Định thức của ma trận

Lê Xuân Thanh

Nội dung

Nội dung

Nguồn gốc khái niệm định thức

- Khái niệm định thức nảy sinh từ việc nhận diện các dạng đặc biệt của hệ phương trình tuyến tính.

  Ví dụ: Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

  có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \qquad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

  với điều kiện $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Giá trị

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

  được gọi là định thức của ma trận hệ số $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Nội dung

Phép thế

- Một *phép thế bậc n* là một song ánh

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ví dụ: Ánh xạ $\sigma^* : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ xác định bởi

$$\sigma^*(1) = 2, \quad \sigma^*(2) = 3, \quad \sigma^*(3) = 1$$

là một phép thế bậc 3.

- Phép thế σ bậc n thường được biểu thị dưới dạng

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ví dụ:

- Phép thế σ^* nêu trên có biểu thị $\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- Ánh xạ đồng nhất là phép thế $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

Tập hợp các phép thế

- Tập hợp tất cả các phép thế bậc n được ký hiệu bởi S_n.

Ví dụ: S_3 có 6 phép thế:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét: S_n có $n!$ phần tử.

Phép thế sơ cấp

- Phép đổi chỗ hai phần tử khác nhau $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ và giữ nguyên các phần tử khác được gọi là một *phép thế sơ cấp*.

Ký hiệu:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ 1 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix} = (i, j).$$

Ví dụ:

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3).$$

Tích các phép thế

- Tích $\tau\sigma$ của hai phép thế $\tau, \sigma \in S_n$ là ánh xạ hợp thành

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}.$$

Chú ý:

- Khi viết $\tau\sigma$, phép thế σ tác động trước.
- Có thể mở rộng cho tích của nhiều phép thế.
- Nếu $\tau\sigma = id$, thì τ được gọi là nghịch đảo của σ, ký hiệu: σ^{-1}.

Ví dụ:

- Với $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ và $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ta có

$$\sigma_5\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Nghịch đảo của $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ là $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Dấu của phép thế

- Dấu của phép thế $\sigma \in S_n$ là số sau đây

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Ví dụ: Với phép thế $\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\sigma^*) &= \frac{\sigma^*(1) - \sigma^*(2)}{1-2} \frac{\sigma^*(2) - \sigma^*(3)}{2-3} \frac{\sigma^*(1) - \sigma^*(3)}{1-3} \\ &= \frac{2-3}{1-2} \frac{3-1}{2-3} \frac{2-1}{1-3} = 1.\end{aligned}$$

Nhận xét:

- $\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{+1, -1\}$ $\forall \sigma \in S_n$.
- $\mathrm{sgn}(id) = 1$.
- Phép thế sơ cấp (i, j) có dấu bằng -1.
- $\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\sigma)$ $\forall \tau, \sigma \in S_n$.
- $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

Nội dung

Định nghĩa định thức ma trận

- *Định thức* của ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Chú ý:

- Tổng trên có $n!$ số hạng.
- Khái niệm định thức chỉ áp dụng với các ma trận vuông.
- Định thức của ma trận cỡ $n \times n$ được gọi là *định thức cấp n*.
- Viết $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ thay cho $\left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right|$.

Ví dụ

$$\det(a_{ij})_{n\times n} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

- Định thức cấp 1:

$$\det(a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- Định thức cấp 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Định thức cấp 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Ví dụ số

Bài tập:

- Tính $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.
- Tính $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.
- Tính $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Hệ quả: định thức của ma trận chuyển vị

- Với $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ta có $\det A^t = \det A$.

Chứng minh: Theo định nghĩa định thức, ta có

$$\det A^t = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Xét $\sigma \in S_n$ bất kỳ. Nếu $k = \sigma(j)$, thì $j = \sigma^{-1}(k)$ và $a_{j\sigma(j)} = a_{\sigma^{-1}(k)k}$. Do đó

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n} \qquad \forall\, \sigma \in S_n.$$

Hơn nữa, ta có $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$. Do đó

$$\begin{aligned}\det A^t &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}\\ &= \det A.\end{aligned}$$

Nội dung

Định thức: hàm của các vec-tơ cột

Xét ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Các vec-tơ cột của ma trận A lần lượt là:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ta có thể coi $\det A$ như một hàm của các vec-tơ cột của A:

$$\det A = \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Nội dung

Tính chất đa tuyến tính của định thức

- Định thức ma trận là một hàm tuyến tính với mỗi cột của nó (khi cố định các cột khác).

$$\begin{aligned}&\det(\alpha_1, \ldots, a\alpha_j + b\beta_j, \ldots, \alpha_n)\\ = {}& a\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) + b\det(\alpha_1, \ldots, \beta_j, \ldots, \alpha_n).\end{aligned}$$

Ví dụ minh họa:

$$\begin{aligned}-24 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 5 & -5 & 4 \end{vmatrix} &= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}\\ &= (-1)0 + 4(-6)\\ &= -24\end{aligned}$$

Chứng minh tính chất đa tuyến tính của định thức

Ký hiệu

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \quad \beta_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \det(\alpha_1, \ldots, a\alpha_j + b\beta_j, \ldots, \alpha_n) \\ = & \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots (a a_{\sigma(j)j} + b b_{\sigma(j)j}) \ldots a_{\sigma(n)n} \\ = & \; a \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(j)j} \ldots a_{\sigma(n)n} + b \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots b_{\sigma(j)j} \ldots a_{\sigma(n)n} \\ = & \; a \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) + b \det(\alpha_1, \ldots, \beta_j, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Một số hệ quả

- *Hệ quả 1:* Định thức của ma trận được nhân lên a lần nếu ta nhân một cột của ma trận đó với a.

$$\det(\alpha_1, \dots, a\alpha_j, \dots, \alpha_n) = a \det(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n).$$

Chứng minh: Thay $b = 0$ trong đẳng thức

$$\begin{aligned} &\det(\alpha_1, \dots, a\alpha_j + b\beta_j, \dots, \alpha_n) \\ &= a \det(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) + b \det(\alpha_1, \dots, \beta_j, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Một số hệ quả

- *Hệ quả 2:* Nếu A là ma trận vuông cấp n, thì

$$\det(cA) = c^n \det A \quad \text{với } c \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh: Suy ra từ *Hệ quả 1.*

$$\begin{aligned}\det(cA) &= \det(c\alpha_1, \ldots, c\alpha_n)\\ &= c^n \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\\ &= c^n \det A.\end{aligned}$$

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 25 & -30 & 40 \\ -15 & 5 & 20 \end{vmatrix} = 5^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -6 & 8 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Nội dung

Tính chất thay phiên của định thức

- Nếu ma trận vuông A có hai cột giống nhau, thì $\det A = 0$.

$$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = 0 \quad \text{nếu} \quad \alpha_i = \alpha_j.$$

Ví dụ minh họa:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 3 \\ &\quad - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Chứng minh tính chất thay phiên của định thức

Theo định nghĩa ta có

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(i)i} \dots a_{\sigma(j)j} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Ta ghép các số hạng trong tổng trên thành từng cặp

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(i)i} \dots a_{\sigma(j)j} \dots a_{\sigma(n)n}$$

với $\operatorname{sgn}(\tau_\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(j)i} \dots a_{\sigma(i)j} \dots a_{\sigma(n)n}$,

với $\tau_\sigma = (\sigma(i), \sigma(j))\ \sigma$. Ta thấy:

- $\operatorname{sgn}(\tau_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma(i), \sigma(j))\ \operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$ (do dấu của phép thế sơ cấp bằng -1).
- $a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(i)i} \dots a_{\sigma(j)j} \dots a_{\sigma(n)n} = a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(j)i} \dots a_{\sigma(i)j} \dots a_{\sigma(n)n}$ (do $\alpha_i = \alpha_j$ theo giả thiết, tức là $a_{ki} = a_{kj}$ với $k = 1, \dots, n$).

Vậy $\det A$ là tổng các số hạng đối nhau. Kết quả là $\det A = 0$.

Một số hệ quả

- *Hệ quả 3:* (Tính phản đối xứng của định thức)
  Nếu đổi chỗ hai cột của ma trận thì định thức của nó đổi dấu.

$$\det(\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots) = -\det(\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_i,\ldots).$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned}
0 &= \det(\ldots,\alpha_i+\alpha_j,\ldots,\alpha_i+\alpha_j,\ldots)\\
&= \det(\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_i,\ldots) + \det(\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots)\\
&\qquad + \det(\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_i,\ldots) + \det(\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_j,\ldots)\\
&= 0 + \det(\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots) + \det(\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_i,\ldots) + 0.
\end{aligned}$$

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Một số hệ quả

- *Hệ quả 4:* Nếu $\alpha_i = \sum_{j\neq i} c_j\alpha_j$ với $c_j \in \mathbb{R}$, thì ta có
$$\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) &= \det(\alpha_1, \ldots, \sum_{j\neq i} c_j\alpha_j, \ldots, \alpha_n) \\
&= \sum_{j\neq i} c_j \det(\ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_j, \ldots) \\
&= \sum_{j\neq i} c_j \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

Một số hệ quả

- *Hệ quả 5:* Với $c_j \in \mathbb{R}$ ta có

$$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \sum_{j \neq i} c_j \alpha_j, \dots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n).$$

Chứng minh: Sử dụng *Hệ quả 4* ta có

$$\begin{aligned}
&\det(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \sum_{j \neq i} c_j \alpha_j, \dots, \alpha_n) \\
&= \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \dots, \sum_{j \neq i} c_j \alpha_j, \dots, \alpha_n) \\
&= \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + 0 \\
&= \det(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n).
\end{aligned}$$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Nội dung

Tính chất chuẩn hóa của định thức

- Định thức của ma trận đơn vị bằng 1.

$$\det I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Chứng minh: Ký hiệu $I_n = (e_{ij})_{n \times n}$, ta có

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j, \\ 0 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Theo định nghĩa

$$\det I_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) e_{\sigma(1)1} \dots e_{\sigma(n)n}.$$

Tổng này có đúng một số hạng khác 0 (ứng với $\sigma = id$). Do $\operatorname{sgn}(id) = 1$, nên ta có

$$\det I_n = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1.$$

Một số hệ quả

- *Hệ quả 6:* (Định thức của ma trận đường chéo)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}|I_n| \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

Một số hệ quả

- *Hệ quả 7:* (Định thức của ma trận tam giác trên)

$$|U| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Chứng minh: Theo định nghĩa ta có

$$|U| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Do U là ma trận tam giác trên, nên

- $a_{\sigma(1)1}$ có thể khác 0 $\Leftrightarrow \sigma(1) \leq 1 \Leftrightarrow \sigma(1) = 1$.
- Quy nạp: $a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(i)i}$ có thể khác 0 $\Leftrightarrow \sigma(i) = i$ với $i = 1, \dots, n$.

$\Longrightarrow$ Trong $|U|$, số hạng duy nhất có thể khác 0 ứng với phép thế id.
Do $\operatorname{sgn}(id) = 1$, ta suy ra

$$|U| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Một số hệ quả

- *Hệ quả 8:* (Định thức của ma trận tam giác dưới)

$$|L| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Chứng minh:

- Cách 1: Lập luận tương tự chứng minh *Hệ quả 7*.
- Cách 2: Áp dụng *Hệ quả 7*, chú ý rằng $|L| = |L^t|$ và L^t là ma trận tam giác trên.

Ví dụ minh họa

- $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot 8 \cdot 3 = -192.$
- $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot 8 \cdot 3 = -192.$
- $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -9 & 8 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot 8 \cdot 3 = -192.$

Nội dung

Định thức con bù và phần bù đại số

- *Tư tưởng của phương pháp khai triển Laplace:*
  Tính định thức cấp n thông qua các định thức cấp nhỏ hơn.

- *Định thức con bù* và *phần bù đại số*:

  Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông.
  Xét phần tử a_{ij} (hàng i, cột j).
  Xóa hàng i, cột j của ma trận A, ta nhận được ma trận con B_{ij}.
  Định thức $M_{ij} = \det B_{ij}$ được gọi là *định thức con bù* của a_{ij}.
  Giá trị $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ được gọi là *phần bù đại số* của a_{ij}.

Định thức con bù và phần bù đại số

- *Tư tưởng của phương pháp khai triển Laplace:*
  Tính định thức cấp n thông qua các định thức cấp nhỏ hơn.
- *Định thức con bù* và *phần bù đại số*:

  Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông.
  Xét phần tử a_{ij} (hàng i, cột j).
  Xóa hàng i, cột j của ma trận A, ta nhận được ma trận con B_{ij}.
  Định thức $M_{ij} = \det B_{ij}$ được gọi là *định thức con bù* của a_{ij}.
  Giá trị $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ được gọi là *phần bù đại số* của a_{ij}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Định thức con bù và phần bù đại số

- *Tư tưởng của phương pháp khai triển Laplace:*
  Tính định thức cấp n thông qua các định thức cấp nhỏ hơn.
- *Định thức con bù* và *phần bù đại số*:

  Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông.
  Xét phần tử a_{ij} (hàng i, cột j).
  Xóa hàng i, cột j của ma trận A, ta nhận được ma trận con B_{ij}.
  Định thức $M_{ij} = \det B_{ij}$ được gọi là *định thức con bù* của a_{ij}.
  Giá trị $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ được gọi là *phần bù đại số* của a_{ij}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Định thức con bù và phần bù đại số

- *Tư tưởng của phương pháp khai triển Laplace:*
  Tính định thức cấp n thông qua các định thức cấp nhỏ hơn.

- *Định thức con bù* và *phần bù đại số*:

  Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông.
  Xét phần tử a_{ij} (hàng i, cột j).
  Xóa hàng i, cột j của ma trận A, ta nhận được ma trận con B_{ij}.
  Định thức $M_{ij} = \det B_{ij}$ được gọi là *định thức con bù* của a_{ij}.
  Giá trị $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ được gọi là *phần bù đại số* của a_{ij}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \longrightarrow \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Định thức con bù và phần bù đại số

- *Tư tưởng của phương pháp khai triển Laplace:*
  Tính định thức cấp n thông qua các định thức cấp nhỏ hơn.

- *Định thức con bù* và *phần bù đại số*:

  Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông.
  Xét phần tử a_{ij} (hàng i, cột j).
  Xóa hàng i, cột j của ma trận A, ta nhận được ma trận con B_{ij}.
  Định thức $M_{ij} = \det B_{ij}$ được gọi là *định thức con bù* của a_{ij}.
  Giá trị $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ được gọi là *phần bù đại số* của a_{ij}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \longrightarrow \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Định thức con bù và phần bù đại số

- *Tư tưởng của phương pháp khai triển Laplace:*
  Tính định thức cấp n thông qua các định thức cấp nhỏ hơn.
- *Định thức con bù* và *phần bù đại số*:

  Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông.
  Xét phần tử a_{ij} (hàng i, cột j).
  Xóa hàng i, cột j của ma trận A, ta nhận được ma trận con B_{ij}.
  Định thức $M_{ij} = \det B_{ij}$ được gọi là *định thức con bù* của a_{ij}.
  Giá trị $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ được gọi là *phần bù đại số* của a_{ij}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \longrightarrow C_{ij} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Công thức khai triển Laplace

- *Khai triển định thức theo hàng i:*

$$\det(a_{ij})_{n\times n} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

- *Khai triển định thức theo cột j:*

$$\det(a_{ij})_{n\times n} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}.$$

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4) + 2\cdot 8$$

$$= 14.$$

Công thức khai triển Laplace

- *Khai triển định thức theo hàng i:*

$$\det(a_{ij})_{n\times n} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

- *Khai triển định thức theo cột j:*

$$\det(a_{ij})_{n\times n} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}.$$

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0\cdot(-1) + 3\cdot(-2) + 4\cdot 5$$

$$= 14.$$

Gợi ý khi khai triển định thức

- Nên khai triển định thức theo hàng (cột) có nhiều phần tử 0.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$$

$$= 39.$$

Hệ quả

- *Hệ quả 9:* Nếu ma trận A có một hàng (cột) bằng $\mathbf{0}$, thì

$$\det A = 0.$$

Chứng minh:

- Cách 1: sử dụng định nghĩa định thức ma trận.
- Cách 2: sử dụng *Hệ quả 1*.
- Cách 3: sử dụng công thức khai triển Laplace.

Nội dung

Tác động của các biến đổi sơ cấp lên định thức

- Do $|A^t| = |A|$, nên các tính chất của định thức trên các cột của ma trận cũng đúng khi áp dụng cho các hàng.
- Biến đổi sơ cấp theo hàng vs. định thức ma trận:

Ma trận gốc	Phép biến đổi	Ma trận mới	Mối liên quan	Trích dẫn
A	$d_i \leftrightarrow d_j$	B	$\|B\| = -\|A\|$	Hệ quả 3
A	$c \cdot d_i \to d_i$ $(c \neq 0)$	B	$\|B\| = c\|A\|$	Hệ quả 1
A	$d_i + c \cdot d_j \to d_i$	B	$\|B\| = \|A\|$	Hệ quả 5

Chú ý: Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

- KHÔNG làm thay đổi tập hợp nghiệm của $Ax = b$,
- CÓ THỂ làm thay đổi định thức của ma trận A.

Nhận xét:

- Nếu $A = I_n$, thì B là ma trận cơ bản.
- $|E| \neq 0$ với E là ma trận cơ bản.

Áp dụng các biến đổi sơ cấp tính định thức

Ý tưởng:

- Đưa hầu hết các phần tử trên cùng một hàng (cột) của ma trận về 0 qua các biến đổi sơ cấp.
- Khai triển Laplace theo hàng (cột) có nhiều phần tử 0.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 1\cdot (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -9 & -9 \\ 1 & -6 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 1\cdot (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -9 & -9 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-18) = -54.$$

Nội dung

Định thức của tích các ma trận

- Nếu A và B là các ma trận vuông cấp n, thì $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Chứng minh:

- Khẳng định trên đúng với $A = E$ là ma trận cơ bản.
- Tổng quát:
  $|E_k \cdots E_2 E_1 B| = |E_k| \cdots |E_2||E_1||B|$ với E_i là ma trận cơ bản.
- Trường hợp A khả nghịch:
  Phân tích $A = E_k \cdots E_2 E_1$ là tích các ma trận cơ bản. Ta có

$$\begin{aligned} |AB| &= |E_k \cdots E_2 E_1 B| = |E_k| \cdots |E_2||E_1||B| \\ &= |E_k \cdots E_2 E_1||B| = |A||B|. \end{aligned}$$

- Trường hợp A suy biến:
  - Biến đổi sơ cấp $A \to C$ có một hàng (cột) bằng $\mathbf{0}$, nên $|A| = 0$.
  - A suy biến $\implies$ AB suy biến $\implies$ $|AB| = 0$.
  - Vậy $|AB| = |A||B| = 0$.

Ví dụ

Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |A| &= -7, \\ |B| &= 11, \\ AB &= \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ |AB| &= -77 \ (= |A||B|). \end{aligned}$$

Định thức của ma trận khả nghịch

- Ma trận vuông A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

  Chứng minh:
  - Các ma trận cơ bản có định thức khác 0.
  - A khả nghịch $\Leftrightarrow A = E_k \cdots E_2 E_1$ là tích các ma trận cơ bản.

  $$|A| = |E_k \cdots E_2 E_1| = |E_k| \cdots |E_2||E_1| \neq 0.$$

- Nếu A là ma trận vuông khả nghịch, thì $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

  Chứng minh: Suy ra từ

  $$1 = |I_n| = |A^{-1}A| = |A^{-1}||A|$$

  và $|A| \neq 0$ (do A khả nghịch).

Ví dụ

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |A| &= 4, \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \\ |A^{-1}| &= \frac{1}{4} \ (= |A|^{-1}). \end{aligned}$$

Nội dung

Công thức tường minh tính ma trận nghịch đảo

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ và các phần bù đại số C_{ij}.

- *Ma trận các phần bù đại số* của A là ma trận

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

- *Ma trận phụ hợp* của A là chuyển vị của ma trận nêu trên.

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Nếu A khả nghịch, thì

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A).$$

Chứng minh

Ta cần chỉ ra $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I_n$. Thật vậy:

$$D := A \cdot \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{j1} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \ldots & C_{j2} & \ldots & C_{n2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{jn} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Phần tử hàng i cột j của tích này là

$$D_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \ldots + a_{in}C_{jn}.$$

Nếu $i = j$, thì $D_{ij} = |A|$ (khai triển Laplace theo hàng i của A).
Nếu $i \neq j$, thì $D_{ij} = 0$ (khai triển Laplace theo hàng j của B, với B thu được từ A bằng cách thay hàng j bởi hàng i).
Vậy $D = |A| \cdot I_n$.

Ví dụ

Cho ma trận

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Phần bù đại số tương ứng với các phần tử của A là

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$
$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6, \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$
$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Ma trận phụ hợp của A là

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Do $|A| = 3$, ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Nội dung

Quy tắc Cramer

Xét hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với $|A| \neq 0$.
Thay cột thứ i của ma trận A bởi $\mathbf{b}$, nhận được ma trận A_i.
Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất xác định bởi

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Chứng minh: Vì $|A| \neq 0$, nên A khả nghịch. Do đó

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)\mathbf{b},$$

hay cụ thể hơn

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{j1} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \ldots & C_{j2} & \ldots & C_{n2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{jn} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

tức là với mỗi $i = 1, \ldots, n$ ta có

$$x_i = \frac{1}{|A|}(b_1 C_{1i} + b_2 C_{2i} + \ldots + b_n C_{ni}) = \frac{1}{|A|}|A_i|$$

(đẳng thức cuối cùng dựa trên khai triển Laplace theo cột i của ma trận A_i).

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + \ 3x_3 + 4x_4 &= -3 \\ x_1 + \ x_2 + \ 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + \ x_2 + \ 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Lời giải: Hệ phương trình đã cho có dạng $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng quy tắc Cramer, đặt

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 11 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Theo quy tắc Cramer, hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{28}{-14} = -2, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{-14} = 0,$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-14}{-14} = 1, \quad x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{14}{-14} = -1.$$

Nội dung

Thảo luận

- Nên sử dụng phương pháp nào khi tính định thức?
  - Phương pháp 1: Dùng định nghĩa.
  - Phương pháp 2: Dùng khai triển Laplace.
  - Phương pháp 3: Dùng biến đổi sơ cấp & khai triển Laplace.

- Nên sử dụng phương pháp nào khi tính ma trận nghịch đảo?
  - Phương pháp 1: Dùng biến đổi sơ cấp $[A \mid I_n] \to [I_n \mid A^{-1}]$.
  - Phương pháp 2: Dùng công thức $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

- Nên sử dụng phương pháp nào giải hệ phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
  - Phương pháp 1: Khử Gauss hoặc Gauss-Jordan.
  - Phương pháp 2: Dùng công thức $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
  - Phương pháp 3: Dùng quy tắc Cramer.

Thảo luận

- Nên sử dụng phương pháp nào khi tính định thức?
  - Phương pháp 1: Dùng định nghĩa.
  - Phương pháp 2: Dùng khai triển Laplace.
  - Phương pháp 3: Dùng biến đổi sơ cấp & khai triển Laplace.

- Nên sử dụng phương pháp nào khi tính ma trận nghịch đảo?
  - Phương pháp 1: Dùng biến đổi sơ cấp $[A \mid I_n] \to [I_n \mid A^{-1}]$.
  - Phương pháp 2: Dùng công thức $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

- Nên sử dụng phương pháp nào giải hệ phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
  - Phương pháp 1: Khử Gauss hoặc Gauss-Jordan.
  - Phương pháp 2: Dùng công thức $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
  - Phương pháp 3: Dùng quy tắc Cramer.

Thảo luận

- Nên sử dụng phương pháp nào khi tính định thức?
  - Phương pháp 1: Dùng định nghĩa.
  - Phương pháp 2: Dùng khai triển Laplace.
  - Phương pháp 3: Dùng biến đổi sơ cấp & khai triển Laplace.
- Nên sử dụng phương pháp nào khi tính ma trận nghịch đảo?
  - Phương pháp 1: Dùng biến đổi sơ cấp $[A \mid I_n] \to [I_n \mid A^{-1}]$.
  - Phương pháp 2: Dùng công thức $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.
- Nên sử dụng phương pháp nào giải hệ phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
  - Phương pháp 1: Khử Gauss hoặc Gauss-Jordan.
  - Phương pháp 2: Dùng công thức $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
  - Phương pháp 3: Dùng quy tắc Cramer.

Thank you for your attention!