Chuỗi số và chuỗi hàm

Phạm Thành Nam

Nội dung

- Sự hội tụ của chuỗi dương
- Các dấu hiệu hội tụ của chuỗi dương (so sánh, Cauchy và D' Alembert)
- Chuỗi đan dấu, dấu hiệu hội tụ Leibniz
- Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa
- Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

Sự hội tụ của chuỗi dương

- **Chuỗi số**

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

được gọi là hội tụ nếu $\lim_{n\to\infty} S_n$ có giới hạn hữu hạn

với $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$: tổng của chuỗi

$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$: phần dư của chuỗi

Sự hội tụ chuỗi dương

- **Điều kiện cần** để chuỗi (1) hội tụ là

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- **Điều kiện cần và đủ** để chuỗi (1) hội tụ là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N,\ p > 0:$$

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

Sự hội tụ của chuỗi dương

Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát:

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n+1}$$

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

$$u_n = \arctan\frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$u_n = \ln\left(1+\tan\frac{1}{n^2}\right)$$

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Tiêu chuẩn so sánh:

Nếu : $0 \le a_n \le b_n$ **và** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **hội tụ**

thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **cũng hội tụ**

Ngược lại :

Nếu : $0 \le a_n \le b_n$ **và** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **phân kỳ**

thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **cũng phân kỳ**

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Chuỗi số cấp số nhân:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^n \quad (a \neq 0) \qquad \textbf{(2)}$$

Nếu : $|q| < 1$ **chuỗi (2) hội tụ**

$|q| \geq 1$ **chuỗi (2) phân kỳ**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ **Chuỗi điều hòa, phân kỳ**

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát:

$$u_n = \frac{1}{n.2^n}$$

$$u_n = \frac{\ln n}{n}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n^2 + 3\ln n}$$

$$u_n = \frac{2+\cos n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$$u_n = 1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{2n}}$$

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Tiêu chuẩn so sánh:

Nếu : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=C \qquad C\neq\infty, C\neq 0$

thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **và** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ **cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ**

Ví dụ 1: $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}+\ldots$

Ví dụ 2: $\dfrac{1}{2-1}+\dfrac{1}{2^2-2}+\dfrac{1}{2^3-3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-n}+\ldots$

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Tiêu chuẩn D' Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

$q<1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **hội tụ**

$q>1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **phân kỳ**

$q=1$ **?**

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Tiêu chuẩn D' Alembert:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$$

$$\frac{2}{1}+\frac{2.5}{1.5}+\frac{2.5.8}{1.5.9}+\ldots+\frac{2.5.8\ldots(3n-1)}{1.5.9\ldots(4n-3)}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{(2n-1)}{2^n}+\ldots$$

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Tiêu chuẩn D' Alembert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6...(2n)}{n^n}$$

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Tiêu chuẩn Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

$q < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **hội tụ**

$q > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **phân kỳ**

$q = 1$ **?**

Chuỗi Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

hội tụ khi *p*>1 và

phân kỳ khi *p*≤1

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Tiêu chuẩn Cauchy:

Nếu: $a_n = f(n)$

với *f(x)* là hàm đơn điệu giảm, liên tục khi x≥ α ≥0

thì:

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ **cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ**

Các dấu hiệu hội tụ chuỗi dương

Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát:

$$u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n \qquad u_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

$$u_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n \qquad u_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}$$

$$u_n = \left(\frac{2n^2-1}{3n^2+2}\right)^n \qquad u_n = \left(\arctan\frac{1}{n}\right)^n$$

Chuỗi đan dấu

Hội tụ tuyệt đối:

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots. + |a_n| \ldots$

hội tụ tuyệt đối nếu:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ **hoặc** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$

Hội tụ có điều kiện:

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ **hội tụ mà chuỗi** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **phân kỳ**

thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ **hội tụ có điều kiện**

Chuỗi đan dấu

Tiêu chuẩn Leibniz:

Chuỗi $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 - a_2 + ... + a_n - a_{n+1} ... \quad (a_n > 0)$$ **(*)**

Nếu thỏa mãn điều kiện:

$$i)\ a_1 \geq a_2 \geq a_3 ... \geq a_n$$

$$ii)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

thì chuỗi (*) hội tụ

Chuỗi đan dấu

Xét sự hội tụ của các chuỗi:

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2}-\left(\frac{3}{5}\right)^{3}+\left(\frac{4}{7}\right)^{4}+\ldots+\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{n}+\ldots$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Chuỗi đan dấu

Xét sự hội tụ của các chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3.5.7...(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.4.7...(3n-2)}{7.9.11...(2n+5)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2}{(\ln n)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$$

Miền hội tụ chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-b)^n = c_0 + c_1(x-b) + c_2(x-b)^2 .... + c_n(x-b)^n + ...$$

$$(c_n \in \mathbb{R})$$

Miền hội tụ của chuỗi:

$|x-b| < R$ **chuỗi hội tụ tuyệt đối**

$|x-b| > R$ **chuỗi phân kỳ**

$|x-b| = R$ **chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ**

Bán kính hội tụ:

$$R = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \qquad R = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Miền hội tụ chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-b)^n = c_0 + c_1(x-b) + c_2(x-b)^2 .... + c_n(x-b)^n + ...$$

$$(c_n \in \mathbb{R})$$

Miền hội tụ của chuỗi:

Tiêu chuẩn D' Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Tiêu chuẩn Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

Miền hội tụ chuỗi lũy thừa

- Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Miền hội tụ chuỗi lũy thừa

- Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n.5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1).2^n}$$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

- **Khai triển Taylor:**

$$f(x) = f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

- **Phần dư:**

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n+1!}(x-a)^{n+1}$$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

- **Những khai triển Maclaurin**

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

2. $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

3. $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

- **Những khai triển Maclaurin**

4. $$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

4.1 $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

4.2 $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

- **Những khai triển Maclaurin**

5. $$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (-1<x\le 1)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

- Khai triển hàm cosh(x) thành chuỗi lũy thừa của x

$$f^{'}(x) = \sinh(x) \qquad f^{'}(0) = 0$$

$$f^{''}(x) = \cosh(x) \qquad f^{''}(x) = 1$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$f^{2n}(x) = \cosh(x) \qquad f^{2n}(x) = 1$$

$$f^{2n+1}(x) = \sinh(x) \qquad f^{2n+1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots \qquad (*)$$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

- Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 \qquad \forall x$$

- Vậy chuỗi (*) hội tụ trong khoảng $(-\infty < x < \infty)$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

- Khai triển hàm số sau thành chuỗi lũy thừa của x

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

- Ta có: $f(x) = \frac{1}{(1-x)} + \frac{2}{(1+2x)}$

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n \qquad |x| < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] x^n \qquad |x| < \frac{1}{2}$$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

- Khai triển hàm số sau thành chuỗi lũy thừa của x và tìm miền hội tụ của chuỗi

1. $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$
2. xe^{-2x}
3. e^{x^2}
4. $\sinh x$
5. $\cos x^2$
6. $\sin 3x + x\cos 3x$
7. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
8. $\ln(1+x-2x^2)$

Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

1. Khai triển hàm $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ thành chuỗi lũy thừa của $(x+4)$
2. Khai triển hàm $\ln x$ thành chuỗi lũy thừa của (x-1)
3. Khai triển hàm e^x thành chuỗi lũy thừa của (x+2)
4. Khai triển hàm $\sqrt{x}$ thành chuỗi lũy thừa của (x-4)
5. Khai triển hàm $\cos^2(x)$ thành chuỗi lũy thừa của $(x - \frac{\pi}{4})$