

Toán rời rạc

TS. Đỗ Đức Đông

dongdoduc@gmail.com

Đại số Boole (4 tiết)

- Đại số Boole
- Biểu diễn Hàm Boole
- Cổng logic
- Cực tiểu hóa các mạch

Đại số Boole

- Đại số Boole đưa ra các phép toán và quy tắc làm việc với tập $\{0,1\}$
- Các chuyển mạch điện tử có thể được nghiên cứu bằng cách dùng tập này và các quy tắc của đại số Boole.
- Ba phép toán được dùng nhiều nhất:
 - Phép toán lấy phần bù: $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$;
 - Phép toán lấy tổng (ký hiệu + hoặc OR): $0+0=0$; $0+1=1$; $1+0=1$; $1+1=1$;
 - Phép toán lấy tích (ký hiệu . hoặc AND): $0.0=0$; $0.1=0$; $1.0=0$; $1.1=1$;
- Phép lấy phần bù, lấy tổng, lấy tích tương ứng với các toán tử logic phủ định, tuyển, hội, trong đó 1 tương đương với Đúng, 0 tương đương với SAI.

Biểu thức Boole

- Cho $B = \{0,1\}$, biến x được gọi là biến Boole nếu nó nhận giá trị trong B .
- Biểu thức Boole với các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ được định nghĩa đệ quy như sau:
 - $0, 1, x_1, x_2, \dots, x_n$ là biểu thức Boole;
 - Nếu E_1 và E_2 là các biểu thức Boole thì $\overline{E_1}$, $(E_1.E_2)$ và (E_1+E_2) cũng là biểu thức Boole.
- Ví dụ: $1.0 + \overline{(0 + 1)} = 0 + \overline{1} = 0$;

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$x = x$	Luật phần bù kép
$x + x = x$ $x \cdot x = x$	Luật lũy đẳng (idempotent)
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	Luật đồng nhất
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	Luật nuốt
$x + y = y + x$ $xy = yx$	Luật giao hoán
$x + (y+z) = (x+y) + z$ $x(yz) = (xy) z$	Luật kết hợp
$x + yz = (x + y) (x + z)$ $x (y+z) = xy + xz$	Luật phân phối
$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x + y)} = \overline{x} \overline{y}$	Luật De Morgan

Tính đối ngẫu

Đối ngẫu của một biểu thức Boole bằng cách thay các phép toán tổng thành tích, các phép toán tích thành tổng, hằng 0 thành 1, hằng 1 thành 0.

Tìm các đối ngẫu của $x(y + 0)$ và $\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$.

$$x + (y \cdot 1) \text{ và } (\bar{x} + 0)(\bar{y} \cdot z)$$

Một hàng đẳng thức vẫn đúng nếu ta lấy đối ngẫu 2 vế của nó → Giải thích mối quan hệ giữa các [hàng đẳng thức](#) trong mỗi cặp.

Chứng minh sự đúng đắn của luật phân phối $x(y+z) = xy + xz$.

x	y	z	$y+z$	xy	xz	$x(y+z)$	$xy + xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Một hàm từ B^n tức là từ tập $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in B\}$ tới $B = \{0, 1\}$, được gọi là hàm Boole bậc n . Hàm Boole được cho trong các bảng hoặc bằng biểu thức tạo bởi các biến và phép toán Boole.

Ví dụ: $F(x, y, z) = xy + \bar{z}$

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$F(x, y, z) = xy + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Hai hàm được n biến F và G được gọi là bằng nhau nếu $F(b_1, b_2, \dots, b_n) = G(b_1, b_2, \dots, b_n)$ với mọi $b_1, b_2, \dots, b_n$ thuộc B . Hai biểu thức được gọi là tương đương nếu hai hàm biểu được biểu diễn bằng hai biểu thức tương ứng bằng nhau.

$$\overline{F(x_1, \dots, x_n)} = \overline{F(x_1, \dots, x_n)}.$$

$$(F + G)(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) + G(x_1, \dots, x_n)$$

$$(FG)(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) G(x_1, \dots, x_n).$$

Biểu diễn các hàm Boole

Giải quyết hai bài toán:

- Cho giá trị của một hàm Boole, làm thế nào tìm được biểu thức Boole biểu diễn hàm đó?
- Liệu có thể dùng một tập hợp nhỏ hơn các toán tử để biểu diễn các hàm Boole hay không?

Hai bài toán này có tầm quan trọng trong thiết kế mạch.

Tìm biểu thức Boole biểu diễn hàm $F(x,y,z)$ và $G(x,y,z)$ cho trong bảng dưới đây

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

$$F(x,y,z) = x\bar{y}z$$

$$G(x,y,z) = xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

ĐỊNH NGHĨA 1. Một biến Boole hoặc phần bù của nó được gọi là một *tục biến*. Tích Boole $y_1 y_2 \dots y_n$ trong đó $y_i = x_i$ hoặc $y_i = \bar{x}_i$ với $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các biến Boole được gọi là một *tiểu hạng* (minterm). Do đó, tiểu hạng là tích của n tục biến.

→ Bằng cách lấy tổng Boole của các tiểu hạng phân biệt chúng ta có thể lập được biểu thức Boole với tập giá trị đã cho trước.

Tổng các tiểu hạng biểu diễn hàm được gọi là khai triển tổng các tích hay dạng tuyến chuẩn tắc.

Tìm khai triển tổng các tích của hàm $F(x,y,z) = (x + y) \bar{z}$

$$F(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

Tính đầy đủ

- Tập hợp $\{.,+,-\}$ được gọi đầy đủ vì mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn bằng cách dùng các phép toán $.,+,-$.
- Liệu có một tập hợp các phép toán khác nhỏ hơn mà vẫn đầy đủ?
- Có thể loại bỏ phép $+$ bằng cách dùng De Morgan: $x + y = \overline{\overline{x} \overline{y}}$
- Như vậy tập $\{.,-\}$ và tập $\{+,-\}$ cũng là tập đầy đủ, còn $\{.,+\}$ thì không là tập đầy đủ.
- Liệu có một tập hợp chỉ gồm 1 phép toán mà vẫn đầy đủ?

$$1 \mid 1 = 0, 1 \mid 0 = 0 \mid 1 = 0 \mid 0 = 1$$

$$\overline{x} = x \mid x$$

$$1 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 0, 0 \downarrow 0 = 1.$$

$$xy = (x \mid y) \mid (x \mid y)$$

Tìm khai triển tổng các tích của các hàm Boole

$$\text{a) } F(x,y) = \bar{x} + y$$

$$\text{b) } F(x,y) = x\bar{y}$$

$$\text{c) } F(x,y) = 1$$

$$\text{d) } F(x,y) = \bar{y}$$

Tìm khai triển tổng các tích của các hàm Boole

a) $F(x,y,z) = x + y + z$

b) $F(x,y,z) = (x + z) y$

c) $F(x,y,z) = x$

d) $F(x,y,z) = x \bar{y}$

Tìm khai triển tổng các tích của hàm Boole $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ biết rằng F nhận giá trị 1 nếu và chỉ nếu ba hoặc nhiều hơn các biến x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 có giá trị 1.

Biểu diễn các hàm Boole sau bằng cách dùng các phép toán $.$ và $\bar{}$:

a) $x + y + z$

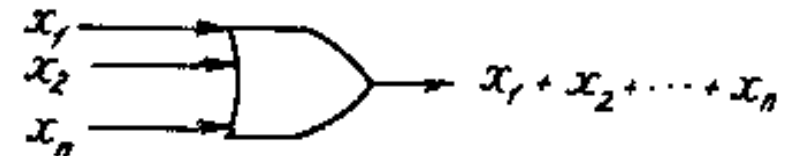
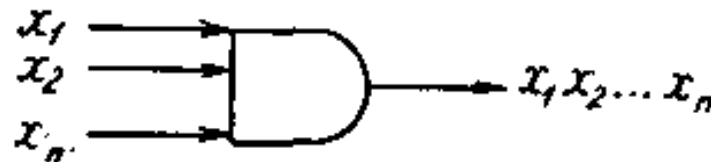
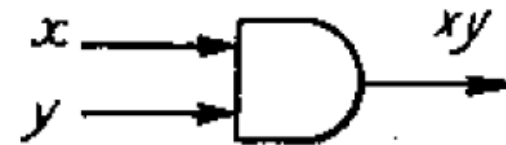
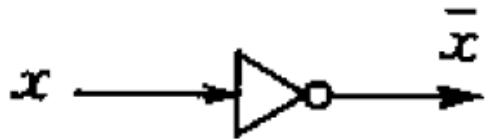
b) $x + \bar{y}(\bar{x} + z)$

c) $\overline{(x + \bar{y})}$

d) $\bar{x}(x + \bar{y} + \bar{z})$

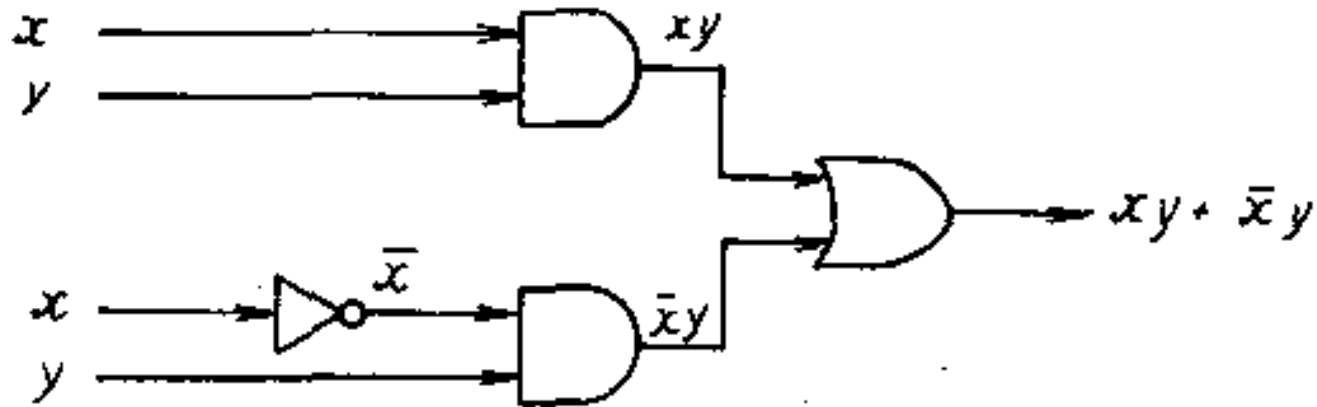
Các cổng logic

- Đại số Boole dùng để mô hình hóa sơ đồ các mạch trong các dụng cụ điện tử;
- Mỗi đầu vào và mỗi đầu ra là một phần tử thuộc tập $\{0,1\}$
- Các phần tử cơ bản của các mạch được gọi là các cổng, mỗi loại cổng thực hiện một phép toán Boole;
- Xây dựng các mạch bằng cách sử dụng 3 loại phần tử: Bộ đảo (lấy phần bù), cổng OR (lấy tổng), cổng AND (lấy tích).



Tổ hợp các cổng

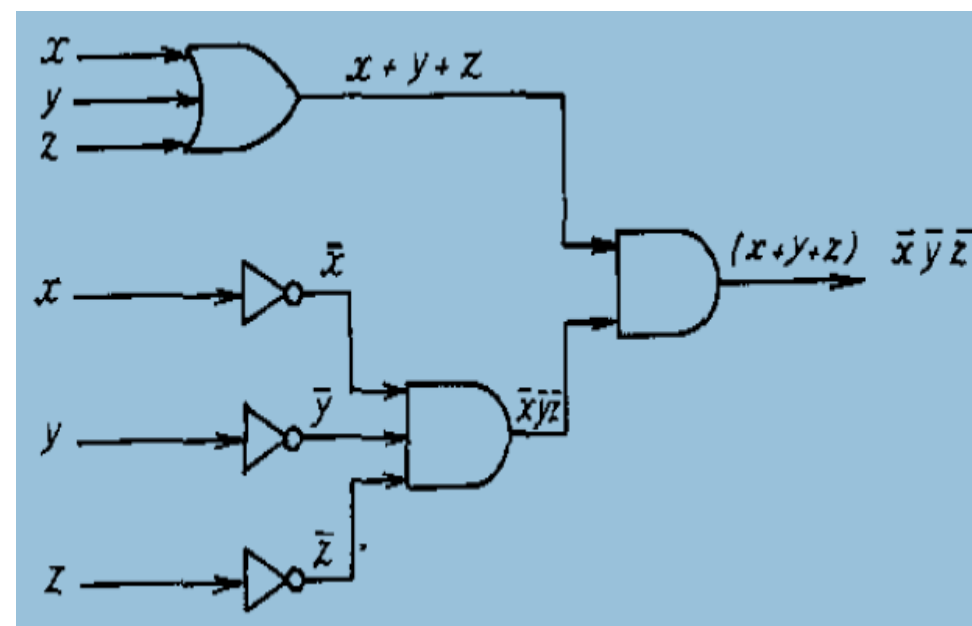
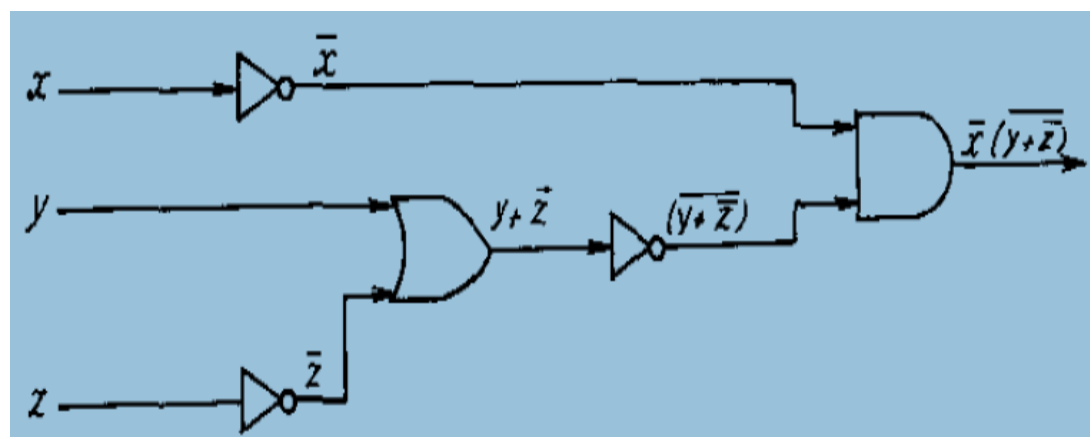
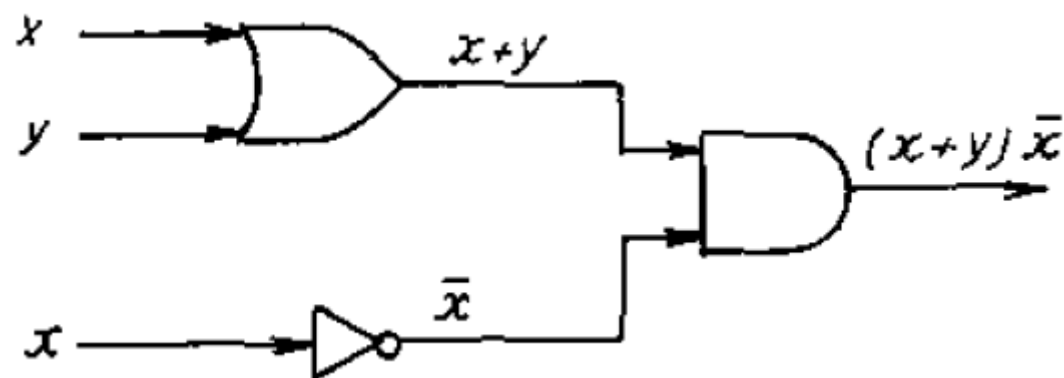
- Các mạch tổ hợp có thể xây dựng bằng cách dùng tổ hợp các bộ đảo, các cổng OR và AND.
- Ví dụ: $xy + \bar{x}y$



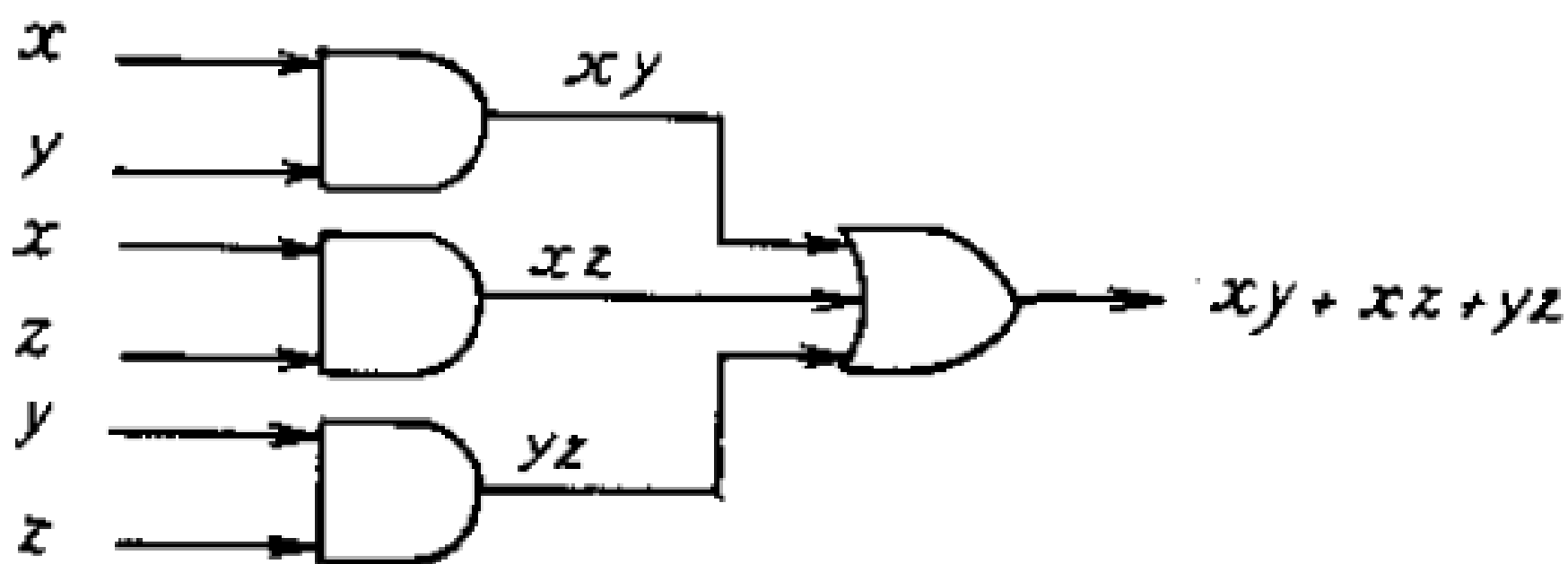
Dựng các mạch tạo các đầu ra sau :

(a) $(x + y)\bar{x}$;

(b) $\bar{x}(\overline{y + \bar{z}})$ và (c) $(x + y + z) (\bar{x} \bar{y} \bar{z})$



Một ủy ban gồm ba thành viên phải quyết định các vấn đề của một tổ chức. Mỗi một thành viên bỏ phiếu tán thành hoặc không cho mỗi một đề nghị được đưa ra. Một đề nghị sẽ được thông qua nếu nó nhận được ít nhất hai phiếu tán thành. Hãy thiết kế một mạch cho phép xác định được một đề nghị có được thông qua hay không.

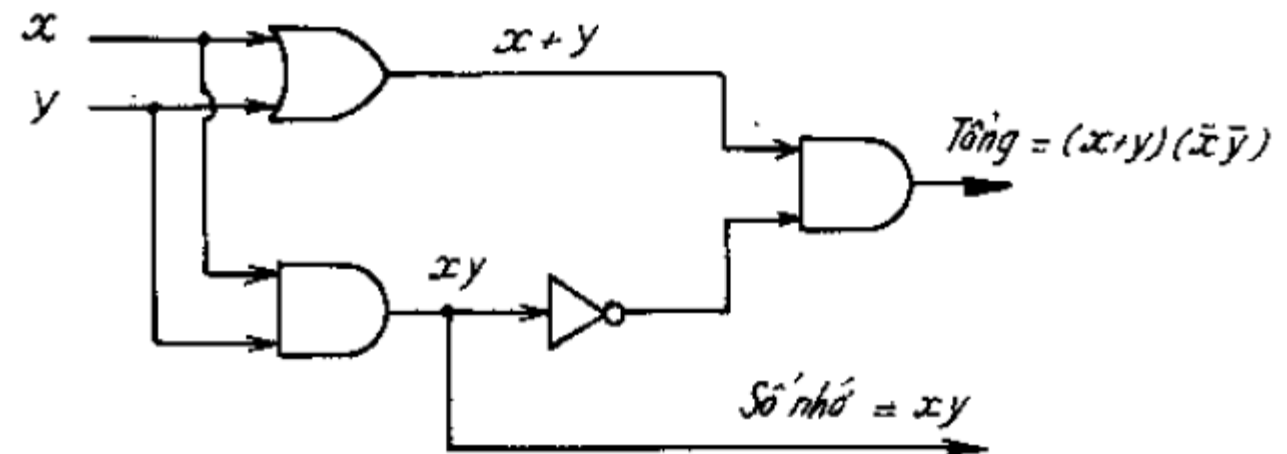


Bộ cộng (1)

Thiết kế mạch logic cộng hai số nguyên không âm được biểu diễn dưới dạng số nhị phân.

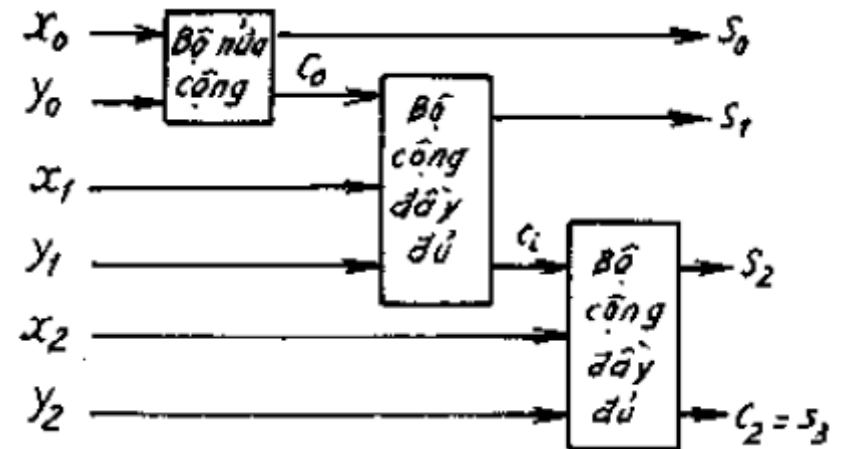
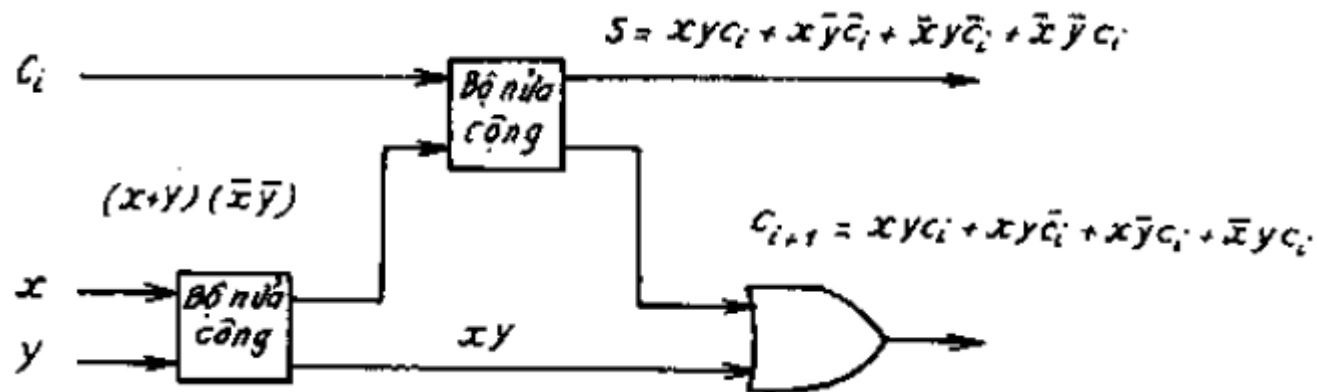
Bộ nửa cộng (cộng 2 bit): đầu vào là 2 bit x, y , đầu ra gồm 2 bit s, c trong đó s là bit tổng, c là bit nhớ.

x	y	s	c
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0



Bộ cộng (2)
Thiết kế mạch
logic cộng hai số
nguyên không âm
được biểu diễn
dưới dạng số nhị
phân.

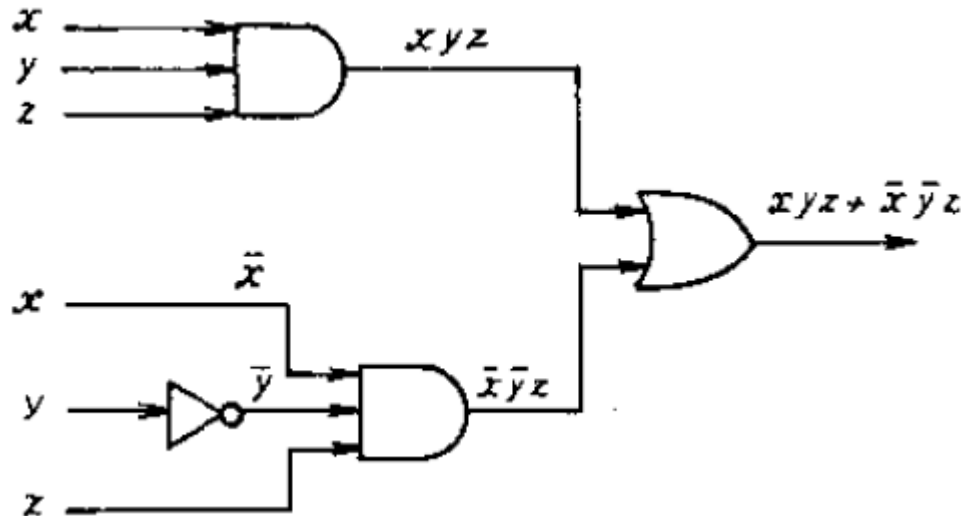
Đầu vào			Đầu ra	
x	y	c_i	s	c_{i+1}
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0



Cực tiểu hóa các mạch

- Hiệu quả của một mạch tổ hợp phụ thuộc vào số các cổng và sự bố trí của các cổng đó.
- Luôn có thể khai triển tổng các tích để tìm tập các cổng logic → có nhiều tiểu hạng → tổ hợp lại.
- Ví dụ:

$$\begin{aligned}xyz + x \bar{y} z &= (y + \bar{y})xz \\&= 1.xz \\&= xz.\end{aligned}$$



Bản đồ Karnaugh hai biến (1)

- Có 4 tiểu hạng có thể trong khai triển tổng các tích

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

- Đánh dấu các tiểu hạng có mặt trong tổng các tích vào bảng
- Ví dụ:

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

(a) $xy + \bar{x}y$

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	

(b) $x\bar{y} + \bar{x}y$ và

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

(c) $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

Bản đồ Karnaugh hai biến (2)

- Nhận dạng các tiểu hạng có thể tổ hợp từ bản đồ Karnaugh
- Bất cứ hai ô nào kề nhau chứa số 1 thì đều có thể tổ hợp lại thành một tích chỉ có 1 biến.

(a) $xy + \bar{x}y$

(b) $x\bar{y} + \bar{x}y$

(c) $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

a)

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	

b)

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

c)

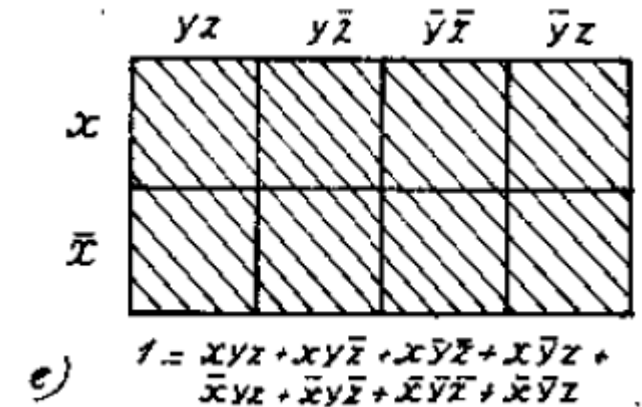
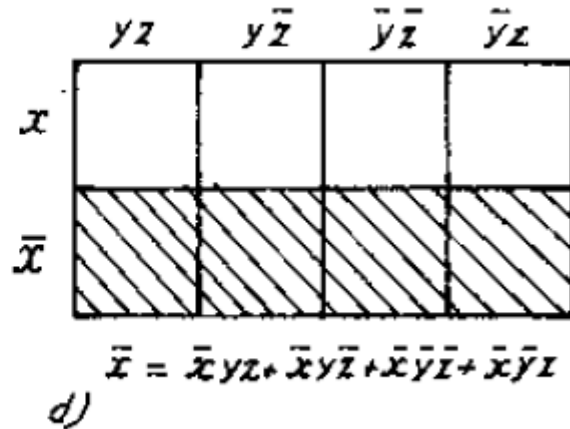
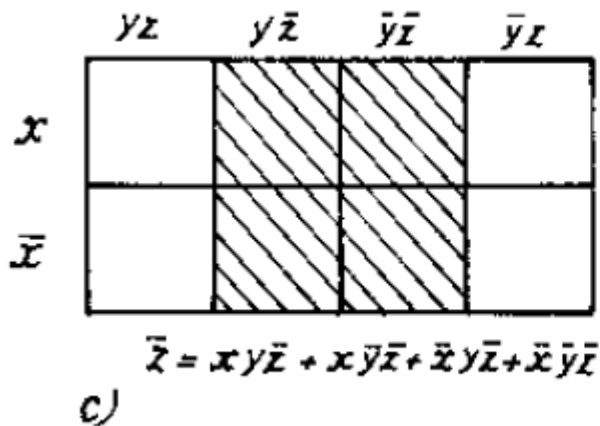
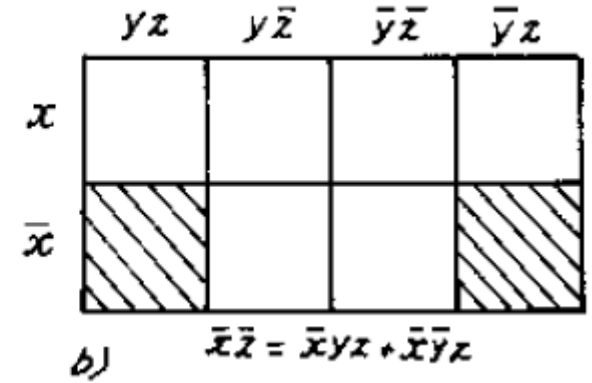
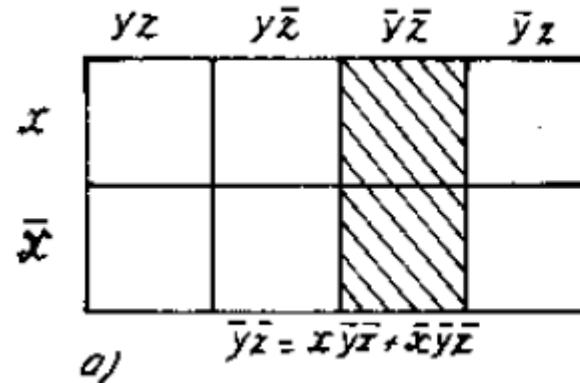
(a) y

(b) $x\bar{y} + \bar{x}y$

(c) $\bar{x} + \bar{y}$

Bản đồ Karnaugh ba biến

- Tạo bản đồ các tiểu hạng
- Thu gọn theo các trường hợp



$$a) \quad xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \quad ,$$

$$b) \quad x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

$$c) \quad xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

a)

$$a) \quad x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

b)

$$b) \quad \bar{y} + \bar{x}z$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

c)

$$c) \quad x + \bar{y} + z.$$

Dùng bản đồ Karnaugh để tìm khai triển cực tiểu các hàm sau

a) $x\bar{y}$

b) $xy + \bar{x}\bar{y}$

c) $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

Dùng bản đồ Karnaugh để tìm khai triển cực tiểu các hàm sau

a) $\bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

b) $xy + x\bar{y}$

c) $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$.

Dùng bản đồ Karnaugh để tìm khai triển cực tiểu các hàm sau

a) $\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

b) $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

c) $xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

d) $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$