

Phép tính tích phân hàm số một biến

Phạm Thành Nam

Nội dung

- Phép đổi biến, công thức tích phân từng phần
- Tích phân các phân thức hữu tỷ
- Tích phân các hàm lượng giác
- Các ứng dụng tích phân
- Tích phân suy rộng
- Khảo sát sự hội tụ tích phân suy rộng

Tích phân các hàm số cơ bản

$$\int 0 dx = C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tg x + C$$

Trực tiếp, Đổi biến

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$$

$$\int \frac{ax + b}{cx + d} dx$$

$$\int \frac{b}{\sqrt{1-y}} dy$$

$$\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$$

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4+x^2} dx$$

$$\int \frac{x - \sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx$$

Trực tiếp, Đổi biến

$$\int e^{-(x^2+1)} x dx$$

$$\int 7^{x^2} x dx$$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int x \cot (x^2 + 1) dx$$

$$\int x \sin (1 - x^2) dx$$

$$\int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \sin 2x dx$$

Trực tiếp, Đổi biến

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$\int x(2x+5)^{10} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Tích phân từng phần

$$\int e^x \cos x \, dx$$

$$\int x \ln x \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx$$

$$\int x \cos 3x \, dx$$

$$\int 3^x \cos x \, dx$$

$$\int (x^2 - 2x + 3) \ln x \, dx$$

$$\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx$$

$$\int x^2 e^{3x} \, dx$$

Tích phân từng phần

$$\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$$

$$\int x \arctan x dx$$

$$\int x \arcsin x dx$$

$$\int e^x \sin x dx$$

$$\int \sin(\ln x) dx$$

Phân thức hữu tỷ, căn thức

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2 - x - 1} dx$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}}$$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$$

Phân thức hữu tỷ, căn thức

$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Tích phân các hàm lượng giác

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

$$\tan \frac{x}{2} = t,$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

Tích phân các hàm lượng giác

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$x = \arctan t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

Tích phân các hàm lượng giác

$$\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$\int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx$$

$$\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$$

$$\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$$

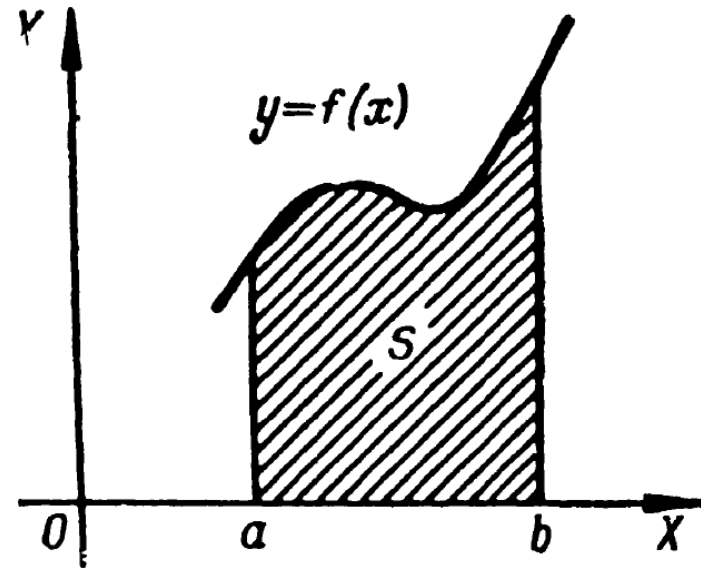
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} dx.$$

Ứng dụng tích phân: Tính diện tích

- Tính diện tích

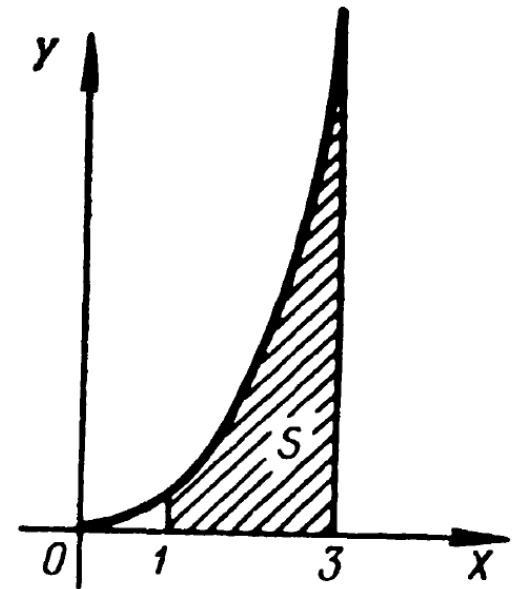
$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



Ứng dụng tích phân: Tính diện tích

- Tính diện tích S giới hạn bởi đường cong $y=x^2/2$ và hai đường thẳng $x=1$ và $x=3$

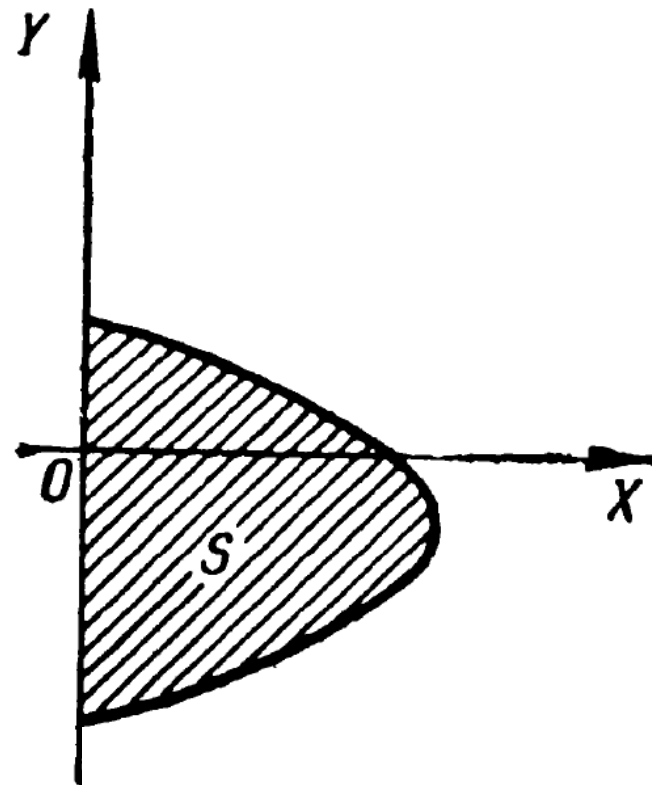
$$S = \int_1^3 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_1^3 = \frac{13}{3}$$



Ứng dụng tích phân: Tính diện tích

- Tính diện tích S giới hạn bởi đường cong

$$x = 2 - y - y^2 \text{ và trục } y$$

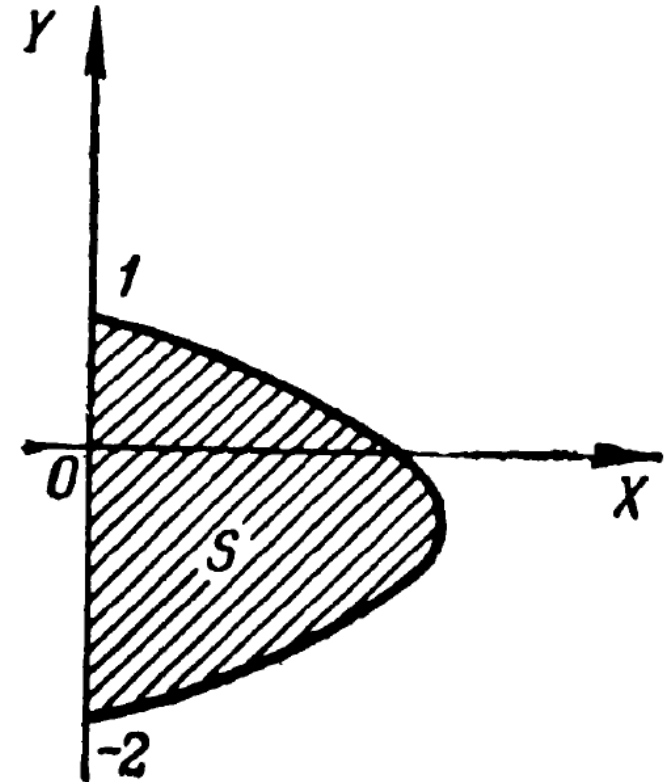


Ứng dụng tích phân: Tính diện tích

- Tính diện tích S giới hạn bởi đường cong

$$x = 2 - y - y^2 \text{ và trục } y$$

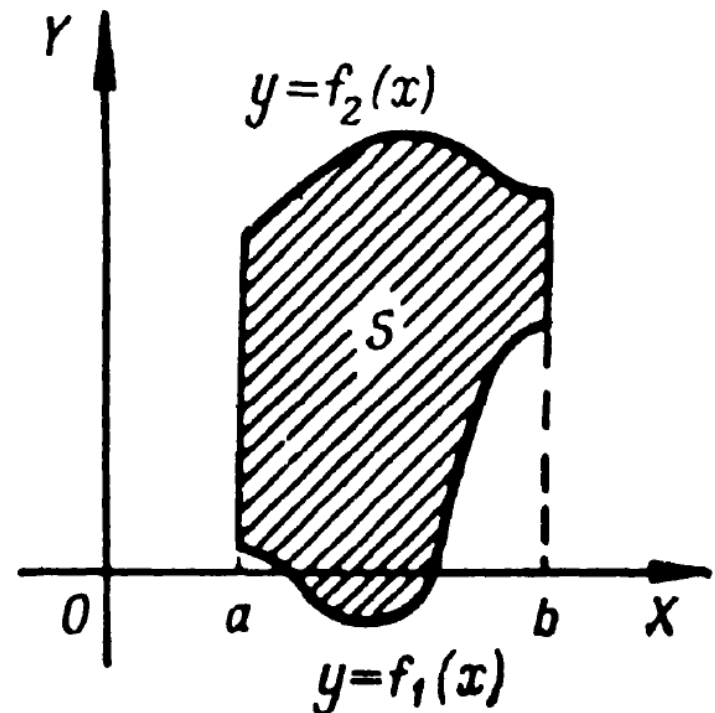
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy \\ &= \left(2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-2}^1 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$



Ứng dụng tích phân: Tính diện tích

- Tính diện tích S giới hạn bởi hai hàm số

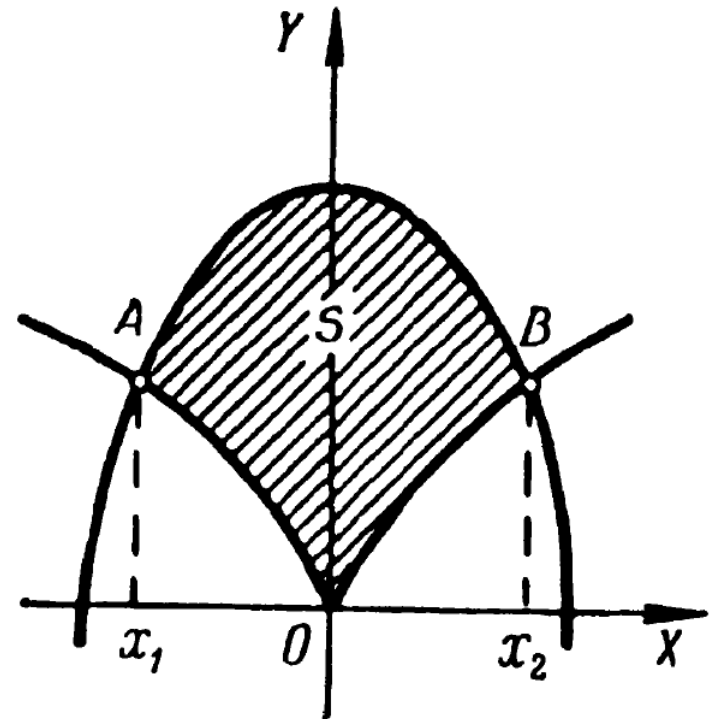
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$



Ứng dụng tích phân: Tính diện tích

- Tính diện tích S giới hạn bởi hai hàm số

$$y = 2 - x^2 \quad \text{và} \quad y^3 = x^2$$

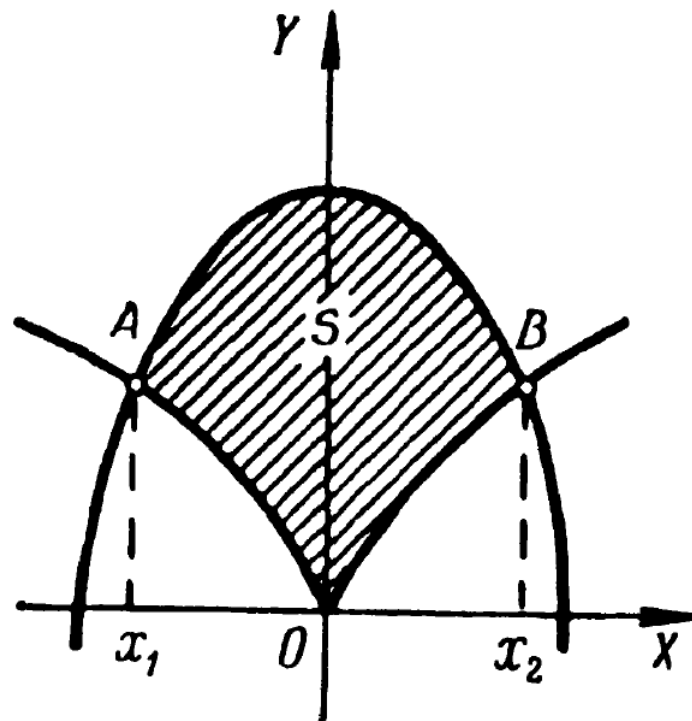


Ứng dụng tích phân: Tính diện tích

- Tính diện tích S giới hạn bởi hai hàm số

$$y = 2 - x^2 \quad \text{và} \quad y^3 = x^2$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^{2/3}) dx \\ &= \left(2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^{5/3} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$



Ứng dụng tích phân: Tính diện tích

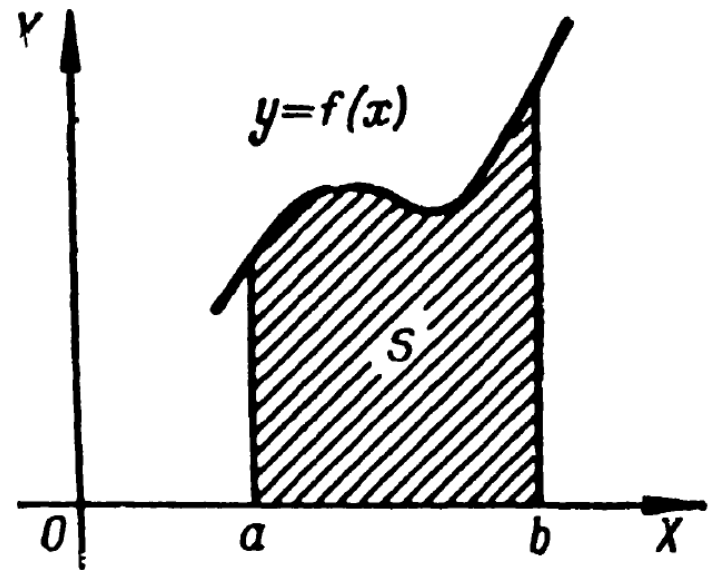
- Tính diện tích S giới hạn bởi đường parabol
 $y = 4x - x^2$ và trục x
- Tính diện tích S giới hạn bởi đường $y = \ln x$
trục x và đường thẳng $x=e$
- Tính diện tích S giới hạn bởi đường
 $y = x(x-1)(x-2)$ và trục x

Ứng dụng tích phân: Tính thể tích

Thể tích vật tròn xoay giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, và $x=a$, $x=b$ quay xung quanh trục Ox và Oy lần lượt là:

$$V_X = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V_Y = 2\pi \int_a^b xy dx$$

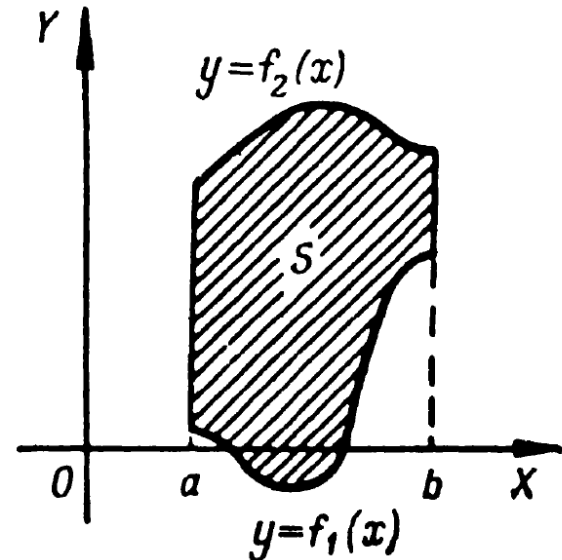


Ứng dụng tích phân: Tính thể tích

Thể tích vật tròn xoay giới hạn bởi các đường cong $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$, và $x=a$, $x=b$ quay xung quanh trục Ox và Oy lần lượt là:

$$V_X = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx$$



Ứng dụng tích phân: Tính thể tích

Cho hình phẳng D giới hạn bởi $\{y = \sqrt{x}, y = x\}$

Tính thể tích khối tròn xoay quay quanh trục hoành V_x

Tính thể tích khối tròn xoay quay quanh trục tung V_y

Ứng dụng tích phân: Tính thể tích

2 đường cong $y_1 = x$ và $y_2 = \sqrt{x}$ giao nhau tại $x_1=0$ và $x_2=1$.
Trong khoảng $[0\ 1]$ thì $y_2 \geq y_1$

Thể tích khối tròn xoay quay quanh trục hoành là:

$$\begin{aligned} V_X &= \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx \\ &= \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Ứng dụng tích phân: Tính thể tích

Thể tích khối tròn xoay quay quanh trục tung là:

$$\begin{aligned} V_Y &= 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x} - x) dx = 2\pi \left(\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

Ứng dụng tích phân: Tính thể tích

1. Tính thể tích khối tròn xoay xác định bởi hình tròn

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad (b > a) \quad \text{quay quanh trục hoành}$$

2. Tính thể tích khối tròn xoay xác định bởi đường cong parabol $y = ax - x^2$ ($a > 0$) và trục x , quay quanh trục hoành

3. Tính thể tích khối tròn xoay xác định bởi đường cong

ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, quay quanh trục hoành

Ứng dụng tích phân: Tính thể tích

1. Diện tích D xác định bởi đường cong $y^2 = 4ax$ và $x = a$. Tính thể tích xác định bởi D quay quanh trục Oy .
2. Cho miền D xác định bởi $y = x^2 - 2x$, trục Oy , và tiếp tuyến tại đỉnh của parabol. Tính thể tích xác định bởi D quay quanh trục Oy .
3. Cho D xác định bởi $\{y = (x - 2)^2, y = 0, x = 0\}$
Tính thể tích xác định bởi D quay quanh trục Oy .

Tích phân suy rộng

- Nếu hàm $f(x)$ không xác định tại $x=c$ với $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

- Nếu $|f(x)| \leq g(x)$ mà $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

- Nếu $|f(x)| > g(x)$ mà $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ

Tích phân suy rộng

- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow c} f(x)|c - x|^m = A \neq \infty, A \neq 0$

$$\Leftrightarrow f(x) \sim \frac{A}{|c - x|^m}$$

- $m < 1$ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ
- $m \geq 1$ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ

Tích phân suy rộng

- Nếu hàm $f(x)$ liên tục trong khoảng $[a, \infty]$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

- Nếu $|f(x)| \leq g(x)$ mà $\int_a^{\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ

- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)x^m = A \neq \infty, A \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \sim \frac{A}{x^m}$

+ $m > 1$: $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ

+ $m \leq 1$: $\int_a^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Tích phân suy rộng

- Ví dụ:
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = \infty$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{phân kỳ}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

Sự hội tụ tích phân suy rộng

- Khảo sát sự hội tụ của $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ (*)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Khi $x \geq 1$ thì $e^{-x^2} < e^{-x}$

Ta có

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx = -\lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-b} - e^{-1}) = e^{-1} \quad \text{hội tụ}$$

Do đó (*) hội tụ

Sự hội tụ tích phân suy rộng

- Khảo sát sự hội tụ của $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$ (*)

Sự hội tụ tích phân suy rộng

- Khảo sát sự hội tụ của $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$ (*)

Khi $x \rightarrow \infty$ ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{x^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{x^{3/2}}}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$$

Do $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ hội tụ nên suy ra (*) cũng hội tụ.

Tích phân suy rộng

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 9} dx$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \cot x \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\int_0^1 x \ln^2 x \, dx$$

Tích phân suy rộng

- Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$$

$$\int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx$$

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$$

Sự hội tụ tích phân suy rộng

Sự hội tụ tích phân suy rộng
