BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1 Phương trình, hệ phương trình tuyến tính, hệ bậc thang

Câu 1. Giải các phương trình sau và vẽ tập nghiệm trong không gian tương ứng.

(a) $2x - 5y = 10$

(b) $x + y + z = 1$.

Câu 2. Giải các hệ phương trình dạng bậc thang sau

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2y + z = 3 \\ 10z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2y + z = 6 \\ 3z = 6 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15 \end{cases}$

Câu 3. Giải các hệ phương trình sau bằng cách đưa về dạng bậc thang:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 6 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 3y + 2z = 8 \\ 4x + y = 4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + 6z = 8 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - z = 7 \\ x - 11y + 4z = 3 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ 2x + 3y - w = 0 \\ -3x + 4y + z + 2w = 4 \\ x + 2y - z + w = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 4x + 3y + 17z = 0 \\ 5x + 4y + 22z = 0 \\ 4x + 2y + 19z = 0 \end{cases}$

Câu 4. Giải các hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} = -\dfrac{25}{6} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{3}{z} = 4 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{z} = 10 \\ -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{13}{z} = -8 \end{cases}$

Câu 5. Biện luận số nghiệm các hệ phương trình sau theo k:

(a) $\begin{cases} 4x + ky = 6 \\ kx + y = -3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + kz = 6 \\ 3x + 6y + 8z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + kz = 3 \\ x + ky + z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$

2 Ma trận của hệ phương trình tuyến tính, thuật toán Gauss

Câu 1. Xác định cỡ của các ma trận sau, xác định ma trận nào có dạng bậc thang, viết các hệ phương trình sao cho các ma trận trên là ma trận tăng của các hệ đó:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính với ma trận tăng sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

Câu 3. Giải các hệ phương trình sau bằng thuật toán Gauss:

(a) $\begin{cases} -3x + 5y = -22 \\ 3x + 4y = 4 \\ 4x - 8y = 32 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - 5z = 3 \\ x - 2z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 24 \\ 2y - z = 14 \\ 7x - 5y = 6 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3x - 6y - 3z = -21 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x + y - z + 2w = -6 \\ 3x + 4y + w = 1 \\ x + 5y + 2z + 6w = -3 \\ 5x + 2y - z - w = 3 \end{cases}$

Câu 4. Xét ma trận $A := \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Giả sử A là ma trận tăng của một hệ phương trình tuyến tính, tìm k để hệ có nghiệm.

(b) Giả sử A là ma trận hệ số của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, tìm k để hệ có nghiệm.

Câu 5. Xét ma trận $B := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & k \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Giả sử B là ma trận tăng của một hệ phương trình tuyến tính, tìm k để hệ có nghiệm.

(b) Giả sử B là ma trận hệ số của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, tìm k để hệ có nghiệm.

3 Thuật toán Gauss-Jodan

Câu 1. Trong các ma trận sau, xác định ma trận nào có dạng bậc thang thu gọn, nếu chưa hãy đưa về dạng thu gọn và tìm nghiệm của các hệ phương trình tương ứng (tức các hệ phương trình sao cho các ma trận trên là ma trận tăng của các hệ đó):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -3 & 22 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 2. Giải các hệ phương trình sau bằng thuật toán Gauss-Jordan:

(a) $\begin{cases} 2x + 3z = 3 \\ 4x - 3y + 7z = 5 \\ 8x - 9y + 15z = 10 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 3 \\ 6x + 6y + 12z = 13 \\ 12x + 9y - z = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 6z = -9 \\ 3x - 2y + 11z = -16 \\ 3x - y + 7z = -11 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x + 5y - 19z = 34 \\ 3x + 8y - 31z = 54 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x + 12y - 7z - 20w = 22 \\ 3x + 9y - 5z - 28w = 30 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + 2y + 6z = 1 \\ 2x + 5y + 15z = 4 \\ 3x + y + 3z = -6 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 2x + 2y = 5 \\ 2x - y + 6z = 2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x + y + z + 2w = -1 \\ 5x - 2y + z - 3w = 0 \\ -x + 3y + 2z + 2w = 1 \\ 3x + 2y + 3z - 5w = 12 \end{cases}$

Câu 3. Xác định k để hệ phương trình sau có đúng một nghiệm và tìm nghiệm đó:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x + ky + z = 0 \end{cases}$$

Câu 4. Biện luận số nghiệm các hệ phương trình sau theo các hằng số a, b, c:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + by = -9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ x + z = 2 \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 3y + 3z = c \end{cases}$

4 Ma trận và các phép toán trên ma trận

Câu 1. Tìm $A + B,\ A - B,\ 2A,\ B + \frac{1}{2}A$ với $A,\ B$ là các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tìm $AB^t,\ BA^t,\ A^tB$ với $A,\ B$ là các ma trận trong Câu 1.

Câu 3. Tìm X với: $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ và

(a) 3X+2A=B (b) 2A-5B=3X (c) X-3A+2B=O (d) 6X-4A-3B=O

Câu 4. Chứng minh rằng $AC = BC$ không suy ra $A = B$ với các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Câu 5. Tìm nghiệm của các phương trình ma trận sau:

(a) $4\begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix}$

Câu 6. Giải các phương trình ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Câu 7. Tìm điều kiện để $AB = BA$ với: $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 8. Viết ma trận cột b thành tổ hợp tuyến tính của các cột của ma trận A với A, b là các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -22 \\ 4 \\ 32 \end{bmatrix}$

Câu 9. Xét các ma trận cột sau: $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) Tìm a và b sao cho $Z = aX + bY$.

(b) Chứng minh rằng không tồn tại a và b sao cho $W = aX + bY$.

(c) Chứng minh rằng nếu $aX + bY + cW = O$ thì $a = b = c = 0$.

(d) Tìm $a,\ b$ và c sao cho $aX + bY + cZ = O$.

Câu 10. Tính A^5 và A^{10} với $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5 Ma trận nghịch đảo

Câu 1. Chứng minh ma trận B là ma trận nghịch đảo của ma trận A với $A,\ B$ là các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu tồn tại):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -10 \\ 7 & 16 & -21 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

Câu 3. Tìm $(AB)^{-1},\ (A^t)^{-1},\ A^{-2},\ (2B)^{-1}$ với:

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$

(c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4} & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Câu 4. Tìm x để $A = A^{-1}$ với

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 5. Tìm x để A không có ma trận nghịch đảo với A là các ma trận trong Câu 4.

Câu 6. Tìm A với

(a) $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $(4A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 7. Viết các hệ phương trình tuyến tính sau dưới dạng ma trận $Ax = b$, sau đó tìm A^{-1} và tìm nghiệm của các hệ đó:

(a) $\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ -x + y = -22 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ 5x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

6 Ma trận sơ cấp

Câu 1. Trong các ma trận sau, ma trận nào là sơ cấp, nếu có xác định phép toán dòng nào được dùng để tạo ra ma trận đó:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 2. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Tìm ma trận sơ cấp E sao cho $EA = B$;

(b) Tìm ma trận sơ cấp E sao cho $EA = C$;

(c) Tìm ma trận sơ cấp E sao cho $EB = A$;

(d) Tìm ma trận sơ cấp E sao cho $EC = A$.

Câu 3. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sơ cấp sau:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (k \neq 0)$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 4. Dùng ma trận sơ cấp để tìm nghịch đảo của các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 5. Phân tích các ma trận sau thành tích các ma trận sơ cấp:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 6. Dùng ma trận sơ cấp để tìm nghịch đảo của các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} (c \neq 0)$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} (c \neq 0)$

7 Định thức, định lý Laplace

Câu 1. Tìm các định thức con và các phần bù đại số (hệ số kép, đối nhân tử) của các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 4 & \lambda-1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \\ -8 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tính định thức của các ma trận trong Câu 1 bằng cách khai triển theo hàng và cột thứ 2.
Câu 3. Tính định thức của các ma trận sau bằng cách khai triển theo hàng hoặc theo cột:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 11 & 12 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 4. Tìm x sao cho

(a) $\begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ 2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 3 \\ 2 & 2 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

Câu 5. Chứng minh

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$

(c) $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$

(d) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\Big(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)$
$(a, b, c \neq 0)$

8 Các tính chất của định thức và ứng dụng

Câu 1. Tính định thức của các ma trận sau bằng cách sử dụng các phép toán cơ bản trên dòng hay cột:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 9 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 9 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tính $|A|,\ |B|,\ AB,\ |AB|$; sau đó kiểm tra lại $|A||B| = |AB|$:

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Câu 3. Tính $|A^t|,\ |A^2|,\ |AA^t|,\ 2A,\ |A^{-1}|$ với

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Câu 4. Dùng ma trận phụ hợp để tính ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có thể):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 5. Dùng luật Cramer để giải các hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x - y - z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ 5x - 2y - -2z = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = -2 \\ 2x + 2y + 5z = 16 \\ 8x - 5y - 2z = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + 3y + 5z = 1 \\ 3x + 5y + 9z = 2 \\ 5x + 9y + 17z = 4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 4 \\ 3x + 5y + 9z = 7 \\ 5x + 9y + 17z = 13 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{cases}$

Câu 6. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau theo k và giải hệ bằng phương pháp Cramer (với các giá trị k hệ có duy nhất nghiệm):

$$\begin{cases} kx + (1-k)y = 1 \\ (1-k)x + ky = 3 \end{cases}$$

9 Không gian vector, không gian con

Câu 1. Cho các vector sau $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 2, -1)$, và $w = (4, 0, -4)$.

(a) Tìm $v-u$, $u-v+2w$, $2u+4v-w$, $5u-3v-\frac{1}{2}w$.

(b) Tìm z sao cho $2z - 3u = w$.

(c) Tìm z sao cho $2u + v - w + 3z = 0$.

Câu 2. Xác định vector không và phần tử đối của một phần tử trong các không gian vector sau với phép công và phép nhân thông thường:

(a) $\mathbb{R}^4$

(b) $M_{2,3}$

(c) $M_{1,4}$

(d) $M_{2,2}$

(e) P_3 với P_3 là không gian các đa thức có bậc bị chặn bởi 3.

Câu 3. Với phép công và phép nhân thông thường, trong các tập hợp sau, tập nào là không gian vector:

(a) Tập các đa thức bậc 1 có dạng $f(x) = ax + b$;

(b) Tập các đa thức bậc 1 có dạng $f(x) = ax$ với $a \neq 0$;

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geqslant 0\}$;

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}$;

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 2y\}$;

(f) Tập các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$;

(g) Tập các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$;

(h) Tập các ma trận 2×2 có định thức bằng 0;

(i) Tập các ma trận 2×2 có định thức khác 0.

Câu 4. $\mathbb{R}^2$ với một trong các cặp phép toán sau có phải không gian vector không?

(a) $(x_1, y_1) \uplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ và $c * (x, y) = (cx, y)$;

(b) $(x_1, y_1) \uplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ và $c * (x, y) = (\sqrt{c}x, \sqrt{c}y)$;

(c) $(x_1, y_1) \uplus (x_2, y_2) = (x_1, 0)$ và $c * (x, y) = (cx, cy)$;

(d) $(x_1, y_1) \uplus (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$ và $c * (x, y) = (cx, cy)$;

Câu 5. $\mathbb{R}^3$ với một trong các cặp phép toán sau có phải không gian vector không?

(a) $(x_1, y_1, z_1) \uplus (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$ và $c * (x, y, z) = (cx, cy, cz)$;

(b) $(x_1, y_1, z_1) \uplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1, z_1 + z_2 + 1)$ và $c * (x, y, z) = (cx, cy, cz)$;

Câu 6. Với phép công và phép nhân thông thường, W có là không gian con của V với:

(a) $W = \{(x, y, z, w) \in V = \mathbb{R}^4 : \ w = 0\}$;

(b) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : \ z = 2x + 3y\}$;

(c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} \in V = M_{2,2} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

(d) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \in V = M_{3,2} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

(e) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : \ z = 1\}$;

(f) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : \ x, y, z \in \mathbb{Z}\}$;

(g) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : \ x, y, z \in \mathbb{Q}\}$;

(h) $W = \{(x, y) \in V = \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$;

(i) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : \ z = 1/x, \ x \neq 0\}$;

(j) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2\}$;

(k) $W = \{x \in V = \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$ với A là một ma trận cỡ $m \times n$ cho trước;

(l) $W = \{x \in V = \mathbb{R}^n : \ Ax = b \neq 0\}$ với A là một ma trận cỡ $m \times n$ cho trước.

10 Tổ hợp tuyến tính, độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Câu 1. Trong các vector u, v sau, vector nào là tổ hợp tuyến tính các vector trong S, với:

(a) $S = \{(2,-1,3),(5,0,4)\},\ u = (1,1,-1),\ v = (-1,-2,2),\ w = (1,-8,12)$;

(b) $S = \{(1,2,-2),(2,-1,1)\},\ u = (1,-5,-5),\ v = (-4,-3,3),\ w = (-2,-6,6)$.

Câu 2. Cho các vector $u = (1,2),\ v = (1,-1)$. Nếu có thể, hãy viết các vector sau thành tổ hợp tuyến tính của u và v:

(a) $(2,1)$; (b) $(3,0)$; (c) $(0,3)$; (d) $(1,-1)$.

Câu 3. Nếu có thể, hãy viết z thành tổ hợp tuyến tính của u, v và w với:

(a) $z = (10,1,4)$ với $u = (2,3,5),\ v = (1,2,4),\ w = (-2,2,3)$;

(b) $z = (-1,7,2)$ với $u = (1,3,5),\ v = (2,-1,3),\ w = (-3,2,-4)$;

(c) $z = (0,5,3,0)$ với $u = (1,1,2,2),\ v = (2,3,5,6),\ w = (-3,1,-4,2)$;

(d) $z = (2,5,-4,0)$ với $u = (1,3,2,1),\ v = (2,-2,-5,4),\ w = (2,-1,3,6)$.

Câu 4. Trong các tập sau, xác định tập nào độc lập tuyến tính, tập nào phụ thuộc tuyến tính:

(a) $\{(0,0),(1,2)\}$;

(b) $\{(1,0),(1,1),(2,-1)\}$;

(c) $\{(1,-4,1),(6,3,2)\}$;

(d) $\{(6,2,1),(-1,3,2)\}$;

(e) $\{(1,1,1),(2,2,2),(1,2,3)\}$;

(f) $\{(-4,-3,4),(1,-2,3),(6,0,0)\}$;

(g) $\{(1,0,0),(0,4,0),(0,0,-6),(1,5,-3)\}$;

(h) $\{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}$.

Câu 5. Tìm một tổ hợp tuyến tính không tầm thường bằng 0 của mỗi tập các vector sau:

(a) $\{(3,4),(-1,1),(2,0)\}$;

(b) $\{(2,4),(-1,-2),(0,6)\}$;

(c) $\{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$;

(d) $\{(1,2,3,4),(1,0,1,2),(1,4,5,6)\}$.

Câu 6. Với giá trị t nào, mỗi tập sau đây là độc lập tuyến tính:

(a) $\{(t,1,1),(1,t,1),(1,1,t))\}$;

(b) $\{(t,1,1),(1,0,1),(1,1,3t))\}$;

(c) $\{(t,0,0),(0,1,0),(0,0,1))\}$;

(d) $\{(t,t,t),(t,1,0),(t,0,1))\}$.

Câu 7. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Trong các ma trận sau, ma trận nào là tổ hợp tuyến tính của A và B?

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 28 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$

Câu 8. Các ma trận sau $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 22 & 23 \end{bmatrix}$ có phụ thuộc tuyến tính không?

Câu 9. Trong các tập sau, xác định tập nào độc lập tuyến tính, tập nào phụ thuộc tuyến tính trong P_2:

(a) $\{2-x, 2x-x^2, 6-5x+x^2\}$;

(b) $\{x^2-1, 2x+5\}$;

(c) $\{x^2+3x+1, 2x^2+x-1, 4x\}$;

(d) $\{x^2, x^2+1\}$;

11 Tập sinh, không gian con sinh với một tập vector

Câu 1. Trong các tập sau, tập nào là hệ sinh của $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(2,1),(-1,2)\}$
(b) $\{(1,1)\}$
(c) $\{(1,-2),(-3,9)\}$
(d) $\{(1,3),(-2,-6),(3,9)\}$
(e) $\{(-1,4),(4,-1),(1,1)\}$
(f) $\{(1,-2),(-2,1),(1,1)\}$

Câu 2. Trong các tập sau, tập nào là tập sinh của $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(4,7,3),(-1,2,6),(2,-3,5)\}$
(b) $\{(6,7,6),(3,2,-4),(1,-3,2)\}$
(c) $\{(-2,5,0),(4,6,3)\}$
(d) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$
(e) $\{(1,-2,0),(0,0,1),(-1,2,0)\}$
(f) $\{(1,0,3),(2,0,-1),(4,0,5),(2,0,6)\}$

Câu 3. Tập $\{1,x^2,x^2+2\}$ có phải là tập sinh của P_2?
Câu 4. Tập $\{x^2-2x,x^3+8,x^3-x^2,x^2-4\}$ có phải là tập sinh của P_3?

12 Cơ sở và số chiều

Câu 1. Viết cơ sở chính tắc của các không gian sau:

(a) $\mathbb{R}^4$
(b) $M_{2,3}$
(c) $M_{4,1}$
(d) $M_{2,2}$

Câu 2. Xác định tập nào trong các tập sau là cơ sở của $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(1,2),(1,0),(0,1)\}$
(b) $\{(1,1)\}$
(c) $\{(-4,5),(0,0)\}$
(d) $\{(1,-2),(-1,2),(2,4)\}$
(e) $\{(1,2),(3,4)\}$

Câu 3. Xác định tập nào trong các tập sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(1,3,0),(4,1,2),(-2,5,-2)\}$
(b) $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$
(c) $\{(1,5,3),(0,1,2),(0,0,6)\}$

Câu 4. Xác định tập nào trong các tập sau là cơ sở của P_2:

(a) $\{1,2x,x^2-4,5x\}$
(b) $\{1-x,1-x^2,3x^2-2x-1\}$
(c) $\{6x-3,3x^2,1-2x-x^2\}$
(d) $\{x-1,x^2-1,1-2x-x^2\}$

Câu 5. Chứng minh các tập sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và biểu diễn $u=(8,3,8)$ qua cơ sở đó:

(a) $\{(4,3,2),(0,3,2),(0,0,2)\}$
(b) $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$
(c) $\{(1,4,7),(3,0,1),(2,1,2)\}$

Câu 6. Xác định tập nào trong các tập sau là cơ sở của $M_{2,2}$:

(a) $\left\{\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix}1&2\\-5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&-7\\6&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-9\\11&12\end{bmatrix},\begin{bmatrix}12&-16\\17&42\end{bmatrix}\right\}$

Câu 7. Tìm một cơ sở của không gian các ma trận cấp 2 đối xứng và số chiều của không gian đó.
Câu 8. Tìm một cơ sở của không gian các ma trận cấp 3 đối xứng và số chiều của không gian đó.
Câu 9. Tìm tất cả các tập con là cơ sở của $\mathbb{R}^2$ của tập sau $\{(1,0),(0,1),(1,2)\}$.
Câu 10. Tìm tất cả các tập con là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ của tập sau $\{(1,3,-2),(-4,1,1),(-2,7,-3),(2,1,1)\}$.
Câu 11. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^2$ chứa $\{(1,1)\}$.
Câu 12. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ chứa $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$.
Câu 13. Tìm một cơ sở, số chiều và mô tả hình học các không gian con của $\mathbb{R}^2$ sau:

(a) $W = \{(2t, t) : \ t \in \mathbb{R}\}$ (b) $W = \{(0, t) : \ t \in \mathbb{R}\}$

Câu 14. Tìm một cơ sở, số chiều và mô tả hình học các không gian con của $\mathbb{R}^3$ sau:

(a) $W = \{(2t, t, -t) : \ t \in \mathbb{R}\}$ (b) $W = \{(2s - t, s, t) : \ t, s \in \mathbb{R}\}$

Câu 15. Tìm một cơ sở, số chiều của các không gian con của $\mathbb{R}^4$ sau:

(a) $W = \{(2s - t, s, t, s) : \ t, s \in \mathbb{R}\}$

(b) $W = \{(5t, -3t, t, t) : \ t \in \mathbb{R}\}$

(c) $W = \{(t, 2s - 3t, w, t) : \ t, s, w \in \mathbb{R}\}$

13 Hạng của ma trận, tập nghiệm hệ phương trình tuyến tính

Câu 1. Tìm hạng, 1 cơ sở cho không gian dòng và 1 cơ sở cho không gian cột của các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \\ 8 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -6 & -4 \\ -2 & -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & -6 \\ 7 & 14 & -6 & -3 \\ -2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi S với S là một trong các tập sau:

(a) $\{(1,2,4),(-1,3,4),(2,3,1)\}$

(b) $\{(4,2,-1),(1,2,-8),(0,1,2)\}$

(c) $\{(1,1,2),(4,4,8),(1,1,1)\}$

(d) $\{(1,2,2),(-1,0,0),(1,1,1)\}$

Câu 3. Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi S với S là một trong các tập sau:

(a) $\{(2,9,-2,53),(-3,2,3,-2),(8,-3,-8,17),(0,-3,0,15)\}$

(b) $\{(2,5,-3,-2),(-2,-3,2,-5),(1,3,-2,2),(-1,-5,3,5)\}$

Câu 4. Tìm một cơ sở và chiều của không gian nghiệm của $Ax = 0$ với A là một trong các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

Câu 5. Tìm một cơ sở và chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

(a) $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -3x - y = 0 \\ 2x - 4y - 5z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 6y - 9z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -3x - 6y + 12z = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x + 3y + 15z + 11t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ 2x + 3y + 11z + 8t = 0 \end{cases}$

Câu 6. Các phương trình $Ax = b$ sau có nghiệm hay không? Nếu có hãy viết nghiệm dưới dạng $x = x_h + x_p$ với x_h là nghiệm của hệ thuần nhất $Ax = 0$ và x_p là một nghiệm của hệ $Ax = b$:

(a) $\begin{cases} x + 3y + 10z = 18 \\ -2x + 7y + 32z = 29 \\ -x + 3y + 14z = 12 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - 6y + z = 12 \\ -7x + 14y + 4z = -28 \\ 2x - 4y + 5z = 8 \end{cases}$

Câu 7. Xác định b có nằm trong không gian cột của A hay không, nếu có hãy viết b thành tổ hợp tuyến tính của các vector cột của A:

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

14 Tọa độ và chuyển cơ sở

Câu 1. Tìm tọa độ của x trong cơ sở chính tắc từ tọa độ của x trong cơ sở B với:

(a) $B = \{(2, -1), (0, 1)\},\ [x]_B = [4, 1]^t$

(b) $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\},\ [x]_B = [2, 3, 1]^t$

(c) $B = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\},\ [x]_B = [1, -2, 3, -1]^t$

Câu 2. Tìm tọa độ của x trong cơ sở B với:

(a) $B = \{(-6, 7), (4, -3)\},\ x = (-26, 32)$

(b) $B = \{(8, 11, 0), (7, 0, 10), (1, 4, 6)\},\ x = (3, 19, 2)$

(c) $B = \{(9, -3, 15, 4), (3, 0, 0, 1), (0, -5, 6, 8), (3, -4, 2, -3)\},\ x = (0, -20, 7, 15)$

Câu 3. Không dùng Gauss-Jordan, tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' với:

(a) $B = \{(1, 0), (0, 1)\},\ B' = \{(2, 4), (1, 3)\}$

(b) $B = \{(1, 1), (1, 0)\},\ B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$

(c) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},\ B' = \{(1, 0, 0), (0, 2, 8), (6, 0, 12)\}$

(d) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},\ B' = \{(1, 3, -1), (2, 7, -4), (2, 9, -7)\}$

Câu 4. Tìm ma trận chuyển cơ sở P từ B sang B' và ma trận chuyển cơ sở Q từ B' sang B, kiểm tra lại $P = Q^{-1}$ và tìm $[x]_B$ với:

(a) $B = \{(1, 3), (-2, -2)\},\ B' = \{(-12, 0), (-4, 4),\ [x]_{B'} = [-1, 3]^t\}$

(b) $B = \{(2, -2), (6, 3)\},\ B' = \{(1, 1), (32, 31)\},\ [x]_{B'} = [2, -1]^t$

(c) $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 3), (1, 1, 1)\},\ B' = \{(2, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 2, 1)\},\ [x]_{B'} = [1, 2, -1]^t$

(d) $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\},\ B' = \{(2, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\},\ [x]_{B'} = [2, 3, 1]^t$

Câu 5. Tìm tọa độ của các đa thức sau trong cơ sở chính tắc của P_2 :

(a) $p = x^2 + 11x + 4$

(b) $p = 3x^2 + 114x + 13$

(c) $p = -2x^2 + 5x + 1$

(d) $p = 4x^2 - 3x - 2$

Câu 6. Tìm tọa độ của các X trong cơ sở chính tắc của $M_{3,1}$ với

(a) $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(d) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

15 Không gian Euclid $\mathbb{R}^n$

Câu 1. Tìm độ dài, một vectơ cùng hướng, một vectơ ngược hướng của các vectơ sau:

(a) $v = (2, 0, -4, 5)$;

(b) $v = (1, -3, -5, 6, 2)$.

Câu 2. Cho $v = (8, 8, 6)$. Tìm u sao cho:

(a) u cùng hướng với v và có độ dài gấp đôi;

(b) u ngược hướng với v và có độ dài bằng một nửa.

Câu 3. Tìm khoảng cách và tích vô hướng giữa các vectơ sau:

(a) $u = (1, 2, -4, 3)$ và $v = (5, 1, 2, 3)$;

(b) $u = (1, -3, -5, 4, 2)$ và $u = (2, -1, -2, 3, 1)$;

(c) $u = (0, 1, 2, 3)$ và $v = (1, 0, 4, -1)$.

Câu 4.

(a) Giả sử $\|u\| = 4,\ \|v\| = 10$ và $\langle u, v\rangle = -5$. Tìm $\langle u + v, 2u - v\rangle$;

(b) Giả sử $\|u\| = 8,\ \|v\| = 6$ và $\langle u, v\rangle = 7$. Tìm $\langle 3u - v, u - 3v\rangle$.

Câu 5. Kiểm tra bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức tam giác cho các cặp vectơ sau:

(a) $u = (1, 1, -2)$ và $v = (1, -3, -2)$;

(b) $u = (1, 2, 3, 4)$ và $v = (4, 3, 2, 1)$;

(c) $u = (1, 1, 1)$ và $v = (0, 1, -2)$;

(d) $u = (-1, 1, -1, 1)$ và $v = (1, 2, 3, 4)$.

Câu 6. Tìm góc giữa các vectơ sau:

(a) $u = (3, 1)$ và $v = (-2, 4)$;

(b) $u = (1, 0, 1, 0)$ và $v = (3, 3, 3, 3)$;

(c) $u = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$ và $v = \left(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

(d) $u = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$ và $v = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 7. Tìm các vectơ vuông góc với vectơ sau:

(a) $u = (2, 7)$;

(b) $u = (2, -1, 1)$;

(c) $u = (0, 0, -1, 1)$.

Câu 8. Xác định các vectơ sau có vuông góc hay song song với nhau không:

(a) $u = (\cos x, \sin x, -1)$ và $v = (\sin x, -\cos x, 0)$;

(b) $u = (-\sin x, \cos x, 1)$ và $v = (\sin x, -\cos x, 0)$.

16 Không gian Euclid trừu tượng

Câu 1. Tìm $\langle u, v\rangle,\ \|u\|,\ \|v\|, d(u,v)$ theo tích vô hướng tương ứng:

(a) $u = (4,3)$ và $v = (0,5)$, với $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + u_2v_2$;

(b) $u = (1,1,1)$ và $v = (2,5,2)$, với $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$;

Câu 2. Tìm $\langle A, B\rangle,\ \|A\|,\ \|B\|, d(A,B)$ theo tích vô hướng sau $\langle A, B\rangle = 2a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+2a_{22}b_{22}$:

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 3. Giải thích tại sao $\langle u, v\rangle$ không là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$ trong các trường hợp sau:

(a) $\langle u, v\rangle = u_1v_1$;

(b) $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_2$;

(c) $\langle u, v\rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2$;

(d) $\langle u, v\rangle = u_1u_2 + v_1v_2$.

Câu 4. Kiểm tra bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức tam giác theo tích vô hướng tương ứng:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ với $\langle A, B\rangle = 2a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + 2a_{22}b_{22}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ với $\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + 2a_{22}b_{22}$.

Câu 5. Tìm góc giữa các vectơ sau theo tích vô hướng tương ứng:

(a) $u = (-4,3)$ và $v = (0,5)$, với $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + u_2v_2$;

(b) $u = (1,1,1)$ và $v = (2,-2,2)$, với $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$.

Câu 6. Tìm $\text{proj}_u v$ và $\text{proj}_v u$ với

(a) $u = (1,2)$ và $v = (2,1)$, vẽ $\text{proj}_u v$ và $\text{proj}_v u$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$;

(b) $u = (-1,3)$ và $v = (4,4)$, vẽ $\text{proj}_u v$ và $\text{proj}_v u$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$;

(c) $u = (1,3,-2)$ và $v = (0,-1,1)$;

(d) $u = (0,1,3,-6)$ và $v = (-1,1,2,2)$.

Câu 7. Cho $u = (5,1,4)$ và $v = (2,1,-1)$. Hỏi u và v có trực giao nhau theo tích vô hướng $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ không? Hỏi u và v có trực giao với nhau theo tích vô hướng Euclid không?

Câu 8. Tìm các vectơ vuông góc với vectơ sau theo tích vô hướng tương ứng:

(a) $w = (2,7)$ với $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 3u_2v_2$;

(b) $w = (2,-1,1)$ với $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3$;

(c) $w = (-1,1,-1,1)$ với $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 3u_2v_2 + 3u_3v_3 + u_4v_4$.

17 Cơ sở trực giao, trực chuẩn, trực giao hóa Gram-Schmidt

Câu 1. Các tập sau có phải cơ sở trực giao hay trực chuẩn hay không:

(a) $S = \{(4, -1, 1), (-1, 0, 4), (-4, -17, -1)\}$;

(b) $S = \Big\{\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \Big(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\Big), \Big(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)\Big\}$;

(c) $S = \Big\{\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \Big(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\Big), \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)\Big\}$.

Câu 2. Viết tọa độ của x trong cơ sở trực chuẩn tương ứng:

(a) $S = \Big\{\Big(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\Big), \Big(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\Big)\Big\}$, $x = (-3, 4)$;

(b) $S = \Big\{\Big(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\Big), \Big(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\Big), (0, 0, 1)\Big\}$, $x = (5, 10, 15)$.

Câu 3. Dùng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt để đưa các cơ sở sau về dạng trực chuẩn:

(a) $S = \{(1, -2, 2), (2, 2, 1), (2, -1, -2)\}$;

(b) $S = \{(4, -3, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 4)\}$;

(c) $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$;

(d) $S = \{(0, 1, 2), (2, 0, 0), (1, 1, 1)\}$;

(e) $S = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$;

(f) $S = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Câu 4. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian nghiệm của các hệ phương trình thuần nhất sau:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

(e) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Câu 5. Các không gian con sau có trực giao với nhau không:

(a) $V_1 = \text{span}\{(2, 1, -1), (0, 1, 1)\}$ và $V_2 = \text{span}\{(-1, 2, 0)\}$;

(b) $V_1 = \text{span}\{(0, 0, 2, 1), (0, 0, 1, -2)\}$ và $V_2 = \text{span}\{(3, 2, 0, 0), (0, 1, -2, 0)\}$.

Câu 6. Tìm phần bù trực giao của các không gian sau:

(a) $V = \text{span}\{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$;

(b) $V = \text{span}\{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}$;.

Câu 7. Tìm hình chiếu của v lên không gian con V với:

(a) $V = \text{span}\{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ và $v = (1, 0, 1, 1)$;

(b) $V = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ và $v = (2, 3, 4)$.

18 Ánh xạ tuyến tính, ảnh, hạt nhân, định lý hạng

Câu 1. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x, 1)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$;

(d) $T : M_{2,2} \to \mathbb{R},\ T(A) = |A| = \det A$;

(e) $T : M_{3,3} \to M_{3,3},\ T(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$;

(f) $T : M_{2,2} \to M_{2,2},\ T(A) = A^T$.

Câu 2. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ với $T(1, 0, 0) = (2, 4, -1),\ T(0, 1, 0) = (1, 3, -2)$ và $T(0, 0, 1) = (0, -2, 2)$, tìm

(a) $T(0, 3, -1)$;

(b) $T(2, -1, 0)$.

Câu 3. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ với $T(1, 1, 1) = (2, 0, -1),\ T(0, -1, 2) = (-3, 2, -1)$ và $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, tìm

(a) $T(2, 1, 0)$;

(b) $T(2, -1, 1)$.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, tìm $T(2, 4)$ và $T^{-1}(-1, 2, 2)$.

Câu 5. Tìm hạch của các ánh xạ tuyến tính sau:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, 0, z)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (z, y, x)$.

Câu 6. Tìm một cơ sở của $\ker T$ và một cơ sở của $\mathrm{im} T$ với T là ánh xạ tuyến tính cho bởi $T(v) = Av$ với:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Xác định số chiều của $\ker T$ và hạng của T trong từng trường hợp.

19 Ma trận của một ánh xạ tuyến tính, ánh xạ hợp, ánh xạ ngược

Câu 1. Tìm ma trận chuẩn tắc của các ánh xạ tuyến tính T sau:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + 2y, x - 2y);$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (2x - 3y, x - y, z);$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (0, 0, 1);$

(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4).$

Câu 2. Tìm ma trận chuẩn tắc của các ánh xạ tuyến tính $T = T_2 \circ T_1$ với:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (x - 2y, 2x - 3y),$
$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y) = (2x, x - y);$

(b) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_1(x, y) = (x - 2y, x + y, x - y),$
$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y, z) = (x - 3y, 3x + z);$

(c) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y, z) = (x - 3y, 3x + z),$
$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x - 2y, x + y, x - y).$

Câu 3. Trong các ánh xạ tuyến tính sau, ánh xạ nào là đẳng cấu tuyến tính:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z);$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z);$

(c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2, x_2, x_3 + x_4, x_3);$

(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_3, x_2, x_1).$

Câu 4. Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính T trong các cơ sở B, B', sau đó tính $[T(v)]_{B'}$ (tọa độ của $T(v)$ trong cơ sở B') với: (Gợi ý: $[T(v)]_{B'} = A[v]_B$)

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x - 12y, x - 5y),\quad v = (10, 5),$
$B = B' = \{(4, 1), (3, 1)\};$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (x + y, x, y),\quad v = (5, 4),$
$B = \{(1, -1), (0, 1)\},\ B' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\};$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x - y, y - z),\quad v = (1, 2, -3),$
$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\},\ B' = \{(1, 2), (1, 1)\};$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2z, 2y - z),\quad v = (4, -5, 10),$
$B = \{(2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 1)\},\ B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$

Câu 5. (Đề thi 2016) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 3z, 2x - y + z).$$

(a) Tìm ma trận của T trong cở sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm ma trận của T trong cơ sở $\{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

20 Ma trận đồng dạng

Câu 1. Tìm ma trận A' của ánh xạ tuyến tính T trong cơ sở B', sau đó chỉ ra rằng A' đồng dạng với ma trận A của T trong cơ sở chuẩn tắc B (Hướng dẫn: Tìm ma trận P chuyển cơ sở từ B' sang B, sau đó tìm P^{-1} rồi kiểm tra $A' = P^{-1}AP$):

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x - y, -x + y)$,
$B' = \{(1, -2), (0, 3)\}$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, y, z)$,
$B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, x + 2y, x + y + 3z)$,
$B' = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, -1)\}$.

Câu 2. Cho $B = \{(1, 3), (-2, -2)\}$ và $B' = \{(-12, 0), (-4, 4)\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ trong cơ sở B.

(a) Tìm ma trận chuyển P cơ sở từ B' sang B.

(b) Dùng A và P để tìm $[v]_B$ và $[T(v)]_B$ với $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
(Chú ý: $[v]_B = P[v]_{B'},\ [T(v)]_B = P[T(v)]_{B'} = PA[v]_B$)

(c) Tìm ma trận A' của $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ trong cơ sở B' và tìm P^{-1}.

(d) Tìm $[T(v)]_{B'}$ theo hai cách: $[T(v)]_{B'} = A'[v]_{B'}$ và $[T(v)]_{B'} = P^{-1}[T(v)]_B$.

Câu 3. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, 1), (-2, 3)\},\ B' = \{(1, -1), (0, 1)\}$,
$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Câu 4. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, 2), (-1, -1)\},\ B' = \{(-4, 1), (0, 2)\}$,
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Câu 5. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, -1), (-2, 1)\},\ B' = \{(-1, 1), (1, 2)\}$,
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Câu 6. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\},\ B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,
$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Câu 7. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},\ B' = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$,
$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

21 Giá trị riêng, vector riêng, đa thức đặc trưng

Câu 1. Kiểm tra λ_i là giá trị riêng và x_i là vectơ riêng tương ứng của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1, & x_1 = (1,0), \\ \lambda_2 = -1, & x_2 = (0,1); \end{array}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2, & x_1 = (1,0,0), \\ \lambda_2 = -1, & x_2 = (1,-1,0), \\ \lambda_3 = 3, & x_3 = (5,1,2). \end{array}$

Câu 2. Xác định những vectơ x_i nào là vectơ riêng của A với:

(a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $x_1 = (1,2)$, $x_2 = (2,1)$, $x_3 = (1,-2)$, $x_4 = (-1,0)$;

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = (2,-4,6)$, $x_2 = (2,0,6)$, $x_3 = (2,2,0)$, $x_4 = (-1,0,1)$.

Câu 3. Tìm phương trình đặc trưng, các giá trị riêng, các vectơ riêng và số chiều của không gian riêng tương ứng của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

22 Chéo hoá ma trận và ánh xạ tuyến tính

Câu 1. Kiểm tra ma trận A là chéo hóa được bằng cách tính $P^{-1}AP$, với:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 2. Chứng minh các ma trận sau đây không chéo hóa được:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Câu 3. Với mỗi ma trân A sau đây, tìm (nếu tồn tại) ma trận P chéo hóa ma trận A (tức $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo):

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Câu 4. Tìm cơ sở B sao cho ma trận của ánh xạ tuyến tính T trong B là ma trận đường chéo:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + y, x + y)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (-2x + 2y - 3z, 2x + y - 6z, -x - 2y)$.

Câu 5. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hỏi A và B có đồng dạng không? Nếu có, tìm ma trận P sao cho $B = P^{-1}AP$.

Câu 6. (Bài thi 2016) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & a & -3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ trong đó a là một số thực.

(a) Chứng minh rằng với mọi số thực a ta luôn có 2 là một giá trị riêng của A.

(b) Khi $a = 3$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

23 Chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng

Câu 1. Trong các ma trận sau, ma trận nào là ma trận đối xứng

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Câu 2. Tìm các giá trị riêng, các vectơ riêng và số chiều của không gian riêng tương ứng của các ma trận đối xứng sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 3. Trong các ma trận sau, ma trận nào là ma trận trực giao:

(a) $A = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$

Câu 4. Tìm ma trận trực giao P để $P^T AP$ là ma trận đường chéo với:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 5. (Bài thi 2016) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ trong đó a là một số thực.

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A, từ đó hãy tìm điều kiện của a để ma trận A có 3 giá trị riêng khác nhau.

(b) Khi $a = 2$, hãy tìm một ma trận trực giao P (nếu có) sao cho $P^t AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

24 Dạng toàn phương

Câu 1. Tìm ma trận của các dạng toàn phương sau:

(a) $x^2 + y^2$;

(b) $9x^2 + 10y^2 - 5xy$;

(c) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 4xz - 5yz$;

(d) $x^2 + 2x^2 + 3z^2 + 4t^2 + xy - 2xz + 6xt - 4yz - 8yt$.

Câu 2. Tìm các giá trị riêng của ma trận A và tìm ma trận P sao cho P^TAP là ma trận đường chéo với A là ma trận của dạng toàn phương sau:

(a) $2x^2 - 2y^2 - 3xy$;

(b) $5x^2 + 5y^2 - 2xy$;

(c) $16x^2 + 9y^2 + 24xy$.

Câu 3. Dùng định lý các trục chính để loại bỏ các đơn thức $xy,\ xz,\ yz$ trong các phương trình bậc hai sau:

(a) $x^2 + y^2 + 4xy - 9 = 0$;

(b) $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 36 = 0$;

(c) $xy + x - 2y + 3 = 0$;

(d) $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10\sqrt{2}x = 0$;

(e) $3x^2 + 3y^2 + 8z^2 - 2xy - 16 = 0$;

(f) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$;

(g) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - z - 8 = 0$;

Viết các phương trình trên trong hệ tọa độ mới.