

# Đếm các phần tử

- Các nguyên lí cơ bản
- Hoán vị và tổ hợp
- Hệ số nhị thức
- Nguyên lý lồng chim bồ câu
- Thuật toán chia để trị
- Thuật toán quy hoạch động

# Lý thuyết tổ hợp

Lý thuyết tổ hợp là một phần quan trọng của toán rời rạc, chuyên nghiên cứu sự sắp xếp các đối tượng.

- Liệt kê, đếm các đối tượng có những tính chất nào đó. Đếm các phần tử xuất hiện nhiều trong toán học cũng như tin học, được dùng để giải quyết nhiều vấn đề cũng như được dùng nhiều khi tính xác suất của các biến cố.

Ví dụ, cần đếm số cách khác nhau đặt mật khẩu thỏa mãn các điều kiện: Độ dài ít nhất 6 ký tự và không vượt quá 8 ký tự và mỗi ký tự lấy từ tập  $['0'..'9', 'a'..'z']$

- Tạo ra một cách sắp xếp các đối tượng thỏa mãn tính chất nào đó.

Ví dụ, xây dựng thời khóa biểu, lịch thi, hay phương án sản xuất,...

# Các nguyên lí cơ bản của phép đếm (1)

## Quy tắc cộng

- Quy tắc cộng: Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng  $n_1$  cách, việc thứ hai có thể làm bằng  $n_2$  cách, khi đó có  $n_1 + n_2$  cách làm một trong hai công việc đó.
- Ví dụ: Cần chọn một đại biểu là nam sinh viên có điểm trung bình từ 8.0 trở lên hoặc là nữ sinh viên có điểm trung bình từ 7.5 trở lên. Biết rằng có 20 sinh viên nam thỏa mãn tiêu chuẩn, 25 nữ sinh viên thỏa mãn tiêu chuẩn. Như vậy có  $20 + 25$  cách chọn đại biểu.
- Quy tắc này có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau: Nếu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

# Các nguyên lí cơ bản của phép đếm (2)

## Quy tắc nhân

- Quy tắc nhân: Giả sử có một nhiệm vụ được tách ra làm hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng  $n_1$  cách, việc thứ hai có thể làm bằng  $n_2$  cách, khi đó có  $n_1 \times n_2$  cách làm nhiệm vụ đó.
- Ví dụ: Cần chọn hai đại biểu, một là nam sinh viên có điểm trung bình từ 8.0 trở lên và một là nữ sinh viên có điểm trung bình từ 7.5 trở lên. Biết rằng có 20 sinh viên nam thỏa mãn tiêu chuẩn, 25 nữ sinh viên thỏa mãn tiêu chuẩn. Như vậy có  $20 \times 25$  cách chọn đại biểu.
- Quy tắc này có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau: Chọn một phần tử của tích Đề-các  $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$  được tiến hành bằng cách chọn lần lượt từng phần tử của  $A_1$ , một phần tử của  $A_2$ , ..., một phần tử của  $A_n$ .

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

# Các nguyên lí cơ bản của phép đếm (3)

## Ví dụ

1) Đếm số cách khác nhau đặt mật khẩu thỏa mãn các điều kiện sau:

- ✓ Độ dài ít nhất 6 ký tự và không vượt quá 8 ký tự;
- ✓ Mỗi ký tự lấy từ tập ['0'..'9','a'..'z']

2) Hãy cho biết biến k nhận giá trị bằng bao nhiêu sau khi chạy từng đoạn chương trình dưới đây:

```
1 k = 0;
2 for (int i=1; i<=123; i++)
3     k++;
4 for (int i=1; i<=111; i++)
5     k++;
```

```
1 k = 0;
2 for (int i=1; i<=12; i++)
3     for (int i=1; i<=11; i++)
4         k++;
```

# Cở sở của phép đếm (4)

## Nguyên lý bù trừ

- Quy tắc cộng có thể dẫn đến trùng lặp vì một số trường hợp bị tính hai lần. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ, ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm bị tính hai lần → nguyên lý bù trừ.
- Ví dụ: đếm số lượng xâu nhị phân độ dài 8, bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00.

128 (số xâu bắt đầu bằng 1) + 64 (số xâu kết thúc 00) – 32 (số xâu bắt đầu bằng 1 và kết thúc 00) = 160

- Theo nguyên lý tập hợp:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Trong một trường đại học có 18 sinh viên toán và 325 sinh viên tin học.

- a) Có bao nhiêu cách chọn hai đại diện sao cho một là sinh viên toán còn người kia là sinh viên tin học?
- h) Có bao nhiêu cách chọn một đại diện hoặc là sinh viên toán hoặc là sinh viên tin học?

Từ New York tới Denver có 6 hãng hàng không và có 7 hãng bay từ Denver tới San Francisco. Có bao nhiêu khả năng khác nhau để bay từ New York đến San Francisco qua Denver? .

Một phiếu trắc nghiệm đa lựa chọn gồm 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.

- a) Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu mọi câu hỏi đều được trả lời?
- h) Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu có thể bỏ trống.

Từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số chia hết cho 6 hoặc chia hết cho 9?

# Hoán vị và chỉnh hợp

- **Hoán vị** của một tập các đối tượng khác nhau là một cách sắp xếp có thứ tự của các đối tượng này.
- Một cách sắp xếp có thứ tự  $r$  ( $r \leq n$ ) phần tử của  $n$  phần tử được gọi là một **chỉnh hợp chập  $r$  của  $n$  phần tử**. Hoán vị là một trường hợp đặc biệt khi  $r = n$ .
- Cho  $S = \{1,2,3\}$ . Cách sắp xếp  $(3,1,2)$  là một hoán vị của  $S$ , còn cách xếp  $(3,1)$  là một chỉnh hợp chập 2 của  $S$ .
- Định lý: Số chỉnh hợp chập  $r$  của  $n$  phần tử
$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$
$$P(n, n) = n!$$
- Ví dụ: Có 3 người A, B, C xếp vào 3 chỗ ngồi thì có  $3!=6$  cách xếp, các cách đó là ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

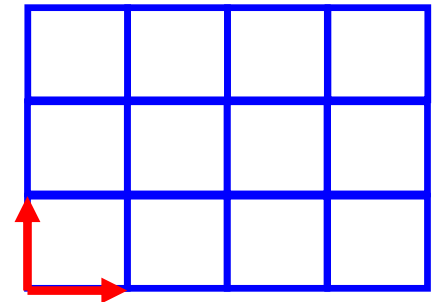
Có bao nhiêu cách xếp 8 người ngồi quanh một bàn tròn, hai cách ngồi được gọi là giống nhau nếu cách này có thể nhận được từ cách kia bằng cách xoay bàn.

# Tổ hợp

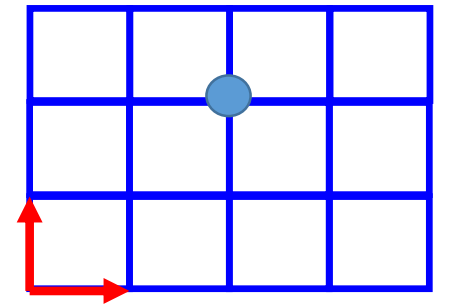
- Một tổ hợp chập  $r$  của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự  $r$  phần tử của tập đã cho
- Cho  $S = \{1,2,3,4,5\}$ . Khi đó  $\{1,3,4\}$  là một tổ hợp chập 3 của  $S$ .
- $$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
- $$C(n, r) = C(n, n - r)$$

Ví dụ 1: Chọn ngẫu nhiên 2 người trong 3 người A, B, C. Có  $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$ , các cách đó là AB, AC, BC

Ví dụ 2: Đếm số đường đi từ góc trái dưới lên góc phải trên, mỗi lần di chuyển lên trên hoặc di chuyển sang phải.



- Có bao nhiêu cách lấy ra 5 quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 quân sao cho trong 5 quân bài lấy ra có 3 quân Át và 2 quân 10.
- Đếm số đường đi từ góc trái dưới lên góc phải trên, mỗi lần di chuyển lên trên hoặc di chuyển sang phải và đi qua điểm điểm tròn.



Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

- a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực?
- b) Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ?

# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

## Hoán vị có lặp (chỉnh hợp lặp)

- Tính xác suất lấy liên tiếp 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả bóng đỏ và 7 quả bóng xanh, nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại bỏ nó trở lại bình.

→  $5^3 / 12^3$  (lấy mẫu có hoàn lại)

- Định lý: Số chỉnh hợp lặp chập  $r$  của  $n$  phần tử bằng  $n^r$ .

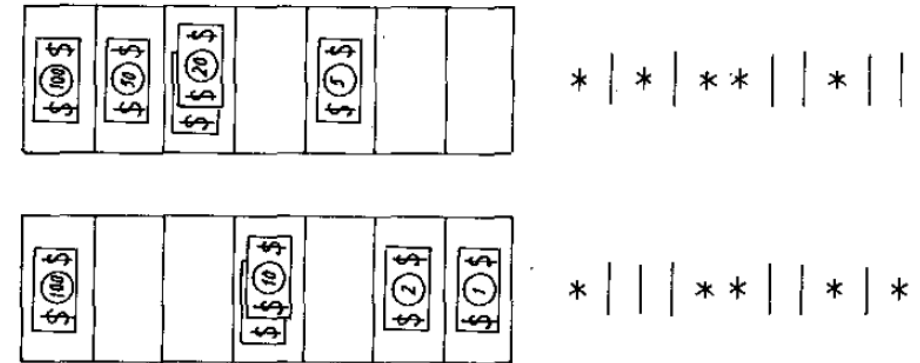
# Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

## Tổ hợp lặp

- Giả sử trong một đĩa hoa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa hoa quả nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.

→ 15 cách

- Có bao nhiêu cách chọn ra 5 tờ giấy bạc từ két đựng tiền gồm những tờ 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 đô nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các tờ thuộc cùng một loại là không phân biệt.



- Định lý: Số tổ hợp lặp chập  $r$  của  $n$  phần tử bằng  $C(n + r - 1, r)$

Một cửa hàng bánh bích quy có 4 loại khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh? Giả sử là ta chỉ quan tâm tới loại bánh mà không quan tâm tới hộp bánh cụ thể nào và thứ tự chọn chúng.

**Giai:** Số cách chọn 6 hộp bánh bằng số tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử. Theo định lý 2 ta nhận được  $C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6)$ . Từ đó có

$$C(9, 6) = C(9, 3) = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84 \text{ cách chọn 6 hộp bánh quy.}$$

Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

*Giải:* Chúng ta nhận thấy mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có  $x_1$  phần tử loại 1,  $x_2$  phần tử loại 2 và  $x_3$  phần tử loại 3 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 11 từ tập có 3 phần tử.

$$C(3 + 11 - 1, 11) = C(13, 11) = C(13, 2) = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

## Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau

- Số hoán vị của  $n$  phần tử, trong đó có  $n_1$  phần tử giống nhau thuộc loại 1,  $n_2$  phần tử giống nhau thuộc loại 2,..., và  $n_k$  phần tử giống nhau thuộc loại  $k$  bằng:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

- Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ ABBA?

Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho

a)  $x_i \geq 1$  với  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ?

b)  $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, x_4 \geq 4, x_5 > 5$  và  $x_6 \geq 6$ ?

Bất đẳng thức

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

# Hệ số nhị thức (1)

- Hàng đẳng thức PASCAL: Với  $n, k (n \geq k)$   

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$$
- Tam giác PASCAL

|                                                                                                           |                                              |                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------|
| $\binom{0}{0}$                                                                                            |                                              | 1                   |
| $\binom{1}{0} \binom{1}{1}$                                                                               |                                              | 1 1                 |
| $\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$                                                                  |                                              | 1 2 1               |
| $\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$                                                     | $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$ | 1 3 3 1             |
| $\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$                                        |                                              | 1 4 6 4 1           |
| $\binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$                           |                                              | 1 5 10 10 5 1       |
| $\binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}$              |                                              | 1 6 15 20 15 6 1    |
| $\binom{7}{0} \binom{7}{1} \binom{7}{2} \binom{7}{3} \binom{7}{4} \binom{7}{5} \binom{7}{6} \binom{7}{7}$ |                                              | 1 7 21 35 35 21 7 1 |

# Hệ số nhị thức (2)

**Định lí 1:**

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$$

# Hệ số nhị thức (3)

**Định lí 2 (Nhị thức):**

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{j=0}^n C(n, j) x^{n-j} y^j \\ &= C(n, 0) x^n + C(n, 1) x^{n-1} y + \cdots + C(n, n-1) x y^{n-1} + C(n, n) y^n\end{aligned}$$

**Định lí 3:**

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C(n, k) = 0$$

- Tìm hệ số của  $x^5y^8$  trong khai triển  $(x + y)^{15}$
- Tìm hệ số của  $x^8$  trong khai triển  $(x + 1)^{10}$
- $C(n, 2n) = \sum_{k=0}^n C(k, n)^2$
- Tìm công thức tính hệ số của  $x^k$  trong khai triển  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$

# Kĩ thuật truy hồi (1)

## **Ví dụ 1: Bài toán nuôi thỏ**

- 1) Các con thỏ không bao giờ chết
  - 2) Hai tháng sau khi ra đời, mỗi cặp thỏ mới sẽ sinh ra một cặp thỏ con (một đực, một cái)
  - 3) Khi đã sinh con rồi thì cứ mỗi tháng tiếp theo chúng lại sinh được một cặp con mới
- Giả sử từ đầu tháng 1 có một cặp mới ra đời thì đến tháng thứ n sẽ có bao nhiêu cặp.

Gọi  $f(n)$  là số thỏ ở tháng thứ  $n$

Tháng 1: Có 1 cặp  $f(1) = 1$

Tháng 2: Có 1 cặp  $f(2) = 1$

$f(n) = a$

$f(n + 1) = b$  (có  $b - a$  cặp mới sinh)

$f(n + 2) = b + a$   
 $= f(n + 1) + f(n)$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                            | 3 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                            | 4 |
|                                                                                                                                                                                         | 5 |
|    <br> | 6 |

## Ví dụ 2: Bài toán nuôi thỏ 2

- 1) Các con thỏ không bao giờ chết
  - 2) **Ba tháng sau khi ra đời**, mỗi cặp thỏ mới sẽ sinh ra một cặp thỏ con (một đực, một cái)
  - 3) Khi đã sinh con rồi thì cứ mỗi tháng tiếp theo chúng lại sinh được một cặp con mới
- Giả sử từ đầu tháng 1 có một cặp mới ra đời thì đến tháng thứ  $n$  sẽ có bao nhiêu cặp.

### **Ví dụ 3: Bài toán đếm số lượng xâu nhị phân**

Đếm số lượng xâu nhị phân mà không có hai bit 1 nào đứng cạnh nhau

$n = 1$  có 2 xâu thỏa mãn 0, 1

$n = 2$  có 3 xâu thỏa mãn 00, 01, 10

$n = 3$  có 5 xâu 000, 001, 010, 100, 101

$n = 5$  có bao nhiêu xâu thỏa mãn?

## Kĩ thuật truy hồi (2)

- Kĩ thuật truy hồi còn dùng để đánh giá độ phức tạp thuật toán chia để trị.
- Thuật toán chia để trị chia bài toán thành các bài toán con cùng dạng (**none overlapping**) nhỏ hơn.
- Thuật toán quy hoạch động chia bài toán thành các bài toán con cùng dạng (**overlapping**) nhỏ hơn. Dùng bảng lưu trữ lại phương án các bài toán con, tránh được việc phải giải lại bài toán con khi gặp lại.

# Thuật toán chia để trị

Tính  $A^N$

- Cách tính

- Tính  $B = A^{\frac{N}{2}}$

- $C = B \times B \times A^{N\%2}$

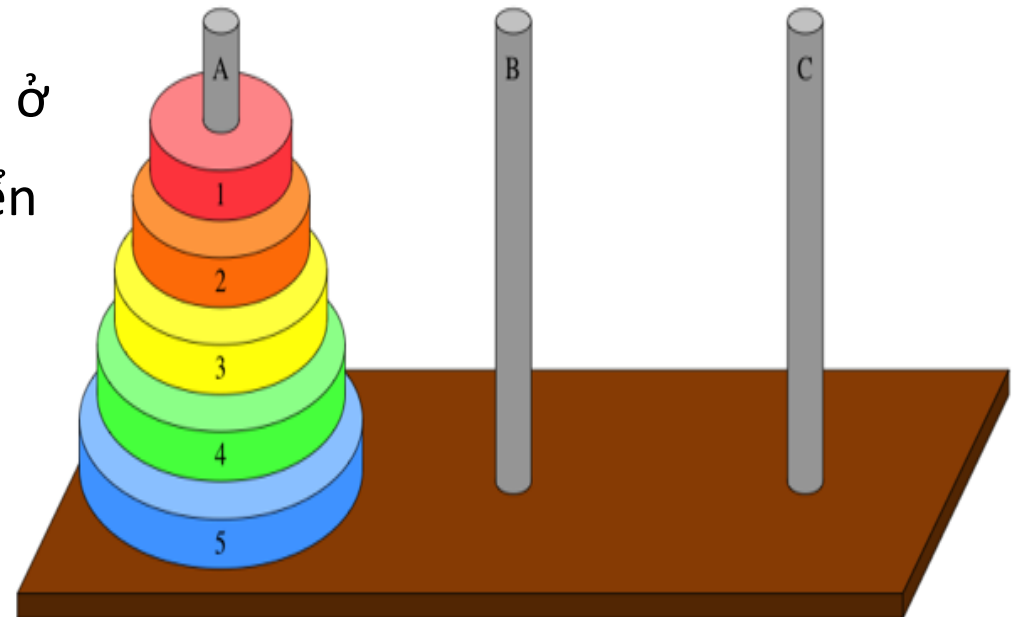
- Độ phức tạp

- $f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

- $O(\log n)$

# Bài toán tháp Hà nội

- Trò chơi tháp Hà nội là trò chơi với những chiếc đĩa có kích thước đôi một khác nhau, có lỗ ở giữa, nằm xuyên trên ba chiếc cọc A, B, C.
- Trò chơi bắt đầu bằng trạng thái các đĩa được chồng lên nhau ở cọc A, đĩa nhỏ nằm trên đĩa lớn, tức là đĩa nhỏ nhất nằm trên cùng, tạo ra một dạng hình nón. Yêu cầu của trò chơi là chuyển toàn bộ số đĩa từ cọc A sang cọc C, tuân theo các quy tắc sau:
  - Chỉ sử dụng 3 cọc để chuyển;
  - Một lần chỉ được di chuyển một đĩa nằm trên cùng từ cọc này sang cọc khác;
  - Một đĩa chỉ được đặt lên một đĩa lớn hơn.



Cách chuyển n đĩa từ cọc A sang C dưới đây là tối ưu.

Tính số lần chuyển đĩa?

Chuyển(n-1,A,B)

Chuyển(1,A,C)

Chuyển(n-1,B,A)

$$f(1) = 1;$$

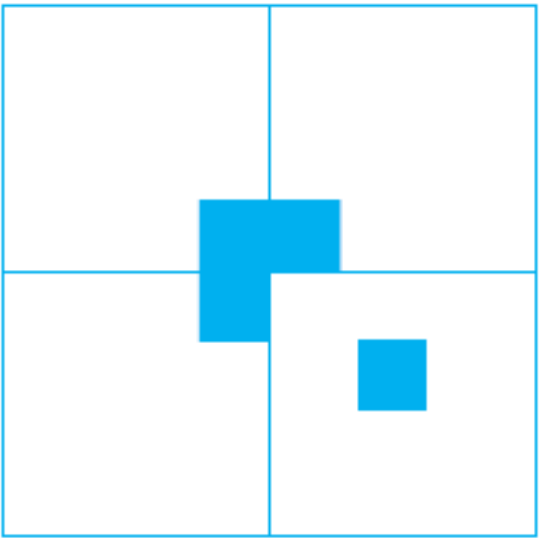
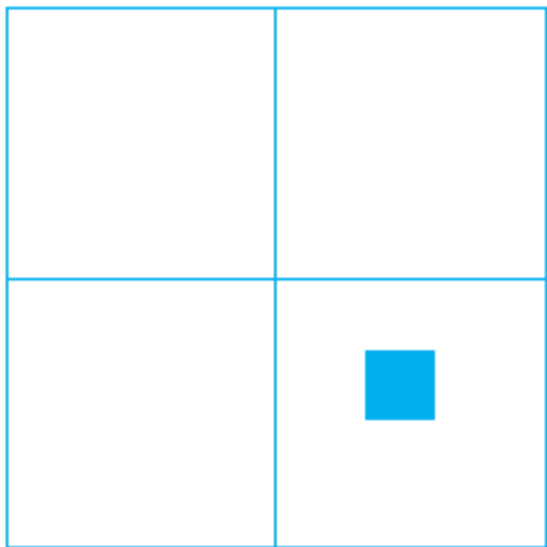
$$f(2) = 3;$$

$$f(n) = f(n-1) + 1 + f(n-1) = 2^n - 1$$

# Bài toán lát gạch

Một sàn nhà kích thước  $2^N \times 2^N$  khuyết 1 ô.

Hãy lát sàn nhà bằng 4 loại gạch hình thước thợ.



# Thuật toán quy hoạch động

Trò chơi lò cò: người chơi cần vượt qua một đoạn đường dài  $n$  mét, mỗi bước, người chơi có ba cách nhảy với độ dài bước nhảy tương ứng là 1 mét, 2 mét, 3 mét. Một cách nhảy thỏa mãn là thực hiện các bước nhảy có tổng đúng bằng  $n$ . Đếm số cách nhảy thỏa mãn.

$f(n)$  là số cách nhảy thỏa mãn

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 2$$

$$f(3) = 4$$

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2) + f(n - 3)$$

Cho bảng gồm  $m$  hàng,  $n$  cột. Mỗi ô của bảng chứa một kí tự A hoặc B. Xuất phát từ góc trái dưới, mỗi lần được di chuyển sang ô bên trên hoặc ô bên phải. Đếm số lượng đường đi đến góc phải trên mà xâu ghép từ các kí tự trên đường đi là một xâu đối xứng.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | A | A | A |
| A | A | A | B |
| A | B | A | A |

Gọi  $f(x, y, u, v)$  là số lượng đường đi từ ô  $(x, y)$  đến ô  $(u, v)$

$$f(x, y, u, v) = \sum_{\substack{(x', y') \text{ bên trên hoặc bên phải của } (x, y) \\ (u', v') \text{ bên trái hoặc bên dưới } (u, v) \\ \text{kí tự ở } (x', y') \text{ giống kí tự ở } (u', v')}} f(x', y', u', v')$$

# Nguyên lý lồng chim bồ câu

- Định lý 1: Nếu có  $k + 1$  (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào trong  $k$  hộp thì có ít nhất một hộp chứa chứa hai hoặc nhiều hơn hai đồ vật.
- Ví dụ: Một tập thể gồm 367 người, như vậy có ít nhất 2 người trùng ngày sinh.
- Định lý 2: Nếu có  $k$  đồ vật được đặt vào trong  $b$  hộp, sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất  $\left\lceil \frac{k}{b} \right\rceil$  vật.
- Ví dụ: Trong 100 người có ít nhất  $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$  người cùng tháng sinh.

Chứng tỏ rằng trong  $n + 1$  số nguyên dương đôi một khác nhau không vượt quá  $2n$ , luôn tồn tại hai số nguyên tố cùng nhau.

Trong  $n + 1$  số đôi một khác nhau không vượt quá  $2n$

→ tồn tại hai số liên tiếp nhau

→ hai số đó nguyên tố cùng nhau.

Chứng tỏ rằng trong  $n + 1$  số nguyên dương không vượt quá  $2n$ , luôn tồn tại hai số chia hết cho nhau.

*Giải:* Ta viết mỗi số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  dưới dạng tích của một lũy thừa cơ số 2 với một số lẻ. Nói cách khác ta có  $a_j = 2^{k_j} \cdot q_j$  trong đó  $k_j$  là số nguyên không âm còn  $q_j$  là số dương lẻ nhỏ hơn  $2n$ . Vì chỉ có  $n$  số nguyên dương lẻ nhỏ hơn  $2n$  nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai trong các số lẻ  $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$  bằng nhau, tức là có hai chỉ số  $i$  và  $j$  sao cho  $q_i = q_j = q$  ( $q$  là giá trị chung của chúng). Khi đó  $a_i = 2^{k_i} q$  và  $a_j = 2^{k_j} q$ . Suy ra, nếu  $k_i \leq k_j$  thì  $a_j$  chia hết cho  $a_i$  còn trong trường hợp ngược lại ta có  $a_i$  chia hết cho  $a_j$ .