Lê Xuân Thanh

Nội dung

Nội dung

Khái niệm ma trận

Cho m và n là hai số nguyên dương.
Một **ma trận** cỡ $m \times n$ là một mảng các số thực có dạng

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ghi chú:

- m hàng, n cột.
- a_{ij} là phần tử hàng i cột j.
- Ký hiệu:
  - Có thể viết $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ngắn gọn là $A = [a_{ij}]$.
  - Hoặc có thể viết $A = (a_{ij})_{m\times n}$, ngắn gọn là $A = (a_{ij})$.
  - KHÔNG viết $A = |a_{ij}|_{m\times n}$.
- Một số ví dụ?

Nội dung

Một số ma trận đặc biệt

- Vec-tơ hàng (ma trận cỡ $1 \times n$):

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{bmatrix}.$$

Ghi chú: vec-tơ hàng thứ i của ma trận $[a_{ij}]_{m \times n}$ là

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}.$$

Một số ma trận đặc biệt (tiếp theo)

- Vec-tơ cột (ma trận cỡ $m \times 1$):

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdot \\ c_m \end{bmatrix}.$$

Ghi chú: vec-tơ cột thứ j của ma trận $[a_{ij}]_{m\times n}$ là

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Một số ma trận đặc biệt (tiếp theo)

- Ma trận không:

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Một số ma trận đặc biệt (tiếp theo)

- Ma trận vuông cấp n (tức là cỡ $n \times n$):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ghi chú:
Đường chéo chính của ma trận vuông $[a_{ij}]_{n\times n}$ gồm các phần tử

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}.$$

Một số ma trận đặc biệt (tiếp theo)

- Ma trận đơn vị cấp *n*:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét:

- I_n là một ma trận vuông cỡ $n \times n$.
- Các phần tử trên đường chéo chính của I_n đều bằng 1.
- Các phần tử ngoài đường chéo chính của I_n đều bằng 0.

Một số ma trận đặc biệt (tiếp theo)

- Ma trận đường chéo (cấp n):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ghi chú:

- Ký hiệu: $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$.
- Ma trận đường chéo là một ma trận vuông.
- Các phần tử ngoài đường chéo chính đều bằng 0.

Nội dung

Hai ma trận bằng nhau

- Hai ma trận $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ được gọi là **bằng nhau** nếu
  - chúng có cùng cỡ $(m \times n)$, và
  - $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i = 1, \dots, m$, mọi $j = 1, \dots, n$.
- Tính chất:
  - Cho A, B, C là các ma trận. Nếu $A = B$ và $B = C$, thì $A = C$.
- *Ghi chú:*
  - Cho ví dụ?
  - Định nghĩa hai ma trận khác nhau?
  - Khái niệm **lớn hơn**, **nhỏ hơn** giữa hai ma trận? Không xét.

Nội dung

Chuyển vị ma trận

- Nếu A là một ma trận cỡ $m \times n$ có biểu diễn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

thì ma trận chuyển vị của A là ma trận cỡ $n \times m$ sau đây

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Chuyển vị ma trận (tiếp theo)

- *Ghi chú:*
  - Tương ứng $A \mapsto A^T$ được gọi là phép lấy chuyển vị.
  - Chuyển vị một vec-tơ hàng cỡ $1 \times n$,
    ta nhận được một vector cột cỡ $n \times 1$, và ngược lại.
  - Chuyển vị hàng i của ma trận A,
    ta nhận được cột i của ma trận A^T.
  - Chuyển vị cột j của ma trận A,
    ta nhận được hàng j của ma trận A^T.
  - $(A^T)^T = A$.
  - Ma trận A được gọi là **ma trận đối xứng** nếu $A^T = A$.

Chuyển vị ma trận (tiếp theo)

- *Ghi chú:*
  - Tương ứng $A \mapsto A^T$ được gọi là phép lấy chuyển vị.
  - Chuyển vị một vec-tơ hàng cỡ $1 \times n$, ta nhận được một vector cột cỡ $n \times 1$, và ngược lại.
  - Chuyển vị hàng i của ma trận A, ta nhận được cột i của ma trận A^T.
  - Chuyển vị cột j của ma trận A, ta nhận được hàng j của ma trận A^T.
  - $(A^T)^T = A$.
  - Ma trận A được gọi là **ma trận đối xứng** nếu $A^T = A$.

Chuyển vị ma trận (tiếp theo)

- *Ghi chú:*
  - Tương ứng $A \mapsto A^T$ được gọi là phép lấy chuyển vị.
  - Chuyển vị một vec-tơ hàng cỡ $1 \times n$, ta nhận được một vector cột cỡ $n \times 1$, và ngược lại.
  - Chuyển vị hàng i của ma trận A, ta nhận được cột i của ma trận A^T.
  - Chuyển vị cột j của ma trận A, ta nhận được hàng j của ma trận A^T.
  - $(A^T)^T = A$.
  - Ma trận A được gọi là **ma trận đối xứng** nếu $A^T = A$.

Chuyển vị ma trận (tiếp theo)

- *Ghi chú:*
  - Tương ứng $A \mapsto A^T$ được gọi là phép lấy chuyển vị.
  - Chuyển vị một vec-tơ hàng cỡ $1 \times n$,
    ta nhận được một vector cột cỡ $n \times 1$, và ngược lại.
  - Chuyển vị hàng i của ma trận A,
    ta nhận được cột i của ma trận A^T.
  - Chuyển vị cột j của ma trận A,
    ta nhận được hàng j của ma trận A^T.
  - $(A^T)^T = A$.
  - Ma trận A được gọi là **ma trận đối xứng** nếu $A^T = A$.

Chuyển vị ma trận (tiếp theo)

- *Ghi chú:*
  - Tương ứng $A \mapsto A^T$ được gọi là phép lấy chuyển vị.
  - Chuyển vị một vec-tơ hàng cỡ $1 \times n$, ta nhận được một vector cột cỡ $n \times 1$, và ngược lại.
  - Chuyển vị hàng i của ma trận A, ta nhận được cột i của ma trận A^T.
  - Chuyển vị cột j của ma trận A, ta nhận được hàng j của ma trận A^T.
  - $(A^T)^T = A$.
  - Ma trận A được gọi là **ma trận đối xứng** nếu $A^T = A$.

Chuyển vị ma trận (tiếp theo)

- *Ghi chú:*
  - Tương ứng $A \mapsto A^T$ được gọi là phép lấy chuyển vị.
  - Chuyển vị một vec-tơ hàng cỡ $1 \times n$,
    ta nhận được một vector cột cỡ $n \times 1$, và ngược lại.
  - Chuyển vị hàng i của ma trận A,
    ta nhận được cột i của ma trận A^T.
  - Chuyển vị cột j của ma trận A,
    ta nhận được hàng j của ma trận A^T.
  - $(A^T)^T = A$.
  - Ma trận A được gọi là **ma trận đối xứng** nếu $A^T = A$.

Nội dung

Phép cộng ma trận

- Cho $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là hai ma trận cùng cỡ $m \times n$. Tổng của hai ma trận A và B là

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

- *Ghi chú:*
  - KHÔNG định nghĩa $A + B$ khi A và B khác cỡ.
  - Ma trận tổng $A + B$ có cùng cỡ với ma trận A và B.
  - Phép cộng ma trận có tính chất giao hoán:

$$A + B = B + A.$$

  - Phép cộng ma trận có tính chất kết hợp:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Nội dung

Nhân vô hướng với ma trận

- Cho $A = [a_{ij}]$ là một ma trận cỡ $m \times n$.
  Cho c là một số thực.
  Tích vô hướng của ma trận A với số thực c là

$$cA = [ca_{ij}].$$

- *Ghi chú:*
  - Ma trận cA có cùng cỡ với ma trận A.
  - Nếu $c = 0$, thì $cA = \mathbf{0}_{m \times n}$.
  - Nếu $c = 1$, thì $cA = A$.
  - Khi $c = -1$, ta viết $-A$ thay cho $(-1)A$.
  - Với c, d là các số thực thì

$$(c + d)A = cA + dA.$$
$$c(dA) = (cd)A.$$

Nội dung

Phép trừ ma trận

- Cho $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là hai ma trận cùng cỡ $m \times n$. Hiệu $A - B$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-1)B \\ &= [a_{ij} - b_{ij}]. \end{aligned}$$

- *Ghi chú:*
  - KHÔNG định nghĩa $A - B$ khi A và B khác cỡ.
  - Ma trận hiệu $A - B$ có cùng cỡ với ma trận A và B.

Nội dung

Nhân vec-tơ hàng với vec-tơ cột

- Cho **a** là một vec-tơ hàng (ma trận cỡ $1 \times n$):

$$\mathbf{a} = [a_1 a_2 \ldots a_n].$$

Cho **b** là một vec-tơ cột (ma trận cỡ $n \times 1$):

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Phép nhân *vec-tơ hàng* **a** với *vec-tơ cột* **b**:

$$\mathbf{ab} = [a_1 a_2 \ldots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

- Số phần tử của **a** phải bằng số phần tử của **b**.
- Phép nhân này KHÁC VỚI nhân vec-tơ cột với vec-tơ hàng.

Nhân hai ma trận

- Cho $A = [a_{ij}]$ là một ma trận cỡ $m \times n$.
  Cho $B = [b_{ij}]$ là một ma trận cỡ $n \times p$.
  Tích AB là ma trận $[c_{ij}]$ cỡ $m \times p$, với

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

- *Ghi chú:*
  - Số cột của A phải bằng số hàng của B.
  - Phần tử hàng i cột j của ma trận tích AB $=$ *vec-tơ hàng thứ i của A* nhân với *vec-tơ cột thứ j của B*.
  - Phép nhân ma trận KHÔNG có tính chất giao hoán (nói chung $AB \neq BA$).
  - Phép nhân ma trận CÓ tính chất kết hợp:

$$(AB)C = A(BC).$$

  - Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$, thì ta có

$$I_mA = AI_n = A.$$

Nội dung

Một số tính chất của các phép toán trên ma trận

- Tính chất phân phối
  của phép nhân vô hướng với phép cộng ma trận:
  $$c(A+B) = cA + cB.$$
- Tính chất phân phối
  của phép nhân ma trận với phép cộng ma trận:
  $$A(B+C) = AB + AC,$$
  $$(A+B)C = AC + BC.$$
- Tính chất kết hợp
  của phép nhân vô hướng với phép nhân ma trận:
  $$c(AB) = (cA)B = A(cB).$$

Một số tính chất của các phép toán trên ma trận

- Phép cộng ma trận CÓ tính giản lược:

$$A + B = A + C \implies B = C.$$

- Phép nhân ma trận KHÔNG có tính giản lược:

$$AC = BC \not\Longrightarrow A = B.$$

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Một số tính chất của các phép toán trên ma trận

- Tính chất trung lập của ma trận không:

$$
\begin{aligned}
A + \mathbf{0}_{m\times n} &= A, \\
A + (-A) &= \mathbf{0}_{m\times n},
\end{aligned}
$$

  với A là ma trận cỡ $m \times n$.

- Nếu $cA = \mathbf{0}_{m\times n}$, thì hoặc $c = 0$ hoặc $A = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Một số tính chất của các phép toán trên ma trận

- Một số tính chất của phép chuyển vị ma trận:

$$
\begin{aligned}
(A+B)^T &= A^T + B^T,\\
(cA)^T &= cA^T,\\
(AB)^T &= B^T A^T.
\end{aligned}
$$

Nội dung

Ma trận hệ số

Hệ m phương trình tuyến tính theo n ẩn số

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

có thể được viết dưới dạng

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Tổ hợp tuyến tính

$$
\begin{aligned}
& A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\
\Leftrightarrow \quad & x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},
\end{aligned}
$$

với $\mathbf{a}_j$ là vec-tơ cột thứ j của ma trận A.

Thank you for your attention!