Ánh xạ tuyến tính

Lê Xuân Thanh

Nội dung

1. Ánh xạ tuyến tính giữa các không gian vec-tơ
   - Giới thiệu về ánh xạ tuyến tính
   - Hạt nhân, ảnh, số khuyết, hạng
   - Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính
   - Ma trận theo cơ sở chính tắc
   - Ma trận theo cơ sở tổng quát
   - Ma trận đồng dạng
   - Ma trận của ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Nội dung

Ánh xạ giữa các không gian vec-tơ

Cho V, W là hai không gian vec-tơ.
Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ. Khi đó ta nói:

- V là *miền xác định* của T,
- W là *miền ảnh* của T,
- *ảnh* của T là tập hợp

$$\{\mathbf{w} \in W \mid \exists\, \mathbf{v} \in V \text{ sao cho } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}.$$

Nếu $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ với $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$, thì ta nói

- $\mathbf{w}$ là *ảnh* của $\mathbf{v}$ (qua ánh xạ T),
- $\mathbf{v}$ là *một nghịch ảnh* của $\mathbf{w}$ (qua ánh xạ T),
- *nghịch ảnh* của $\mathbf{w}$ (qua ánh xạ T) là tập hợp

$$\{\mathbf{u} \in V \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}\}.$$

Chú ý về ký hiệu

Ký hiệu:
Trong trường hợp $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,
thay vì viết $T(\mathbf{v})$ như $T((v_1, \ldots, v_n))$, ta viết $T(v_1, \ldots, v_n)$.

Ánh xạ tuyến tính

Cho V, W là hai không gian vec-tơ.
Ánh xạ $T: V \to W$ được gọi là một *ánh xạ tuyến tính* nếu

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, và
- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}) \quad \forall\, \mathbf{u} \in V, c \in \mathbb{R}$.

Ví dụ:

- Ánh xạ

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (v_1, v_2) \mapsto (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) \end{aligned}$$

  là một ánh xạ tuyến tính.
- Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x + 1$ không phải là một ánh xạ tuyến tính.

Một số ví dụ về ánh xạ tuyến tính

- Cho $A \in M(m, n)$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{v} &\mapsto A\mathbf{v} \end{aligned}$$

  là một ánh xạ tuyến tính.

- *(Phép quay góc θ ngược chiều kim đồng hồ trên mặt phẳng)*
  Ánh xạ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi
  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ với

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

  là một ánh xạ tuyến tính.

Một số ví dụ về ánh xạ tuyến tính

- Cho $A \in M(m, n)$. Ánh xạ

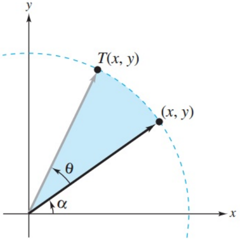
$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{v} &\mapsto A\mathbf{v} \end{aligned}$$

  là một ánh xạ tuyến tính.

- *(Phép quay góc θ ngược chiều kim đồng hồ trên mặt phẳng)* Ánh xạ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ với

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

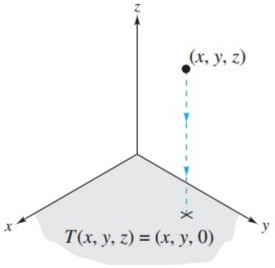
  là một ánh xạ tuyến tính.



Một số ví dụ về ánh xạ tuyến tính

- Cho $A \in M_{m,n}$. Ánh xạ
$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{v} &\mapsto A\mathbf{v} \end{aligned}$$
là một ánh xạ tuyến tính.

- *(Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng Oxy trong không gian)*
Ánh xạ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ với
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
là một ánh xạ tuyến tính.



Một số tính chất cơ bản

Cho V, W là hai không gian vec-tơ.
Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Cho $\mathbf{v} \in V$. Khi đó

- $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
- Nếu $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v_n}$, thì

$$T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v_n}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + c_n T(\mathbf{v}_n).$$

Áp dụng:
Cho $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính thỏa mãn

$$T(1,0,0) = (2,-1,4), \quad T(0,1,0) = (1,5,-2), \quad T(0,0,1) = (0,3,1).$$

Vì

$$(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1),$$

nên ta có

$$\begin{aligned} T(2,3,-2) &= 2T(1,0,0) + 3T(0,1,0) - 2T(0,0,1) \\ &= 2(2,-1,4) + 3(1,5,-2) - 2(0,3,1) \\ &= (7,7,0). \end{aligned}$$

Nội dung

Hạt nhân và ảnh

Cho V, W là hai không gian vec-tơ.
Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.

- *Hạt nhân* của T là tập hợp

$$\ker(T) := \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

- *Ảnh* của T là tập hợp

$$\mathrm{range}(T) := \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ với } \mathbf{v} \in V\}.$$

Ví dụ:
Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, với $A \in M_{m,n}$.

- $\ker(T)$ chính là không gian nghiệm của $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\mathrm{range}(T)$ chính là không gian cột của ma trận A.

Số khuyết và hạng

Cho V, W là hai không gian vec-tơ.
Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.

Tính chất:

- $\ker(T)$ là một không gian vec-tơ con của V.
- $\mathrm{range}(T)$ là một không gian vec-tơ con của W.

Định nghĩa:

- Số chiều của $\ker(T)$ được gọi là *số khuyết* của T, ký hiệu là $\mathrm{nullity}(T)$.
- Số chiều của $\mathrm{range}(T)$ được gọi là *hạng* của T, ký hiệu là $\mathrm{rank}(T)$.

Ví dụ:
Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, với $A \in M_{m,n}$. Khi đó
$\mathrm{nullity}(T) = \mathrm{nullity}(A)$ và $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(A)$.

Tính chất

Cho V, W là hai không gian vec-tơ, với $\dim(V) = n < \infty$.
Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.
Ta luôn có

$$\operatorname{nullity}(T) + \operatorname{rank}(T) = n = \dim(V).$$

Nội dung

Đơn cấu

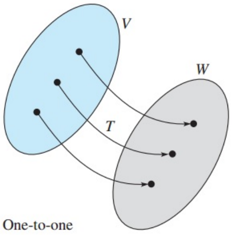
Cho V, W là hai không gian vec-tơ.

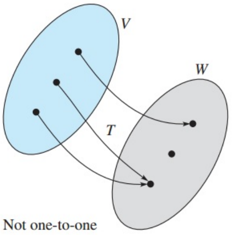
- Mỗi ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ còn được gọi là một *đồng cấu* từ V vào W.
- Đồng cấu $T : V \to W$ được gọi là một *đơn cấu* nếu T là ánh xạ một-một, tức là

  với mỗi $\mathbf{w} \in W$, tồn tại duy nhất $\mathbf{v} \in V$ sao cho $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$,

  hay nói cách khác

  với $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ta có $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$.





Đơn cấu

Ví dụ:

- Đồng cấu $T : M_{m,n} \to M_{n,m}$ xác định bởi $T(A) = A^T$ là đơn cấu.
- Đồng cấu $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ không là đơn cấu.

Tính chất:

- Đồng cấu $T : V \to W$ là một đơn cấu $\Leftrightarrow$ $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Toàn cấu

Cho V, W là hai không gian vec-tơ.

- Đồng cấu $T : V \to W$ được gọi là một *toàn cấu* nếu W là ảnh của T, tức là

$$\forall\, \mathbf{w} \in W\, \exists\, \mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}.$$

Ví dụ:

- Đồng cấu $T : M_{m,n} \to M_{n,m}$ xác định bởi $T(A) = A^T$ là toàn cấu.
- Đồng cấu $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, 0)$ không là toàn cấu.

Tính chất:

- Nếu $\dim(W) = n < \infty$, thì T là toàn cấu $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(T) = \dim(W)$.
- Nếu $\dim(V) = \dim(W) = n$, thì T là toàn cấu $\Leftrightarrow$ T là đơn cấu.

Đẳng cấu

Cho V, W là hai không gian vec-tơ.

- Đồng cấu $T : V \to W$ được gọi là một *đẳng cấu* nếu T vừa là đơn cấu vừa là toàn cấu.
- Nếu tồn tại một đẳng cấu $T : V \to W$, ta nói *V đẳng cấu với W*, hoặc *V và W đẳng cấu với nhau*, và ký hiệu $V \cong W$.

Ví dụ: $\mathbb{R}^4 \cong M_{4,1} \cong M_{1,4} \cong M_{2,2} \cong P_3$.

Tính chất:

$$V \cong W \quad \Leftrightarrow \quad \dim(V) = \dim(W).$$

Nội dung

Biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Ví dụ về biểu diễn ánh xạ tuyến tính:
Ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, 3x_2 + 4x_3)$$

có thể được viết dưới dạng

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

- *Câu hỏi:* Tìm ma trận A như thế nào?
- *Trả lời:* Dựa vào tác động của T trên một cơ sở của V.

Nội dung

Ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính

Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là

$$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Giả sử $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ tuyến tính, và

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad T(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Khi đó ta có

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó

$$A = \left[T(\mathbf{e}_1) \vdots T(\mathbf{e}_2) \vdots \cdots \vdots T(\mathbf{e}_n) \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ma trận A được gọi là *ma trận chính tắc* của ánh xạ tuyến tính T.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_3).$$

Xét cơ sở chính tắc $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1,0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính T là

$$A = \left[T(\mathbf{e}_1) \,\vdots\, T(\mathbf{e}_2) \,\vdots\, T(\mathbf{e}_3) \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nội dung

Ma trận của ánh xạ tuyến tính tương ứng với cặp cơ sở

Cho V, W là hai không gian vec-tơ hữu hạn chiều với cơ sở lần lượt là

$$B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}, \qquad B_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}.$$

Giả sử $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ tuyến tính, và

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{B_W} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{v}_2)]_{B_W} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad [T(\mathbf{v}_n)]_{B_W} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Khi đó ta có

$$[T(\mathbf{v})]_{B_W} = A[\mathbf{v}]_{B_V} \quad \forall\ \mathbf{v} \in V,$$

trong đó

$$A = \Big[[T(\mathbf{v}_1)]_{B_W} \,\vdots\, [T(\mathbf{v}_2)]_{B_W} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [T(\mathbf{v}_n)]_{B_W} \Big] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ma trận A được gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính T tương ứng với cơ sở B_V, B_W*. Nếu $V \equiv W$ và $B_V \equiv B_W$, thì A được gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính T tương ứng với cơ sở B_V*.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2).$$

Câu hỏi: Tìm ma trận của T tương ứng với cặp cơ sở

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1,2), (-1,1)\}, \qquad B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(1,0), (0,1)\}.$$

Trả lời: Ta có

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= T(1,2) = (3,0) = 3\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2, \\ T(\mathbf{v}_2) &= T(1,2) = (0,-3) = 0\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2. \end{aligned}$$

Như vậy

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ma trận của T tương ứng với cặp cơ sở B, B' là

$$A = \left[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} \vdots [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Nội dung

Đặt vấn đề

Cho V là một không gian vec-tơ hữu hạn chiều.
Một số thuật ngữ:

- Mỗi ánh xạ tuyến tính $T : V \to V$ được gọi là một *tự đồng cấu* của V.
- Xét $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ là một cơ sở của V.
  Gọi A là ma trận của T tương ứng với cặp cơ sở B, B, tức là

$$[T(\mathbf{v}_1) \ldots T(\mathbf{v}_n)] = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n]A.$$

  Ma trận A còn được gọi là
  ma trận của tự đồng cấu T trong cơ sở B.

Vấn đề: Mối liên hệ giữa các ma trận của tự đồng cấu T trong các cơ sở khác nhau của V?

Ma trận của tự đồng cấu trong các cơ sở

Cho V là một không gian vec-tơ hữu hạn chiều.
Cho B và B' là hai cơ sở của V, và $T : V \to V$ là một tự đồng cấu.
Gọi A và A' tương ứng là ma trận của T trong cơ sở B và B'.
Khi đó ta có

$$A' = C^{-1}AC,$$

với C là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'.
Sơ lược chứng minh:
Ta lần lượt có

$$\begin{aligned}
& B' = BC && \text{(do định nghĩa của } C\text{)} \\
\Rightarrow \quad & T(B') = T(B)C && \text{(do tính tuyến tính của } T\text{)} \\
\Leftrightarrow \quad & T(B') = BAC && \text{(do định nghĩa của } A\text{)} \\
\Leftrightarrow \quad & T(B') = B'C^{-1}AC. && \text{(do định nghĩa của } C\text{)}
\end{aligned}$$

Mặt khác, $T(B') = B'A'$ theo định nghĩa của A', nên ta suy ra

$$A' = C^{-1}AC.$$

Ví dụ

Trong không gian vec-tơ $\mathbb{R}^2$ cho các cơ sở

$$B = \{(-3,2),(4,-2)\}, \qquad B' = \{(-1,2),(2,-2)\}.$$

Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là một ánh xạ tuyến tính với ma trận trong cơ sở B là

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Câu hỏi: Tìm ma trận A' của T trong cơ sở B'.
Trả lời: Gọi C là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'. Bằng cách biến đổi sơ cấp theo hàng

$$[B \vdots B'] \quad \longrightarrow \quad [I_2 \vdots C],$$

ta thu được

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{và do đó} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ma trận của T trong cơ sở B' là

$$A' = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ma trận đồng dạng

- *Định nghĩa:*
  Ma trận $A' \in M_{n,n}$ được gọi là *đồng dạng* với ma trận $A \in M_{n,n}$ nếu tồn tại một ma trận khả nghịch $P \in M_{n,n}$ sao cho $A' = P^{-1}AP$.
- *Tính chất:*
  - Ma trận A đồng dạng với chính nó.
  - Nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B, thì ma trận B cũng đồng dạng với ma trận A.
  - Nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B, và ma trận B đồng dạng với ma trận C, thì ma trận A đồng dạng với ma trận C.
  - Các ma trận của tự đồng cấu $T : V \to V$ trong các cơ sở khác nhau của V đồng dạng với nhau.

Nội dung

Ánh xạ hợp của các ánh xạ tuyến tính

Cho U, V, W là các không gian vec-tơ.
Cho $T_1 : U \to V$ và $T_2 : V \to W$ là các ánh xạ tuyến tính.
Ánh xạ $T : U \to W$ được xác định bởi

$$T(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u})) \qquad \text{voi } \mathbf{u} \in U$$

được gọi là ánh xạ hợp của T_2 va T_1, và được ký hiệu bởi

$$T = T_2 \circ T_1.$$

Tính chất:

- Ánh xạ hợp $T = T_2 \circ T_1$ là một ánh xạ tuyến tính.
- Nếu A_1 và A_2 lần lượt là các ma trận chính tắc của T_1 va T_2, thì $A = A_2A_1$ là ma trận chính tắc của ánh xạ hợp $T = T_2 \circ T_1$.

Ví dụ

Cho các ánh xạ tuyến tính $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ va $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 0, x_1 + x_3), \qquad T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, x_2).$$

Ma trận chính tắc của các ánh xạ T_1 và T_2 lần lượt là

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận chính tắc của ánh xạ hợp $T = T_2 \circ T_1$ là

$$A = A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận chính tắc của ánh xạ hợp $T' = T_1 \circ T_2$ là

$$A' = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Cho V là một không gian vec-tơ hữu hạn chiều.
Nếu $T_1 : V \to V$ và $T_2 : V \to V$ là các ánh xạ tuyến tính thỏa mãn

$$\begin{aligned} T_2(T_1(\mathbf{v})) &= \mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V, \\ T_1(T_2(\mathbf{v})) &= \mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

thì T_2 được gọi là *ánh xạ ngược* của T_1, và T_1 được gọi là *khả nghịch*.
Khi đó ta ký hiệu $T_2 = T_1^{-1}$.

Tính chất:

- Tự đồng cấu tuyến tính $T : V \to V$ là khả nghịch
  $\Leftrightarrow \quad T$ là đẳng cấu.
- Nếu A là ma trận chính tắc của tự đồng cấu tuyến tính $T : V \to V$, thì

  $$T \text{ khả nghịch} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ khả nghịch},$$

  và A^{-1} là ma trận của ánh xạ ngược T^{-1}.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + x_3).$$

Câu hỏi: Chỉ ra rằng T khả nghịch, và tìm ánh xạ ngược của T.
Trả lời: Ma trận chính tắc của T là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A khả nghịch, và nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vậy T khả nghịch, và ánh xạ ngược của T được xác định bởi

$$T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}.$$

Cụ thể là

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, -x_1 + x_3, 6x_1 - 2x_2 - 3x_3).$$

Thank you for your attention!