{R}^3$.

Bài giải.

Ta có $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}.\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{z}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)=\dfrac{y}{x^2+y^2}-\dfrac{z}{x^2+z^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xz}{(x^2+z^2)^2}$$ **(0,5đ)**, tương tự ta cũng có

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = -\frac{2yz}{(y^2+z^2)^2} + \frac{2yx}{(y^2+x^2)^2} \text{ và } \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = -\frac{2zx}{(z^2+x^2)^2} + \frac{2zy}{(z^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$$ **(0,25đ)**.

Câu 4.(1,25đ) Cho hàm số $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$. Tính $\text{grad}f(x,y,z)$ và $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \vec{l}}$ tại điểm $M_0(1,-1,1)$, biết rằng $\vec{l}$ được xác định bởi véc tơ $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(-1,0,-1)$.

Bài giải.

+ Ta có $\begin{cases} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^2z^2 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2x^2yz^2 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2x^2y^2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(1,-1,1)}{\partial x} = 2.1.(-1)^2.1^2 = 2 \\ \frac{\partial f(1,-1,1)}{\partial y} = 2.1^2.(-1).1^2 = -2 \\ \frac{\partial f(1,-1,1)}{\partial z} = 2.1^2.(-1)^2.1 = 2 \end{cases}$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow \text{grad}f(1,-1,1) = \frac{\partial f(1,-1,1)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(1,-1,1)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(1,-1,1)}{\partial z}\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$ **(0,25đ)**

+ Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1-1)\vec{i} + (0+1)\vec{j} + (-1-1)\vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

do đó các cosin chỉ phương của véc tơ $\vec{l}$ là $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.**(0,5đ)**

+ Suy ra $\frac{\partial f(1,-1,1)}{\partial \vec{l}} = \left(2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\right) =$

$$\left(2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right).\left(-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = -3\frac{1}{3}$$ **(0,25đ)**.

Câu 5.(2,0đ) Khảo sát cực trị của hàm số $f(x,y) = 6x^2y - 24xy - 6x^2 + 24x + 4y^3 - 15y^2 + 36y + 1$.

Bài giải.

Miền xác định của hàm số f(x,y) đang xét là $D = \mathbf{R}^2$.

- Ta có $\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12xy - 24y - 12x + 24 = 12(xy - 2y - x + 2) = 12(x-2)(y-1) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6x^2 - 24x + 12y^2 - 30y + 36 = 6(x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6) \end{cases}$

Suy ra hệ phương trình để xác định các điểm dừng (nếu có) của hàm số đang xét là

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12(x-2)(y-1) = 0 \\ 6(x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1) = 0 \\ x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases}$$ **(0,25đ)**

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=0\\ x^2-4x+2y^2-5y+6=0\end{cases}\\ \begin{cases}y-1=0\\ x^2-4x+2y^2-5y+6=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ 2y^2-5y+2=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=1\\ x^2-4x+3=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=1/2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}y=1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$ **(0,25đ)**

Như vậy, hàm số đang xét có 4 điểm dừng $M_1(2,2)$; $M_2(2,1/2)$; $M_3(1,1)$; $M_4(3,1)$.

- Ta có $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=12y-12=12(y-1)\Rightarrow A(x,y)=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=12(y-1)\\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=12x-24=12(x-2)\Rightarrow B(x,y)=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=12(x-2)\\ \dfrac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2}=24y-30=6(4y-5)\Rightarrow C(x,y)=\dfrac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2}=6(4y-5)\end{cases}\Rightarrow$

$\Delta(x,y)=B^2(x,y)-A(x,y)C(x,y)=12^2(x-2)^2-12(y-1).6(4y-5)=72\left[2(x-2)^2-(y-1)(4y-5)\right]$ **(0,5đ)**

+ Tại điểm dừng $M_1(2,2)$ ta có $\begin{cases}\Delta(2,2)=-216<0\\ A(2,2)=12>0\end{cases}$ nên nó là điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu là f_{ct} = f(2,2) = 21.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_2(2,1/2)$ ta có $\begin{cases}\Delta(2,1/2)=-108<0\\ A(2,1/2)=-6>0\end{cases}$ nên nó là điểm cực đại và giá trị cực đại là $f_{cđ}$ = f(2,1/2) = 111/4.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_3(1,1)$ ta có $\Delta(1,1)=144>0$ nên nó không phải là điểm cực trị.**(0,25đ)**

+ Tại điểm dừng $M_4(3,1)$ ta có $\Delta(3,1)=144>0$ nên nó không phải là điểm cực trị.**(0,25đ)**

Câu 6.(1,5đ) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x,y) = $x^2 + y^2 - xy - 4x$ trên miền đóng D là tam giác được giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, y = 0 và 2x + 3y = 12.

Bài giải.

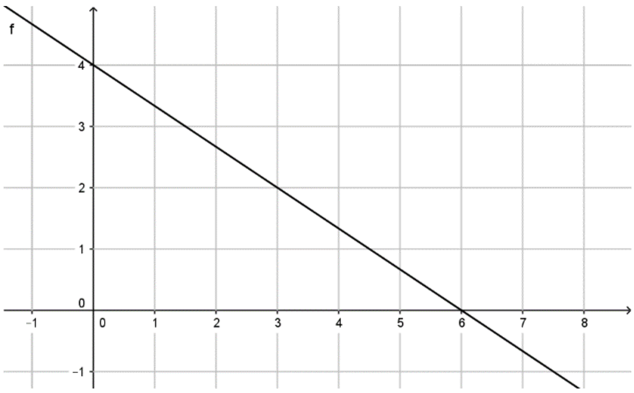
Miền xác định của hàm số đang xét là $\mathbf{R}^2$ và hiển nhiên là hàm số f(x,y) đang xét liên tục với mọi x, y trong miền xác định của nó, nên hàm số này đạt GTLN và GTNN trên miền đóng D.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x-y-4=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y-x=0\end{cases}$ **(0,25đ)** để xác định các điểm dừng. Hệ phương trình này có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=8/3\\ y=4/3\end{cases}$, tức là có 1 điểm dừng (8/3,4/3) là điểm trong của miền D và giá trị của hàm số f(x,y) tại điểm này là $f\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{16}{3}$.**(0,25đ)**

Bây giờ ta xét giá trị của hàm số f(x,y) trên biên của miền D:

- Trên đường x = 0 thì f(0,y) = y^2 với $0 \le y \le 4$ nên f_{min} = f(0,0) = 0 và f_{max} = f(0,4) = 16.**(0,25đ)**

- Trên đường y = 0 thì f(x,0) = $x^2 - 4x$ với $0 \le x \le 6$ nên f_{min} = f(2,0) = -4 và f_{max} = f(6,0) = 12. **(0,25đ)**



- Trên đường 2x + 3y = 12 thì $f(x,y)=\frac{19}{9}x^2-\frac{40}{3}x+16$ với $0 \le x \le 6$ nên $f_{min}=f\left(\frac{60}{19},\frac{36}{19}\right)=-\frac{96}{19}$ và f_{max} = f(6,0) = 12.**(0,5đ)**

So sánh các giá trị của hàm f(x,y) tìm được ở trên ta nhận được $GTNN(f)=-\frac{16}{3}$ tại điểm $\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$ và GTLN(f) = 16 tại điểm (0,4).**(0,25đ)**

Câu 7.(1,75đ) Tìm cực trị của hàm số $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$.

Bài giải.

Ta có $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \varphi(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}=0$.

Lập hàm $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}\right)$ **(0,25đ)**

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^3} \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3} \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2} \end{cases}$$

,**(0,25đ)** do đó ta được hệ phương trình xác định các điểm dừng là

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^3}=0 \\ -\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}=0 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1=2 \\ \lambda_1=-1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2=y_2=-2 \\ \lambda_2=1 \end{cases}$$

.**(0,25đ)**

Tại $\lambda_1=-1$ ta có

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{1}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=-\frac{2}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=0 \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{2}{y^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{\partial^2 f(2,2)}{\partial x^2}=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{\partial^2 f(2,2)}{\partial x\partial y}=0 \\ C=\frac{\partial^2 f(2,2)}{\partial y^2}=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow d^2f(2,2)=Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2=-\frac{1}{4}dx^2-\frac{1}{4}dy^2$.**(0,25đ)** Mặt khác ta có

$\varphi(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow d\varphi(x,y)=-\frac{2}{x^3}dx-\frac{2}{y^3}dy=0 \Rightarrow d\varphi(2,2)=-\frac{1}{4}dx-\frac{1}{4}dy=0 \Rightarrow dy=-dx$

$\Rightarrow d^2f(2,2)=-\frac{1}{2}dx^2<0$, tức là dạng toàn phương $d^2f(x_0,y_0)$ xác định âm, do đó hàm số $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ đạt cực đại tại điểm $(2,2)$ và giá trị cực đại $f_{max}=f(2,2)=1$.**(0,25đ)**

Tại $\lambda_2=1$ ta có $\begin{cases}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=-\frac{2}{x^3}\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=0\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{2}{y^3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\frac{\partial^2 f(-2,-2)}{\partial x^2}=\frac{1}{4}\\ B=\frac{\partial^2 f(-2,-2)}{\partial x\partial y}=0\\ C=\frac{\partial^2 f(-2,-2)}{\partial y^2}=\frac{1}{4}\end{cases}$

$\Rightarrow d^2f(-2,-2)=Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2=\frac{1}{4}dx^2+\frac{1}{4}dy^2$.**(0,25đ)** Mặt khác ta có $\varphi(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow d\varphi(x,y)=-\frac{2}{x^3}dx-\frac{2}{y^3}dy=0 \Rightarrow d\varphi(-2,-2)=\frac{1}{4}dx+\frac{1}{4}dy=0 \Rightarrow dy=-dx$

$\Rightarrow d^2f(-2,-2)=\frac{1}{2}dx^2>0$, tức là dạng toàn phương $d^2f(x_0,y_0)$ xác định dương, do đó hàm số $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ đạt cực tiểu tại điểm $(-2,-2)$ và giá trị cực tiểu $f_{max}=f(-2,-2)=-1$.**(0,25đ)**