Giá trị riêng và vec-tơ riêng

Lê Xuân Thanh

Nội dung

1. Không gian riêng của ma trận và tự đồng cấu
2. Chéo hóa ma trận
3. Chéo hóa trực giao
   - Ma trận trực giao
   - Chéo hóa ma trận đối xứng

Nội dung

1. Không gian riêng của ma trận và tự đồng cấu
2. Chéo hóa ma trận
3. Chéo hóa trực giao
   - Ma trận trực giao
   - Chéo hóa ma trận đối xứng

Giá trị riêng, vec-tơ riêng, không gian riêng

Cho $A \in M_{n,n}$, và tự đồng cấu tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$.

Nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ và $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ sao cho

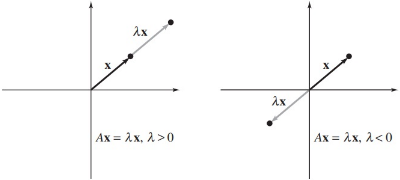
$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

thì λ được gọi là một *giá trị riêng* của ma trận A (hay tự đồng cấu T), và $\mathbf{x}$ được gọi là một *vec-tơ riêng* của ma trận A (hay tự đồng cấu T) tương ứng với λ.

Nếu λ là một giá trị riêng của A, thì tập hợp

$$\{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ là một vec-tơ riêng } A \text{ tương ứng với } \lambda\}$$

được gọi là *không gian riêng* của ma trận A (hay tự đồng cấu T) tương ứng với λ.



Phương pháp tính

Cho A là một ma trận cỡ $n \times n$.
Giả sử λ là một giá trị riêng của A. Khi đó tồn tại $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sao cho

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

hay tương đương

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Do $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, nên ta có

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Phương trình này được gọi là *phương trình đặc trưng* của ma trận A.
Như vậy:

- Giá trị riêng của A là nghiệm λ của phương trình đặc trưng của A.
- Mỗi vec-tơ riêng của A tương ứng với λ là một nghiệm $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ của

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

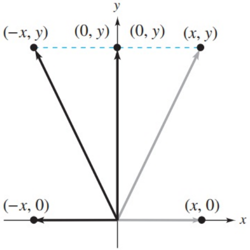
- Không gian riêng của A tương ứng với λ là tập nghiệm của

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ví dụ

Câu hỏi: Tìm các giá trị riêng và không gian riêng tương ứng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Trả lời: Phương trình đặc trưng của A là

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1) = 0.$$

Ta suy ra các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 1$.

- Với $\lambda_1 = -1$, ta có
$$(\lambda_1 I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \ (\text{với } t \in \mathbb{R}).$$
Không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = -1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t & 0 \end{bmatrix}^T : t \in \mathbb{R} \right\}$.
- Với $\lambda_2 = 1$, ta có
$$(\lambda_2 I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \ (\text{với } s \in \mathbb{R}).$$
Không gian riêng tương ứng với $\lambda_2 = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & s \end{bmatrix}^T : s \in \mathbb{R} \right\}$.

Tính chất

Nếu A và B là hai ma trận đồng dạng, thì chúng có cùng các giá trị riêng.

Chứng minh:
Do A và B đồng dạng, nên tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

Theo tính chất của định thức, ta có

$$\begin{aligned}
|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| &= |P^{-1}(\lambda I)P - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\
&= |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\
&= \frac{1}{|P|}|\lambda I - A||P| \\
&= |\lambda I - A|.
\end{aligned}$$

Như vậy A và B có cùng phương trình đặc trưng,
và do đó A và B có cùng các giá trị riêng.

Tính chất

Cho A là một ma trận vuông.
Giả sử $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ là các giá trị riêng đôi một khác nhau của A,
với $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ là các vec-tơ riêng tương ứng.
Khi đó, các vec-tơ $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Quy nạp theo k.

- Với $k = 1$: Do $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, nên $\{\mathbf{v}_1\}$ độc lập tuyến tính.
- Giả sử $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ độc lập tuyến tính. Xét hệ thức

$$c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \qquad (c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}).$$

Nhân A vào hai vế của hệ thức trên, ta nhận được

$$c_1A\mathbf{v}_1 + \ldots + c_kA\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Hệ quả là

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{v}_1 + \ldots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Do $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ độc lập tuyến tính, và $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ đôi một khác nhau, nên ta có

$$c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0.$$

Như vậy $c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, và do $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$, nên $c_k = 0$.
Tóm lại $c_1 = \ldots = c_k = 0$, chứng tỏ $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ độc lập tuyến tính.

Hệ quả

Cho $A \in M_{n,n}$, và tự đồng cấu tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$.

- Nếu A có n giá trị riêng đôi một khác nhau $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,
  và $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ là các vec-tơ riêng tương ứng,
  thì các véc-tơ này lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$.
  Ma trận của T trong cơ sở này là ma trận đường chéo

  $$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

  và hơn nữa, ma trận A đồng dạng với ma trận D.

- Nếu A là ma trận tam giác,
  thì các giá trị riêng của A là các phần tử trên đường chéo của A.

Nội dung

1 Không gian riêng của ma trận và tự đồng cấu

2 Chéo hóa ma trận

3 Chéo hóa trực giao
- Ma trận trực giao
- Chéo hóa ma trận đối xứng

Ma trận chéo hóa được

- Ma trận $A \in M_{n,n}$ được gọi là *chéo hóa được* nếu A đồng dạng với một ma trận đường chéo.

Ví dụ 1: Nếu ma trận $A \in M_{n,n}$ có n giá trị riêng đôi một khác nhau, thì A chéo hóa được.

Ví dụ 2: Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

chéo hóa được vì $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(4, -2, -2)$ với

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính chất

- Nếu ma trận $A \in M_{n,n}$ chéo hóa được, thì A có n vec-tơ riêng độc lập tuyến tính.

Chứng minh:
Do A chéo hóa được, nên tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n). \quad (1)$$

Gọi $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ là các vec-tơ cột của P.
Do P khả nghịch, nên $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ độc lập tuyến tính.
Mặt khác, từ (1) ta có

$$AP = PD,$$

hay cụ thể hơn

$$A\mathbf{p}_i = d_i\mathbf{p}_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Như vậy, $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ là các vec-tơ riêng của A tương ứng với các giá trị riêng $d_1, \ldots, d_n$. Tóm lại, A có n vec-tơ riêng độc lập tuyến tính.

Tính chất

- Nếu ma trận $A \in M_{n,n}$ có n vec-tơ riêng độc lập tuyến tính, thì A chéo hóa được.

Chứng minh:
Giả sử A có n vec-tơ riêng độc lập tuyến tính $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Xét ma trận

$$P = [\mathbf{p}_1 \vdots \ldots \vdots \mathbf{p}_n].$$

Do $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ độc lập tuyến tính, nên P khả nghịch.
Mặt khác, do $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ voi $i = 1, \ldots, n$, nên ta có

$$\begin{aligned} AP &= A[\mathbf{p}_1 \vdots \ldots \vdots \mathbf{p}_n] = [\lambda_1 \mathbf{p}_1 \vdots \ldots \vdots \lambda_n \mathbf{p}_n] \\ &= [\mathbf{p}_1 \vdots \ldots \vdots \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \end{aligned}$$

với $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Như vậy $P^{-1}AP = D$ là một ma trận chéo, tức là A chéo hóa được.

Hệ quả: quy trình chéo hóa ma trận

Bài toán Chéo hóa ma trận:
Cho trước $A \in M_{n,n}$. Tìm một ma trận đường chéo đồng dạng với A.

Cách làm:

- **Bước 1:** Giải phương trình đặc trưng $\det(\lambda I_n - A) = 0$ để tìm các giá trị riêng của A.
- **Bước 2:** Tìm các không gian riêng tương ứng với các giá trị riêng.
- **Bước 3:** Từ các không gian riêng, tìm n vec-tơ riêng độc lập tuyến tính.
- **Bước 4:** Nếu không tồn tại n vec-tơ riêng như vậy, thì kết luận A không chéo hóa được. Ngược lại, chuyển sang Bước 5.
- **Bước 5:** Nếu A có n vec-tơ riêng $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ độc lập tuyến tính, thì kết luận A chéo hóa được, và chỉ ra cụ thể:
  - Ma trận P với các cột là các vec-tơ riêng trên, tức là
    $$P = [\mathbf{p}_1 \vdots \ldots \vdots \mathbf{p}_n].$$
  - Ma trận A đồng dạng với $D = P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo, với các phần tử trên đường chéo là các vec-tơ riêng tương ứng.

Ví dụ

Yêu cầu: Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lời giải:

- Phương trình đặc trưng của A là $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 1)^2 = 0$. Như vậy A có giá trị riêng duy nhất $\lambda_1 = 1$.
- Giải phương trình $(\lambda_1 I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta được

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- Như vậy các vec-tơ riêng của A có dạng $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}$.

  Không có 2 vec-tơ riêng như vậy mà độc lập tuyến tính với nhau, nên A không chéo hóa được.

Ví dụ

Yêu cầu: Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sơ lược lời giải:

- Phương trình đặc trưng của A là

$$\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2 = 0.$$

  Như vậy A có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$.
- Giải các phương trình $(\lambda_i I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ với $i = 1, 2$ ta được:
  - Vec-tơ riêng $\mathbf{p}_1 = (1, 1, 0)^T$ tương ứng với $\lambda_1 = 4$.
  - Các vec-tơ riêng $\mathbf{p}_2 = (1, -1, 0)^T$ và $\mathbf{p}_3 = (0, 0, 1)^T$ ứng với $\lambda_2 = -2$.
- Xét ma trận

$$P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  ta có $\det(P) \neq 0$, tức là các vec-tơ riêng $\mathbf{p}_1$ $\mathbf{p}_2$ $\mathbf{p}_3$ độc lập tuyến tính. Vậy A chéo hóa được, và ta có

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nội dung

1. Không gian riêng của ma trận và tự đồng cấu
2. Chéo hóa ma trận
3. Chéo hóa trực giao
   - Ma trận trực giao
   - Chéo hóa ma trận đối xứng

Định nghĩa ma trận trực giao

- Ma trận $P \in M_{n,n}$ được gọi là *ma trận trực giao* nếu

$$P^{-1} = P^T.$$

Ví dụ: Các ma trận sau đây là ma trận trực giao:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Tính chất

- Ma trận $P \in M_{n,n}$ là ma trận trực giao nếu các vec-tơ cột của P là một hệ vec-tơ trực chuẩn.

Chứng minh: Dựa trên nhận xét

$$P^T P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_n \end{bmatrix},$$

với $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ lần lượt là các vec-tơ cột của P.

Nội dung

1. Không gian riêng của ma trận và tự đồng cấu
2. Chéo hóa ma trận
3. Chéo hóa trực giao
   - Ma trận trực giao
   - Chéo hóa ma trận đối xứng

Chéo hóa ma trận đối xứng bởi ma trận trực giao

Nhắc lại định nghĩa:
Ma trận $A \in M_{n,n}$ được gọi là *ma trận đối xứng* nếu $A = A^T$.

Một số tính chất:
Cho A là một ma trận đối xứng. Ta có:

- Mọi giá trị riêng của A đều là số thực.
- Các vec-tơ riêng của A ứng với các giá trị riêng khác nhau thì trực giao với nhau.
- *A chéo hóa trực giao được*,
  tức là tồn tại một ma trận trực giao P sao cho
  $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

Quy trình chéo hóa trực giao ma trận đối xứng

Bài toán Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng:
Cho trước $A \in M_{n,n}$ là một ma trận đối xứng.
Tìm một ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

Cách làm:

- **Bước 1:** Giải phương trình đặc trưng $\det(\lambda I_n - A) = 0$ để tìm các giá trị riêng của A.
- **Bước 2:** Tìm các không gian riêng tương ứng với các giá trị riêng.
- **Bước 3:**
  - Với không gian riêng có số chiều 1, chọn vec-tơ riêng đơn vị.
  - Với không gian riêng có số chiều ≥ 2, tìm một cơ sở va trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở này để thu được các vec-tơ riêng trực chuẩn với nhau.
- **Bước 4:** Gọi $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ lần lượt là các vec-tơ riêng thu được.

  Ma trận trực giao P cần tìm là $P = [\mathbf{p}_1 \vdots \dots \vdots \mathbf{p}_n]$.
  Ma trận $D = P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo,
  với các phần tử trên đường chéo là các giá trị riêng tương ứng.

Ví dụ

Yêu cầu: Tìm ma trận trực giao P chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sơ lược lời giải:

- Phương trình đặc trưng của A là $\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda+6)(\lambda-3)^2 = 0$. Như vậy A có hai giá trị riêng $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 3$.
- Giải các phương trình $(\lambda_i I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ với $i = 1, 2$ ta được:
    - Vec-tơ riêng $(1, -2, 2)^T$ tương ứng với $\lambda_1 = -6$. Chuẩn hóa vec-tơ riêng này ta được $\mathbf{p}_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$.
    - Các vec-tơ riêng $(2, 1, 0)^T$ và $(-2, 0, 1)^T$ tương ứng với $\lambda_2 = 3$. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ 2 vec-tơ riêng này, ta thu được

$$\mathbf{p}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^T, \qquad \mathbf{p}_3 = \left(\frac{2}{-3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^T.$$

- Ma trận trực giao P cần tìm là

$$P = [\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{-3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Dạng chéo hóa của ma trận A là $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-6, 3, 3)$.

Thank you for your attention!