Ma trận nghịch đảo và phân tích LU

Lê Xuân Thanh

Nội dung

1. Nghịch đảo ma trận
   - Ma trận khả nghịch
   - Tính chất của ma trận khả nghịch
   - Phương pháp khử Gauss-Jordan tính ma trận nghịch đảo
   - Áp dụng giải hệ phương trình tuyến tính
2. Ma trận cơ bản
   - Khái niệm
   - Tính chất
   - Phân tích LU của ma trận

Nội dung

Đại số các số thực vs. Đại số các ma trận

	Đại số các số thực	**Đại số các ma trận**
Phép cộng	$a+b=b+a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ $a+0=a$ $a+(-a)=0$	$A+B=B+A$ $(A+B)+C=A+(B+C)$ $A+\mathbf{0}_{m\times n}=A$ $A+(-A)=\mathbf{0}_{m\times n}$
Phép trừ	$a-b=a+(-b)$	$A-B=A+(-B)$
Phép nhân	$ab=ba$ $(ab)c=a(bc)$ $1.a=a.1=a$ $a(b+c)=ab+ac$ $(a+b)c=ac+bc$	$AB\neq BA$ $(AB)C=A(BC)$ $I_mA=AI_n=A$ $A(B+C)=AB+AC$ $(A+B)C=AC+BC$
Phép chia	$aa^{-1}=a^{-1}a=1$	$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

Ma trận khả nghịch

- Một ma trận A cỡ $n \times n$ được gọi là khả nghịch nếu tồn tại một ma trận B cỡ $n \times n$ sao cho

$$AB = BA = I_n,$$

với I_n là ma trận đơn vị cấp n.

- *Ghi chú:*
  - Ma trận khả nghịch là ma trận vuông.
  - Ma trận khả nghịch còn được gọi là ma trận không suy biến.
  - Thế nào là ma trận không khả nghịch (ma trận suy biến)?
  - Ma trận B được gọi là nghịch đảo (nhân tính) của ma trận A.
  - Ví dụ 1: Nghịch đảo của $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ là $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
  - Ví dụ 2: Nếu $ad - bc \neq 0$, thì nghịch đảo của $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Nội dung

1. Nghịch đảo ma trận
   - Ma trận khả nghịch
   - Tính chất của ma trận khả nghịch
   - Phương pháp khử Gauss-Jordan tính ma trận nghịch đảo
   - Áp dụng giải hệ phương trình tuyến tính
2. Ma trận cơ bản
   - Khái niệm
   - Tính chất
   - Phân tích LU của ma trận

Tính chất của ma trận khả nghịch

- Nếu A là ma trận khả nghịch, thì nghịch đảo của A là duy nhất. *Chứng minh.* Giả sử B và C là các nghịch đảo của A. Ta có

$$\begin{aligned} & AB = I_n \\ \Longrightarrow \quad & C(AB) = CI_n \\ \Longrightarrow \quad & (CA)B = C \\ \Longrightarrow \quad & I_nB = C \\ \Longrightarrow \quad & B = C. \end{aligned}$$

- *Ghi chú:*
  - Do tính duy nhất, nghịch đảo của A được ký hiệu là A^{-1}.
  - Tương ứng $A \mapsto A^{-1}$ được gọi là *phép nghịch đảo ma trận*.

Tính chất của ma trận khả nghịch (tiếp theo)

- Nếu A, B là các ma trận khả nghịch thì ta có:
  - $(A^{-1})^{-1} = A$.
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
  - $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$, với $c \neq 0$.
  - $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}$.
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chứng minh: Coi như bài tập.

Tính chất của ma trận khả nghịch (tiếp theo)

- Nếu C là ma trận khả nghịch, thì ta có:
  - $AC = BC \implies A = B$ (tính giản lược phải).
  - $CA = CB \implies A = B$ (tính giản lược trái).

Chứng minh: Tính giản lược phải:

$$
\begin{aligned}
& & AC &= BC \\
&\implies & (AC)C^{-1} &= (BC)C^{-1} \\
&\implies & A(CC^{-1}) &= B(CC^{-1}) \\
&\implies & AI_n &= BI_n \\
&\implies & A &= B.
\end{aligned}
$$

Tương tự với tính giản lược trái.

Nội dung

Ví dụ

Bài toán: Tìm nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

Lời giải: Giải phương trình ma trận $AX = I_2$ với ẩn $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} x_{11} + 4x_{21} & x_{12} + 4x_{22} \\ -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x_{11} + 4x_{21} & = 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} & = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_{12} + 4x_{22} & = 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} & = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Hai hệ phương trình này có chung ma trận hệ số:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \quad \text{và} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Thay vì giải từng hệ, ta có thể giải đồng thời 2 hệ này như sau.

Ví dụ (tiếp theo)

Bước 1: Viết gộp ma trận hệ số và ma trận đơn vị:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Bước 2: Dùng phép khử Gauss-Jordan
đưa ma trận hệ số (vế trái) về ma trận đơn vị:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Bước 3: Ma trận hệ số tự do (vế phải) là ma trận X cần tìm.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bước 4: Kiểm tra lại $AX = XA = I_2$?

Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo

- **Input:** Ma trận A vuông, cấp n.
- **Output:** Ma trận A khả nghịch hay không? Nếu có, tính A^{-1}.
- **Thuật toán:**
  - *Bước 1:* Viết ma trận đơn vị I_n kề bên phải ma trận A.

    $$[A \ \vdots \ I_n].$$

  - *Bước 2:* Dùng phép khử Gauss-Jordan

    đưa ma trận $[A \ \vdots \ I_n]$ về dạng $[I_n \ \vdots \ X]$.

  - *Bước 3:* Kết luận:
    - Nếu *Bước 2* không khả thi, kết luận A suy biến.
    - Nếu *Bước 2* khả thi, kết luận A khả nghịch, và $A^{-1} = X$.

Ví dụ 1

Bài toán: Tìm nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Lời giải: Xuất phát từ ma trận

$$[A \,\vdots\, I_3] = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

lần lượt thực hiện các phép biến đổi

$$d_2 + (-1)d_1 \to d_2, \quad d_3 + 6d_1 \to d_3, \quad d_3 + 4d_2 \to d_3,$$
$$(-1)d_3 \to d_3, \quad d_2 + d_3 \to d_2, \quad d_1 + d_2 \to d_1,$$

kết quả là $\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] = [I_3 \,\vdots\, A^{-1}]$.

Ví dụ 2

Bài toán: Chỉ ra rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ suy biến.

Lời giải: Xuất phát từ ma trận

$$[A \ \vdots \ I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

lần lượt thực hiện các phép biến đổi

$$d_2 + (-3)d_1 \to d_2, \quad d_3 + 2d_1 \to d_3$$

ta được $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & \vdots & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ma trận này không thể chuyển được về dạng $[I_3 \ \vdots \ X]$.

Nội dung

Phương pháp ma trận nghịch đảo giải hệ phương trình tuyến tính

- Nếu A là một ma trận khả nghịch, thì hệ phương trình tuyến tính

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

có nghiệm duy nhất

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Chứng minh: Vì ma trận A^{-1} tồn tại, nên ta có

$$\begin{aligned} & & A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ &\Rightarrow & A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow & I_n\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow & \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

- *Ghi chú:*
  - Chỉ áp dụng cho trường hợp số phương trình bằng số ẩn.
  - Sử dụng nhiều phép tính hơn phương pháp khử Gauss, Gauss-Jordan.
  - Không thích hợp giải hệ phương trình tuyến tính cỡ lớn.

Ví dụ

Bài toán: Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Lời giải: Hệ đã cho có dạng $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, với

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Do $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, nghiệm của hệ là

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Nội dung

Khái niệm ma trận cơ bản

- Các phép biến đổi cơ bản theo dòng trên ma trận:
  - Đổi chỗ hai dòng.
  - Nhân một dòng với một hằng số $c \neq 0$.
  - Cộng bội của một dòng vào một dòng khác.
- Ma trận E cỡ $n \times n$ được gọi là một *ma trận cơ bản* nếu

  $I_n \to E$ bởi một phép biến đổi cơ bản theo dòng.

  Ví dụ: Các ma trận sau là cơ bản.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Khái niệm ma trận cơ bản

- Các phép biến đổi cơ bản theo dòng trên ma trận:
    - Đổi chỗ hai dòng.
    - Nhân một dòng với một hằng số $c \neq 0$.
    - Cộng bội của một dòng vào một dòng khác.
- Ma trận E cỡ $n \times n$ được gọi là một *ma trận cơ bản* nếu

$$I_n \to E \text{ bởi một phép biến đổi cơ bản theo dòng.}$$

Ví dụ: Các ma trận sau KHÔNG cơ bản.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nội dung

Tính chất 1

- Cho A là một ma trận cỡ $m \times n$.
  Với phép biến đổi cơ bản theo dòng $I_m \to E$ ta có $A \to EA$.

  Minh họa:

$$(i)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(ii)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(iii)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tính chất 2

- Nếu E là ma trận cơ bản,
  thì E khả nghịch và E^{-1} cũng là ma trận cơ bản.

  Chứng minh:
  Thực hiện phép biến đổi ngược lại với $I_n \to E$ ta có $I_n \to E^{-1}$.

  Minh họa:
  (i)

$$I_3 \to E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bởi } d_1 \leftrightarrow d_2,$$

$$I_3 \to E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bởi } d_1 \leftrightarrow d_2.$$

Tính chất 2

- Nếu E là ma trận cơ bản,
  thì E khả nghịch và E^{-1} cũng là ma trận cơ bản.

  Chứng minh:
  Thực hiện phép biến đổi ngược lại với $I_n \to E$ ta có $I_n \to E^{-1}$.

  Minh họa:
  (ii)

$$I_3 \to E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{bởi } \frac{1}{2}d_3 \to d_3,$$

$$I_3 \to E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{bởi } 2d_3 \to d_3.$$

Tính chất 2

- Nếu E là ma trận cơ bản,
  thì E khả nghịch và E^{-1} cũng là ma trận cơ bản.

  Chứng minh:
  Thực hiện phép biến đổi ngược lại với $I_n \to E$ ta có $I_n \to E^{-1}$.

  Minh họa:
  (iii)

$$I_3 \to E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bởi } d_3 + (-2)d_1 \to d_3,$$

$$I_3 \to E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bởi } d_3 + 2d_1 \to d_3.$$

Tính chất 3

- Ma trận vuông A khả nghịch $\Leftrightarrow A = E_1 E_2 \dots E_k$, (tích các ma trận cơ bản).

  Chứng minh khẳng định $\Leftarrow$:

  $$A^{-1} = E_k^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}.$$

  Chứng minh khẳng định $\Rightarrow$:

  - $[A \;\vdots\; I_n] \to [I_n \;\vdots\; A^{-1}]$ qua các biến đổi cơ bản theo dòng.
  - Như vậy $A \to I_n$ qua các biến đổi cơ bản theo dòng.
  - Tức là $I_n = F_k \dots F_2 F_1 A$ với F_i cơ bản (theo tính chất 1).
  - Vậy $A = F_1^{-1} F_2^{-1} \dots F_k^{-1}$ là tích các ma trận cơ bản.

Nội dung

Ma trận tam giác dưới và ma trận tam giác trên

- Ma trận vuông L là ma trận tam giác dưới (Lower triangular) nếu mọi phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0.

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

- Ma trận vuông U là ma trận tam giác trên (Upper triangular) nếu mọi phần tử dưới đường chéo chính đều bằng 0.

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

- *Nhận xét:*
  - Ma trận bậc thang theo dòng là ma trận tam giác trên.
  - Tích các ma trận tam giác trên cũng là ma trận tam giác trên.
  - Tích các ma trận tam giác dưới cũng là ma trận tam giác dưới.

Phân tích LU

- (*) Cộng bội của một dòng vào một dòng khác của ma trận.
- Nếu $A \to U$ (ma trận tam giác trên) chỉ bởi các biến đổi (*), thì ta có phân tích

$$\begin{aligned} & E_k \dots E_2 E_1 A = U \\ \Longrightarrow \quad & A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} U \\ \Longrightarrow \quad & A = LU, \end{aligned}$$

với E_i là các ma trận cơ bản, L là ma trận tam giác dưới.

Sử dụng phân tích LU giải hệ phương trình tuyến tính

- *Bài toán:* Giải hệ phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- *Dữ kiện:* Phân tích LU của A.
- *Cách giải:* Lần lượt theo 2 bước sau.
  - Viết $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ và giải $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ theo $\mathbf{y}$.
  - Giải $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ theo $\mathbf{x}$.

Ví dụ

Bài toán: Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -5 \\ x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 10x_2 + 2x_3 &= -20 \end{aligned}$$

Lời giải: Hệ đã cho có dạng $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A có phân tích $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$.

Ví dụ

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -20 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kết luận: Nghiệm của hệ đã cho là $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$.

Thank you for your attention!