

Toán rời rạc

TS. Đỗ Đức Đông

dongdoduc@gmail.com

Đồ thị (8 tiết)

1. Đồ thị, phân loại đồ thị
2. Các thuật ngữ về đồ thị
3. Biểu diễn đồ thị và tính đẳng cấu
4. Đường đi và tính liên thông
5. Đường đi EULER và đường đi HAMILTON
6. Bài toán đường đi ngắn nhất
7. Đồ thị phẳng
8. Tô màu đồ thị

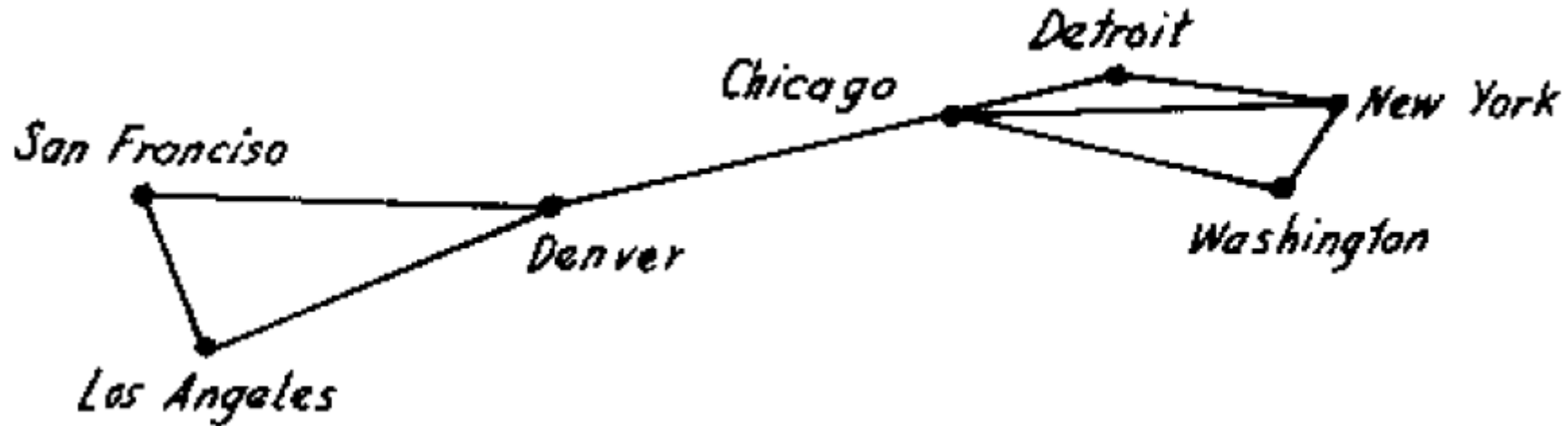
Đồ thị, phân loại đồ thị

- Lý thuyết đồ thị là ngành khoa học được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại
- Đồ thị được dùng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau (mạch điện, cấu trúc của hợp chất hóa học, mạng máy tính, ...)
- Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó
- Người ta phân loại đồ thị theo đặc tính của cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị

Phân loại đồ thị

Đơn đồ thị

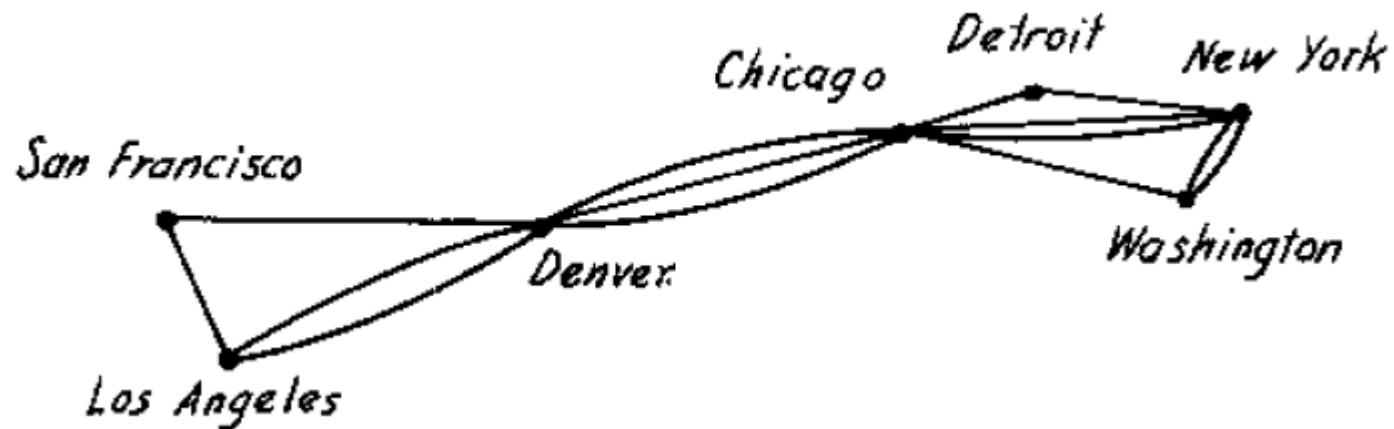
- Đơn đồ thị $G = (V, E)$, trong đó tập không rỗng V mà các phần tử của nó được gọi là các đỉnh và một tập E mà các phần tử được gọi là cạnh, đó là các cặp không thứ tự của các đỉnh phân biệt



Phân loại đồ thị

Đa đồ thị

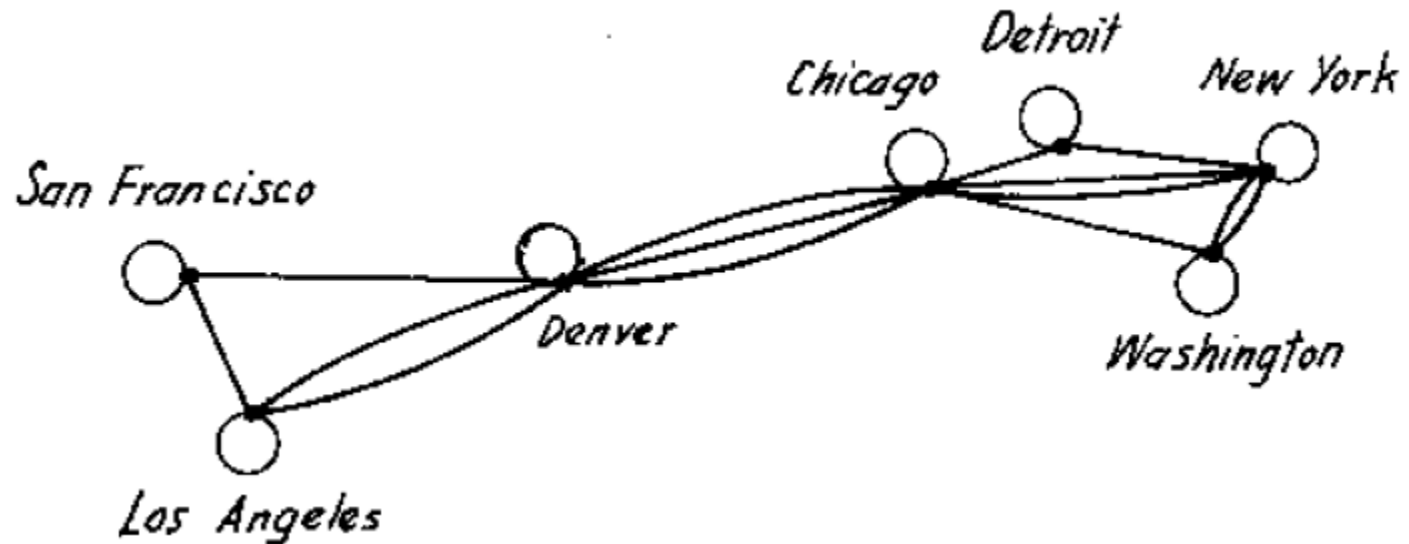
- Đa đồ thị $G = (V, E)$, trong đó V là tập đỉnh, E là tập cạnh, đồ thị gồm các cạnh vô hướng, **nhưng có thể có nhiều cạnh nối mỗi cặp đỉnh (cạnh bội)**
- Đơn đồ thị là một trường hợp riêng của đa đồ thị.



Phân loại đồ thị

Đồ thị khuyên

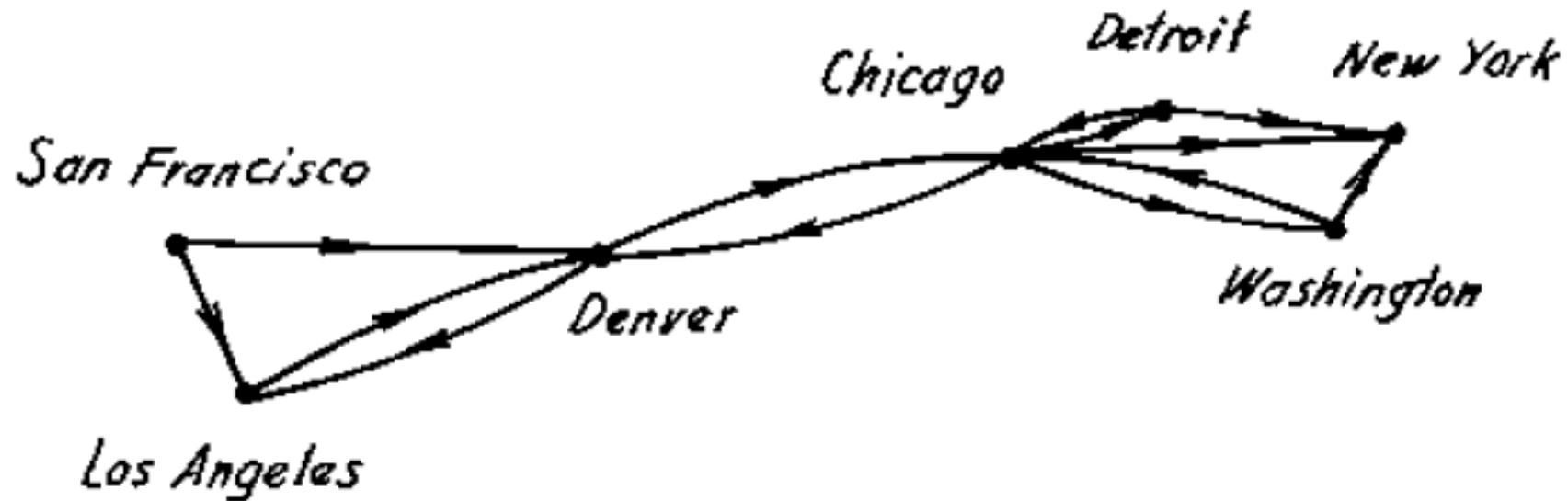
- Đồ thị khuyên $G = (V, E)$, trong đó V là tập đỉnh, E là tập cạnh, **đồ thị có thêm loại cạnh nối từ một đỉnh đến chính nó.**



Phân loại đồ thị

Đơn đồ thị có hướng

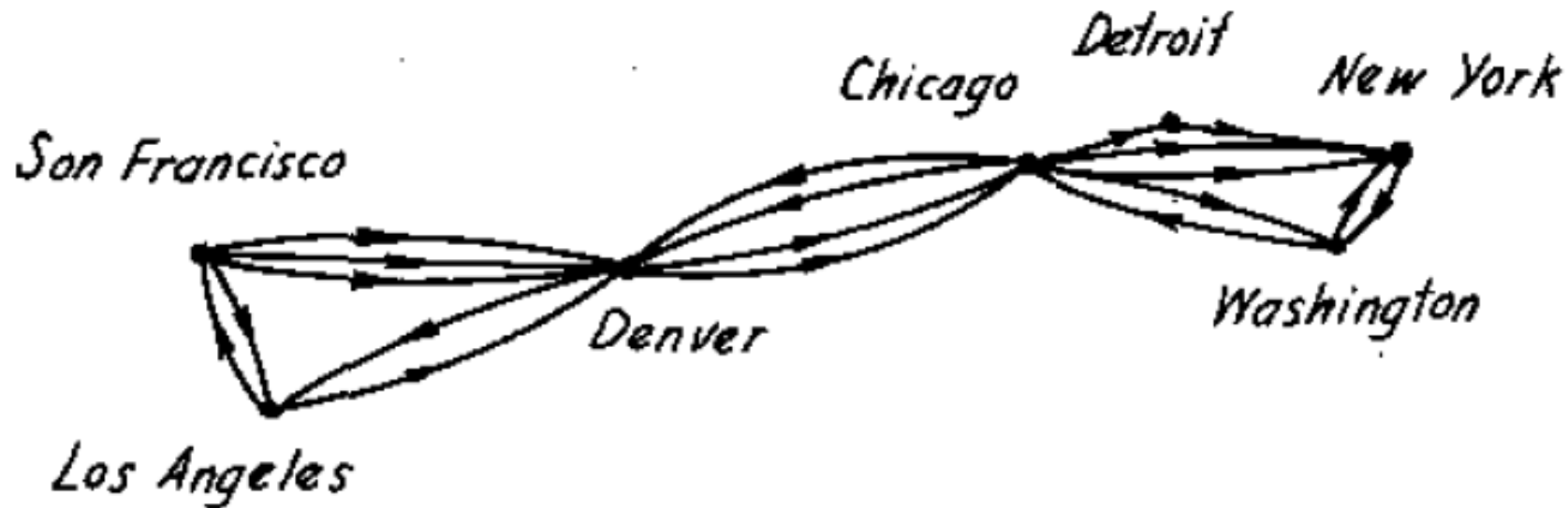
- Đơn đồ thị có hướng $G = (V, E)$, trong đó tập không rỗng V mà các phần tử của nó được gọi là các đỉnh và một tập E mà các phần tử được gọi là cạnh, đó là **các cặp có thứ tự của các đỉnh phân biệt**



Phân loại đồ thị

Đa đồ thị có hướng

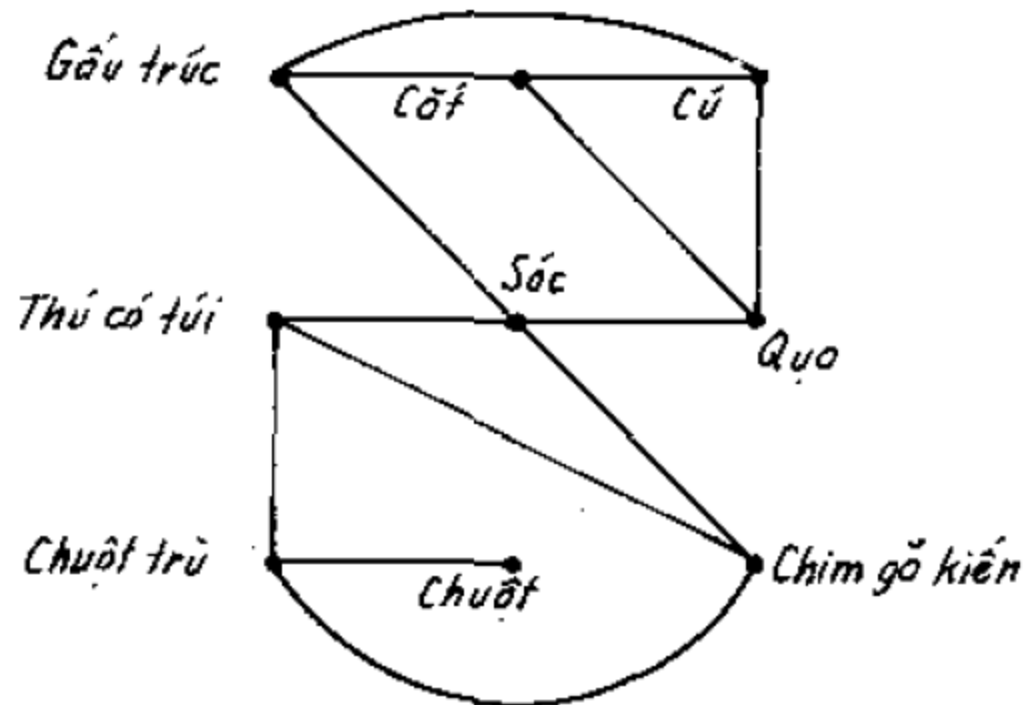
- Đa đồ thị có hướng $G = (V, E)$, trong đó V là tập đỉnh, E là tập cạnh, đồ thị **gồm các cạnh có hướng, nhưng có thể có nhiều cạnh nối mỗi cặp đỉnh (cạnh bội)**
- Đơn đồ thị có hướng là một trường hợp riêng của đa đồ thị có hướng.



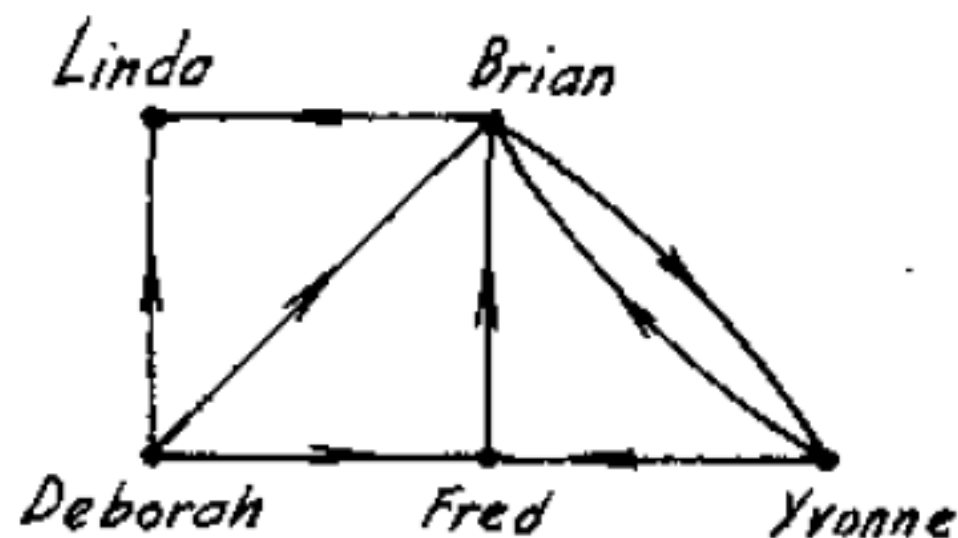
Phân loại đồ thị

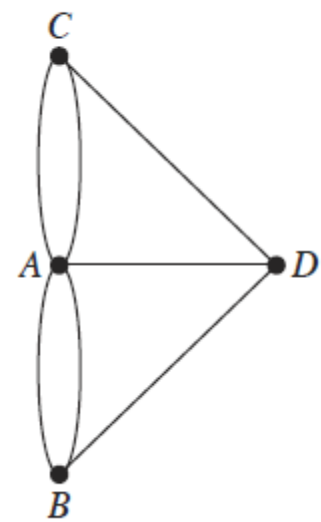
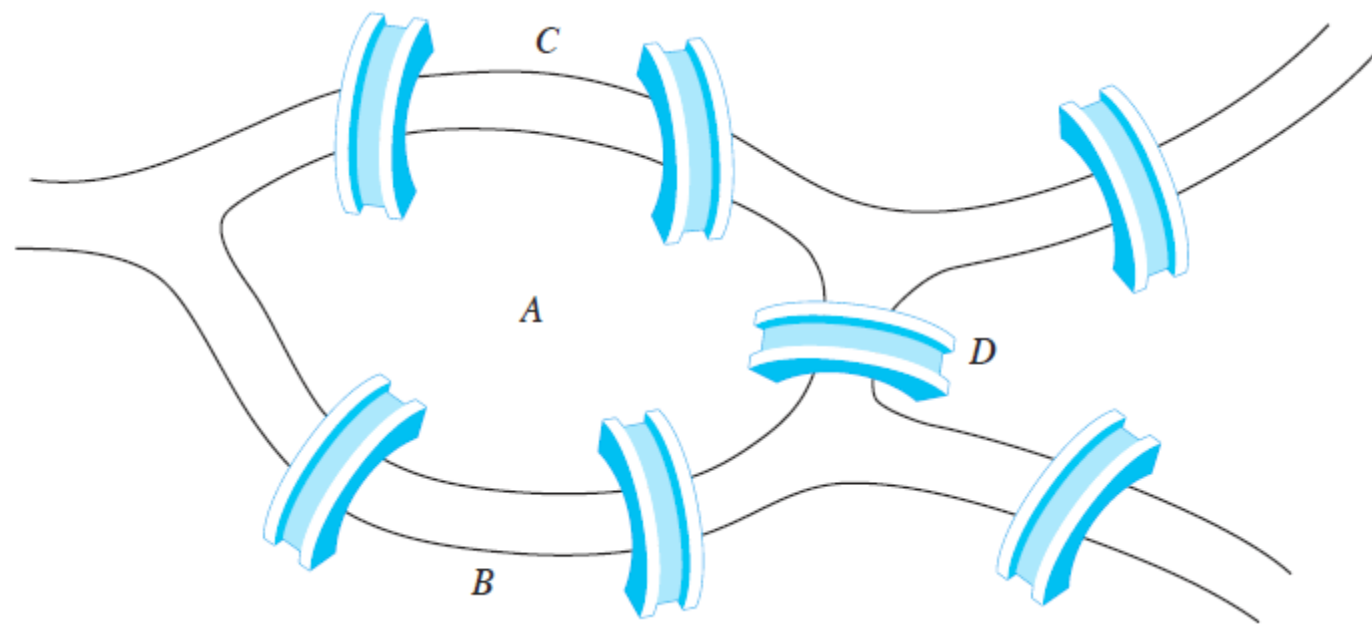
Loại	Cạnh	Có cạnh bội không?	Có cạnh khuyên không
Đơn đồ thị	Vô hướng		
Đa đồ thị	Vô hướng	x	
Đồ thị khuyên			x
Đơn đồ thị có hướng	Có hướng		
Đa đồ thị có hướng	Có hướng	x	

Ví dụ 1. Đồ thị "lăn tở" trong sinh thái học. Đồ thị được dùng trong nhiều mô hình có tính đến sự tương tác của các loài vật. Chẳng hạn sự cạnh tranh của các loài trong một hệ sinh thái có thể mô hình hoá bằng đồ thị "lăn tở". Mỗi loài được biểu diễn bằng một đỉnh. Một cạnh vô hướng nối hai đỉnh nếu hai loài được biểu diễn bằng các đỉnh này là cạnh tranh với nhau (tức là, chúng cùng chung nguồn thức ăn). Đồ thị trên Hình là mô hình của hệ sinh thái rừng. Từ đồ thị này chúng ta thấy sóc và gấu trúc là cạnh tranh với nhau còn quạ và chuột trù thì không.

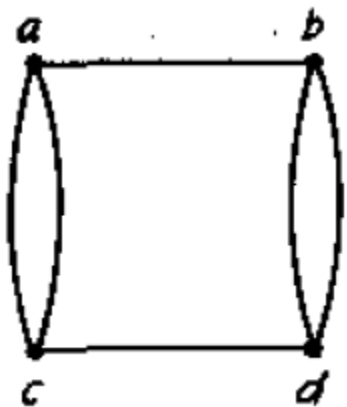
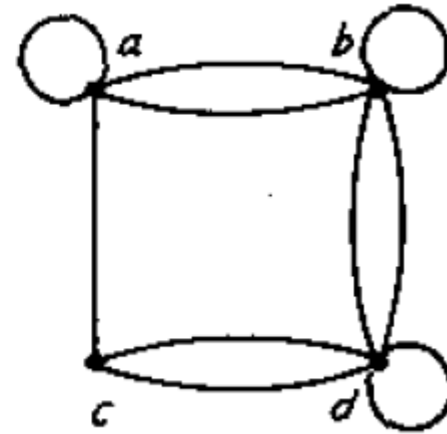
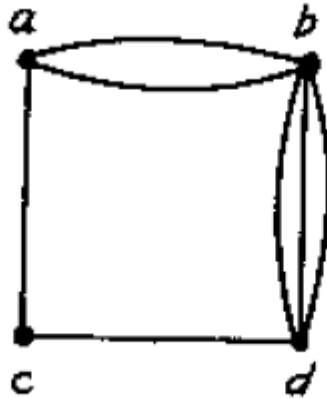
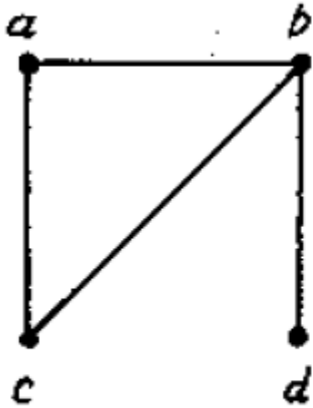


Ví dụ 2. Đồ thị ảnh hưởng. Khi nghiên cứu tính cách của một nhóm người, ta thấy một số người có thể có ảnh hưởng lên suy nghĩ của những người khác. Đồ thị có hướng được gọi là **đồ thị ảnh hưởng** có thể dùng để mô hình bài toán này. Mỗi người của nhóm được biểu diễn bằng một đỉnh. Khi một người được biểu diễn bằng đỉnh a có ảnh hưởng lên người được biểu diễn bằng đỉnh b thì giữa đỉnh a và đỉnh b được nối bằng một cạnh có hướng.

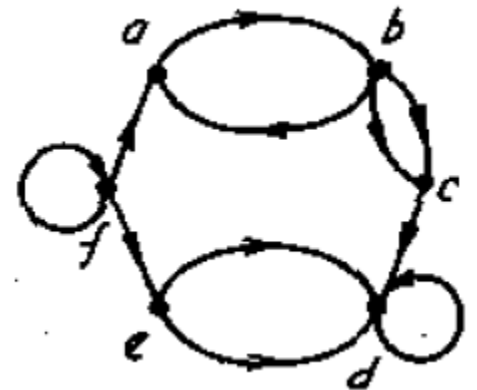
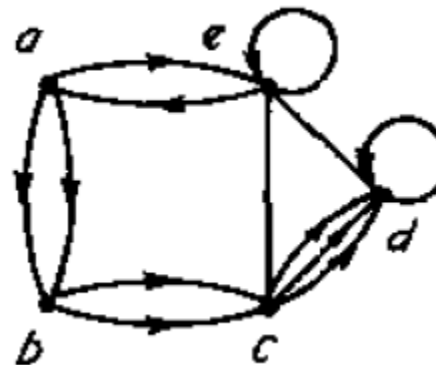
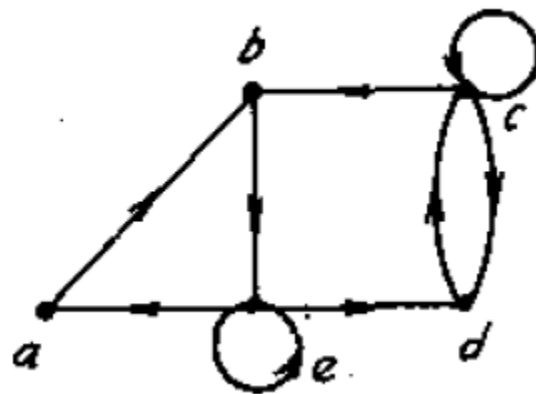




Xác định loại đồ thị của các đồ thị sau



•
e



Đồ thị giao của các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ là một đồ thị có một đỉnh biểu diễn mỗi tập và có cạnh nối các đỉnh biểu diễn các tập nếu các tập này có phần giao khác trống. Hãy xây dựng đồ thị giao của các tập hợp sau :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A_1 &= \{0, 2, 4, 6, 8\}, & A_2 &= \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ A_3 &= \{1, 3, 5, 7, 9\}, & A_4 &= \{5, 6, 7, 8, 9\}, \\ A_5 &= \{0, 1, 8, 9\}. \end{aligned}$$

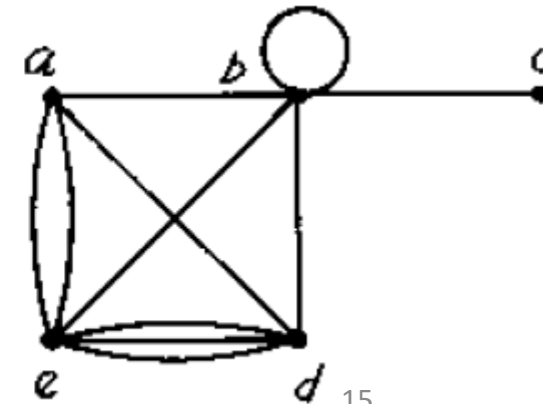
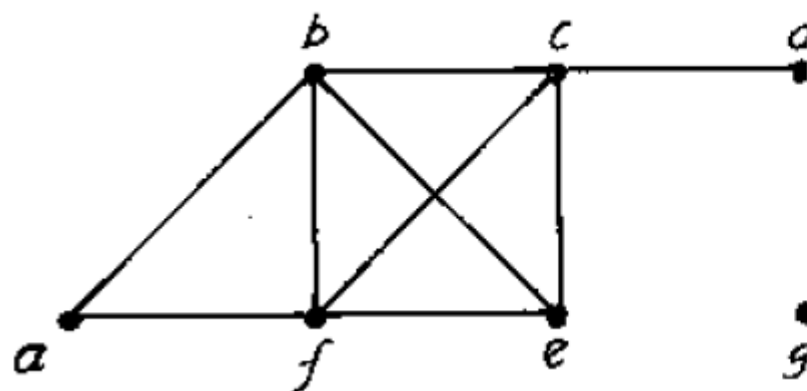
$$\begin{aligned} \text{b)} \quad A_1 &= \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}, \\ A_2 &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \\ A_3 &= \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}, \\ A_4 &= \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}, \\ A_5 &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}. \end{aligned}$$

Các thuật ngữ về đồ thị (1) – **Bậc của đỉnh**

ĐỊNH NGHĨA 1. Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là *liền kề* (hay *láng giềng*) nếu $\{u, v\}$ là một cạnh của G . Nếu $e = \{u, v\}$ thì e gọi là *cạnh liên thuộc* với các đỉnh u và v . Cạnh e cũng được gọi là *cạnh nối* các đỉnh u và v . Các đỉnh u và v gọi là các *điểm đầu mút* của cạnh $\{u, v\}$.

ĐỊNH NGHĨA 2. *Bậc* của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Người ta ký hiệu bậc của đỉnh v là $\deg(v)$.

1. Đỉnh b, c liền kề (láng giềng) trong cả 2 đồ thị.
2. Đỉnh c, d liền kề (láng giềng)?
3. Bậc của các đỉnh?



Các thuật ngữ về đồ thị (2) – **Bậc của đỉnh**

ĐỊNH LÝ 1. *Định lý Bất tay.* Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có e cạnh. Khi đó $2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

(Định lý này đúng cả khi đồ thị có cạnh bội hoặc các khuyên).

- 1) Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị đơn có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5?
- 2) Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị đơn có 99 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5?

→ **Định lý 2: Đồ thị đơn có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.**

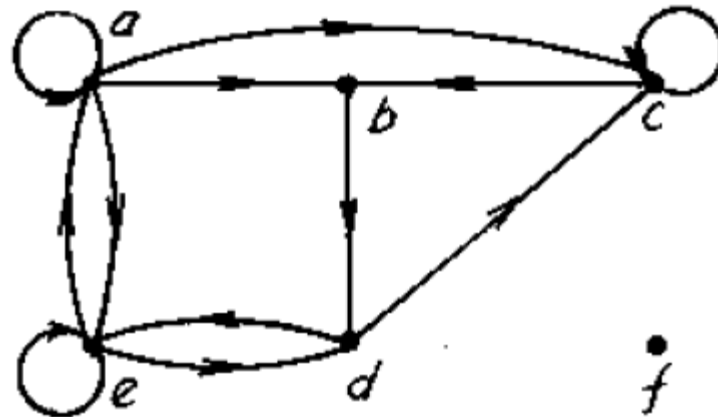
Thách đố

- Xây dựng đơn đồ thị gồm 10 đỉnh có ít cạnh nhất mà ba đỉnh i, j, k bất kì thì đều tồn tại ít nhất 1 cạnh (i,j) hay (i,k) hay (k,j) ,

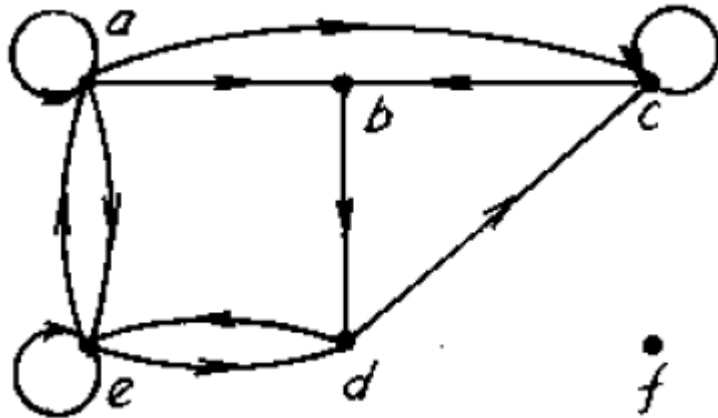
Các thuật ngữ về đồ thị (3) – **Bậc vào ra**

ĐỊNH NGHĨA 3. Khi (u, v) là cạnh của đồ thị có hướng G , thì u được gọi là *nối tới* v , và v được gọi là *được nối từ* u . Đỉnh u gọi là *đỉnh đầu*, đỉnh v gọi là *đỉnh cuối* của cạnh (u, v) . Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên là trùng nhau.

ĐỊNH NGHĨA 4. Trong đồ thị có hướng **bậc – vào** của đỉnh v ký hiệu là $\deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối là v . **Bậc – ra** của đỉnh v , ký hiệu là $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là v . (Chú ý, một khuyên tại một đỉnh sẽ góp thêm 1 đơn vị vào bậc – vào và 1 đơn vị vào bậc – ra của đỉnh này).



Các thuật ngữ về đồ thị (4) – **Bậc vào ra**



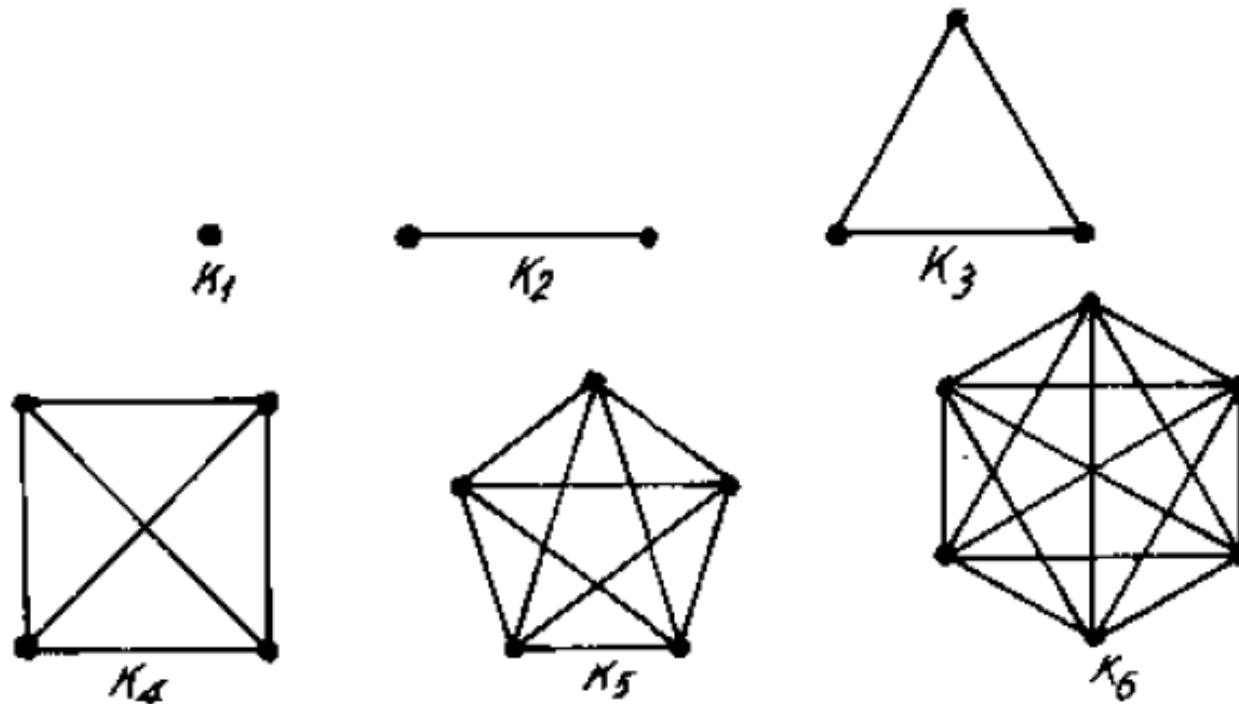
Giải: Các bậc-vào là $\deg^-(a) = 2$, $\deg^-(b) = 2$, $\deg^-(c) = 3$, $\deg^-(d) = 2$, $\deg^-(e) = 3$ và $\deg^-(f) = 0$. Các bậc-ra là $\deg^+(a) = 4$, $\deg^+(b) = 1$, $\deg^+(c) = 2$, $\deg^+(d) = 2$, $\deg^+(e) = 3$ và $\deg^+(f) = 0$.

ĐỊNH LÝ 3. Gọi $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Khi đó

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|.$$

Các thuật ngữ về đồ thị (5) – Đồ thị đầy đủ

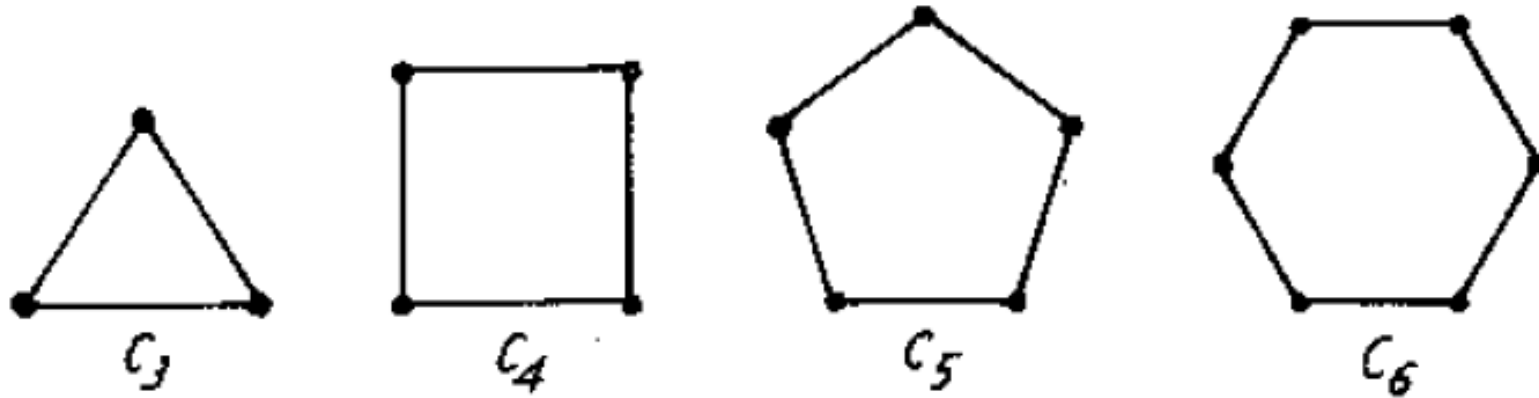
Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu K_n là một đơn đồ thị mà mỗi cặp đỉnh phân biệt đều có cạnh nối.



Các đồ thị K_n , $1 \leq n \leq 6$.

Các thuật ngữ về đồ thị (6) – Đồ thị chu trình (vòng)

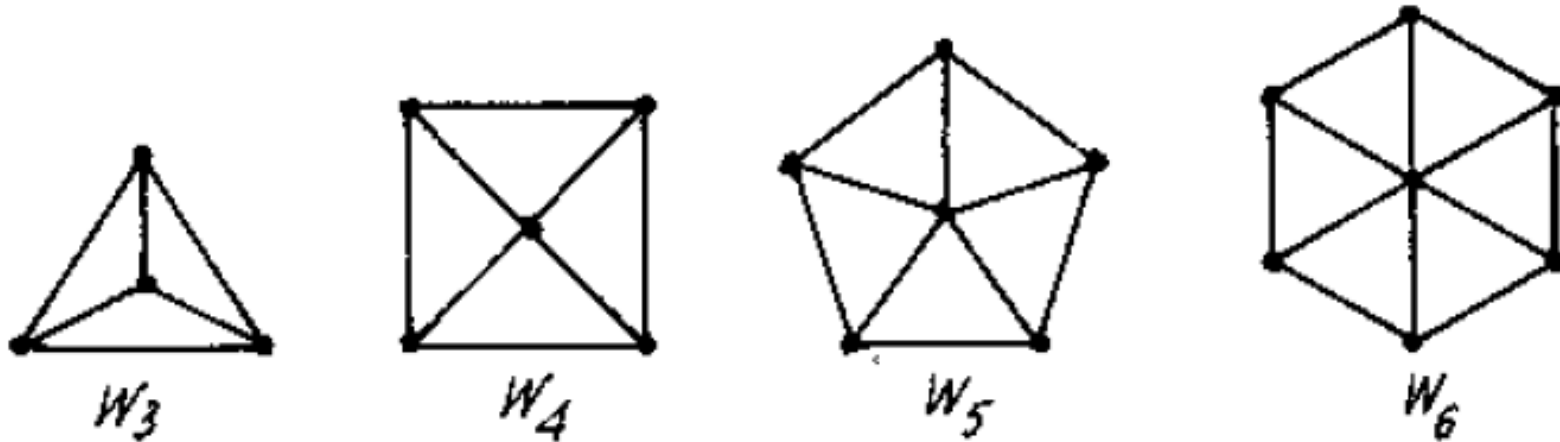
Đồ thị chu trình C_n ($n \geq 3$) là một đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và các cạnh $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$.



Các chu trình C_3 , C_4 , C_5 và C_6 .

Các thuật ngữ về đồ thị (7) – Đồ thị bánh xe

Khi thêm một đỉnh vào đồ thị C_n ($n \geq 3$) và nối đỉnh này với tất cả các đỉnh của C_n



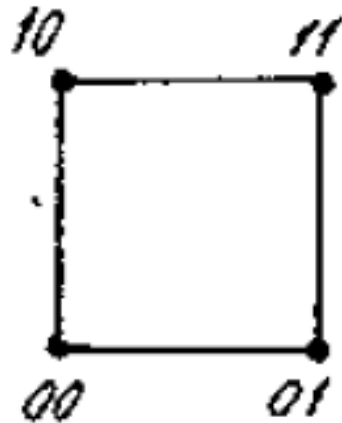
Các bánh xe W_3 , W_4 , W_5 , và W_6 .

Các thuật ngữ về đồ thị (8) – Các khối n chiều

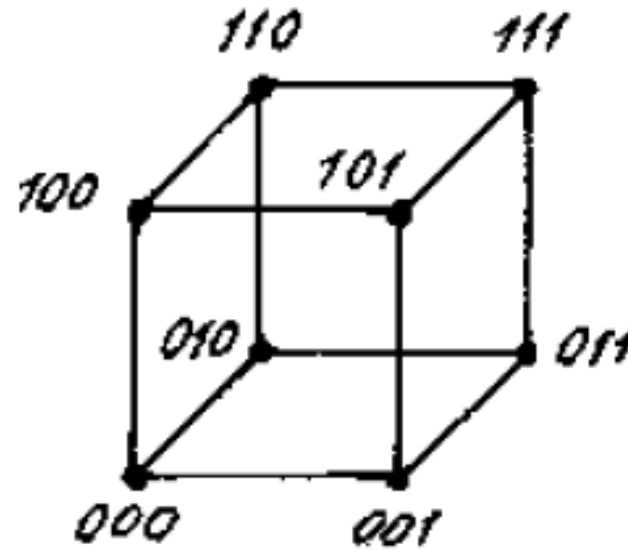
Đồ thị các khối n chiều, ký hiệu Q_n là các đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng xâu nhị phân độ dài n . Hai đỉnh là liền kề nếu và chỉ nếu các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng 1 bit.



Q_1



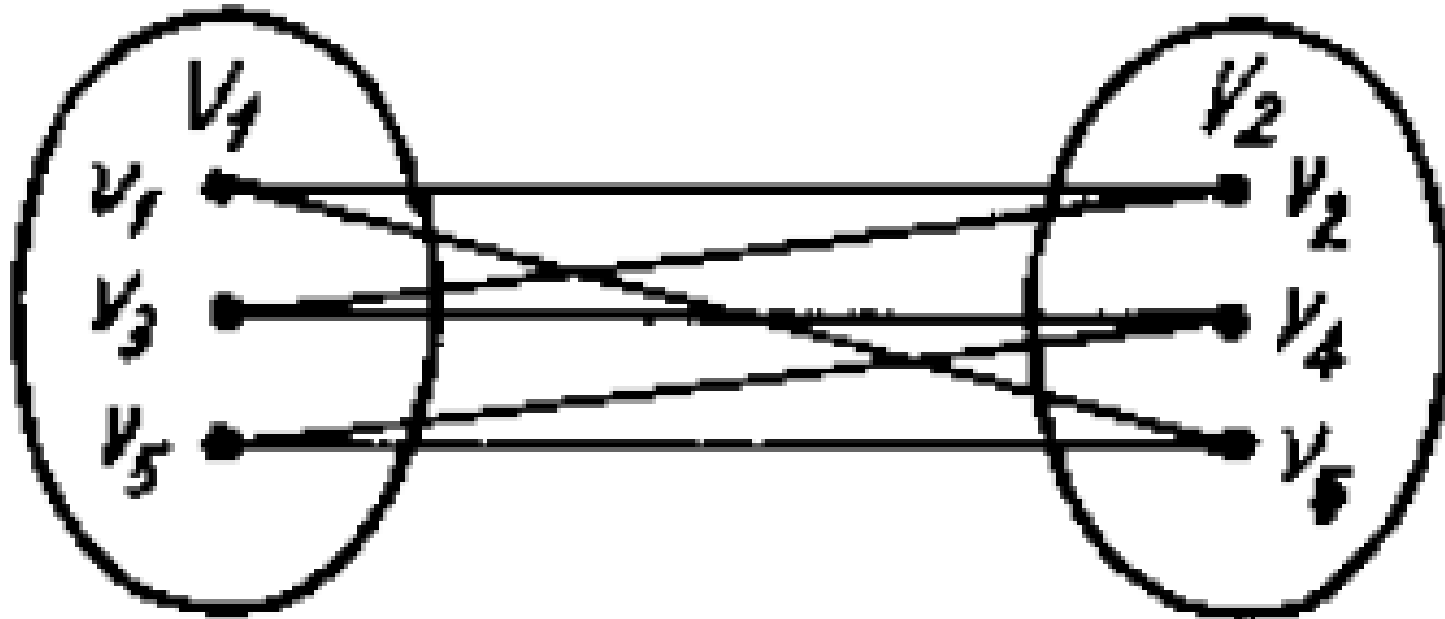
Q_2



Q_3

Các thuật ngữ về đồ thị (9) – Đồ thị phân đôi (hai phía)

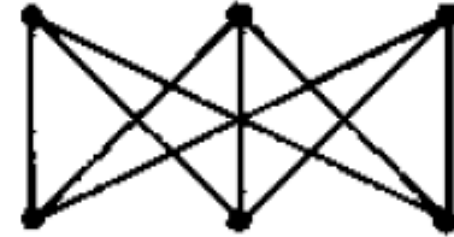
Một đồ thị G được gọi là đồ thị phân đôi (đồ thị hai phía) nếu tập đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1, V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2 .



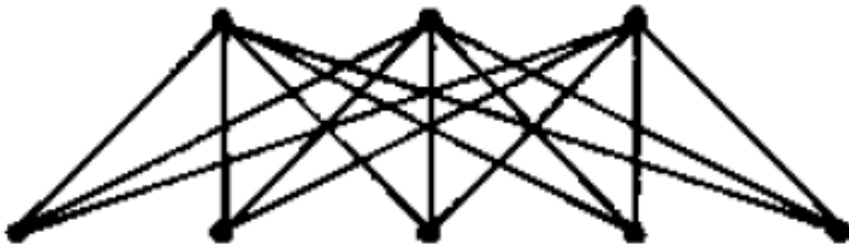
Các thuật ngữ về đồ thị (10) – Đồ thị phân đôi đầy đủ



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



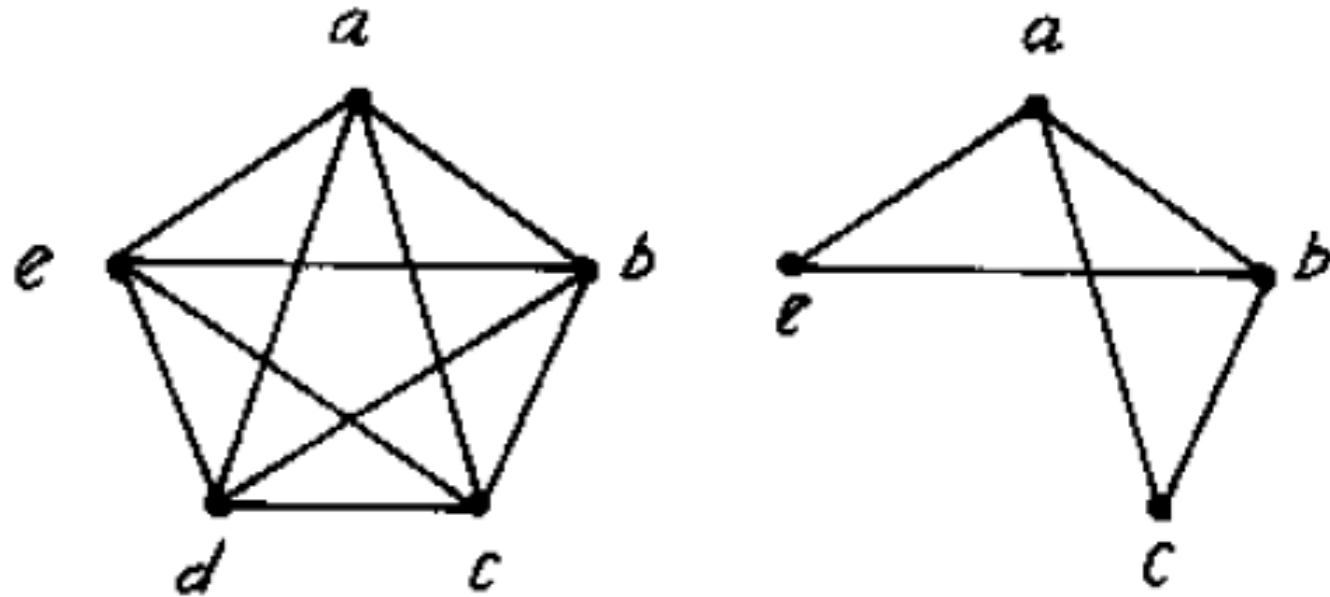
$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

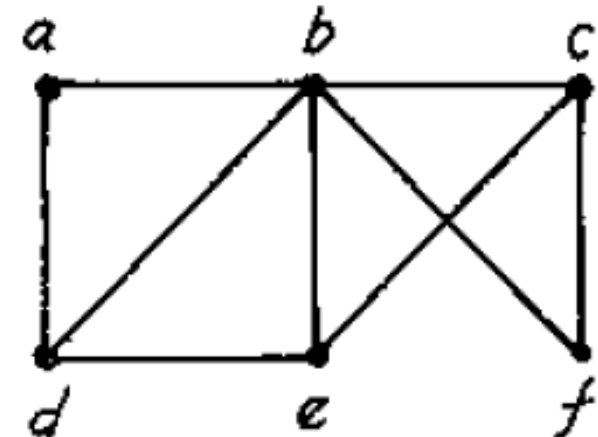
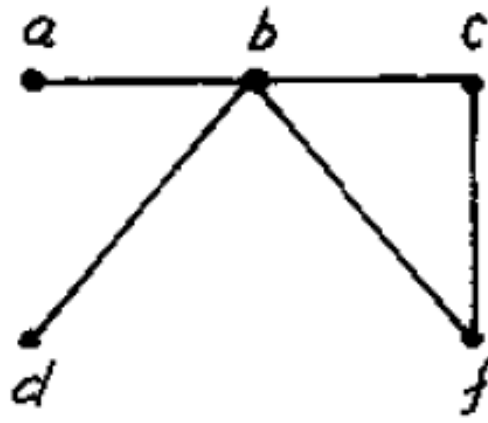
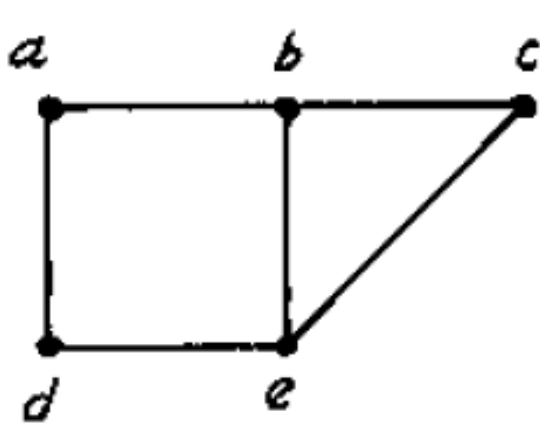
Các thuật ngữ về đồ thị (11) – Đồ thị con

Đồ thị con của đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị $G' = (V', E')$, trong đó $V' \subseteq V$ và $E' \subseteq E$.



Các thuật ngữ về đồ thị (12) – Hợp của hai đồ thị

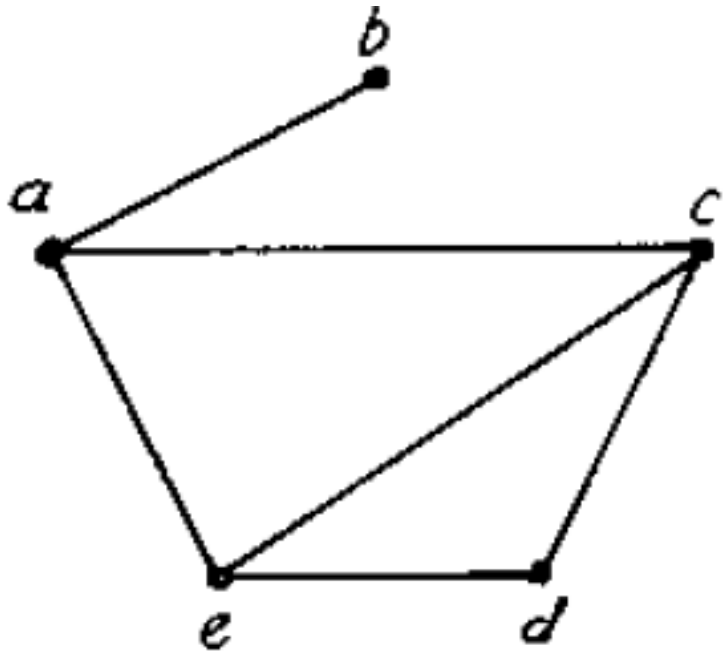
Hợp của hai đồ thị đơn $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị đơn có tập các đỉnh là $V_1 \cup V_2$ và tập các cạnh là $E_1 \cup E_2$. Ta ký hiệu hợp của các đồ thị G_1 và G_2 là $G_1 \cup G_2$.



Biểu diễn đồ thị - Danh sách cạnh, danh sách kề

Danh sách cạnh: Liệt kê tất cả các cạnh của đồ thị

Danh sách liên kề: Chỉ rõ các đỉnh nối với mỗi đỉnh của đồ thị



Danh sách cạnh

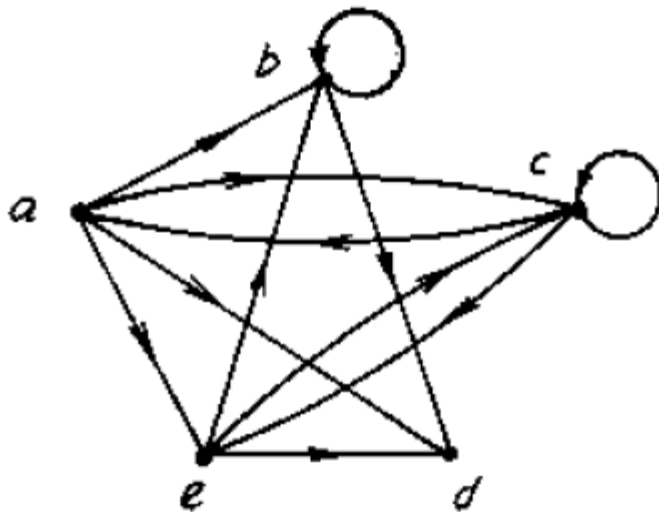
1. {a,b}
2. {a,c}
3. {a,e}
4. {c,d}
5. {c,e}
6. {e,d}

Đỉnh	Đỉnh liên kề
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Biểu diễn đồ thị - Danh sách cạnh, danh sách kề

Danh sách cạnh?

Danh sách liền kề?

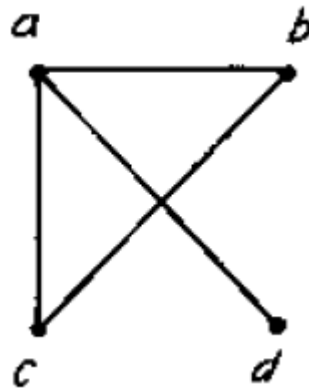


Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
<i>a</i>	<i>b, c, d, e</i>
<i>b</i>	<i>b, d</i>
<i>c</i>	<i>a, c, e</i>
<i>d</i>	
<i>e</i>	<i>b, c, d</i>

Biểu diễn đồ thị - Ma trận liên kề (1)

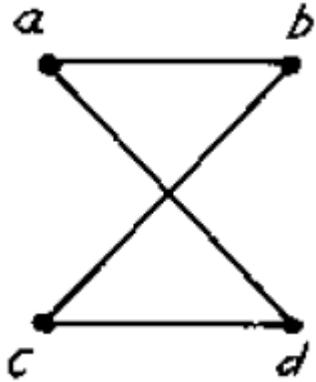
Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị đơn trong đó $|V| = n$ và các đỉnh được liệt kê một cách tùy ý $v_1, \dots, v_n$. **Ma trận liên kề A** (hay A_G) của G ứng với danh sách các đỉnh này là ma trận không-một cấp $n \times n$ có phần tử hàng i cột j bằng 1 nếu v_i và v_j liên kề nhau, và bằng 0 nếu chúng không được nối với nhau. Nói cách khác ma trận liên kề của đồ thị là ma trận $A = [a_{ij}]$ trong đó

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \{v_i, v_j\} \text{ là một cạnh của } G, \\ 0 & \text{nếu không có cạnh nối đỉnh } v_i \text{ với đỉnh } v_j. \end{cases}$$

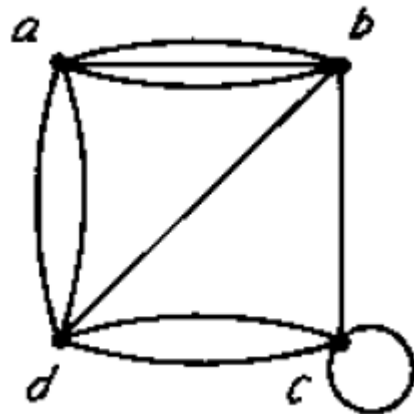


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Biểu diễn đồ thị - Ma trận liên kề (2)

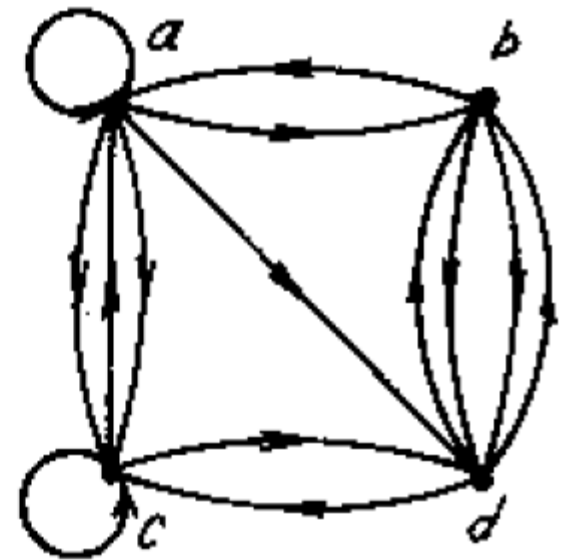
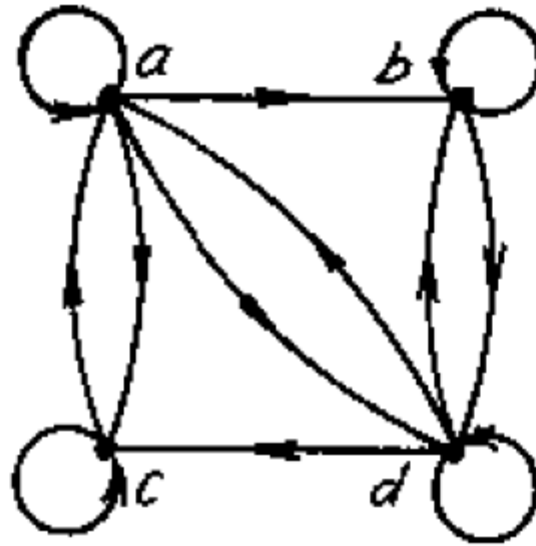
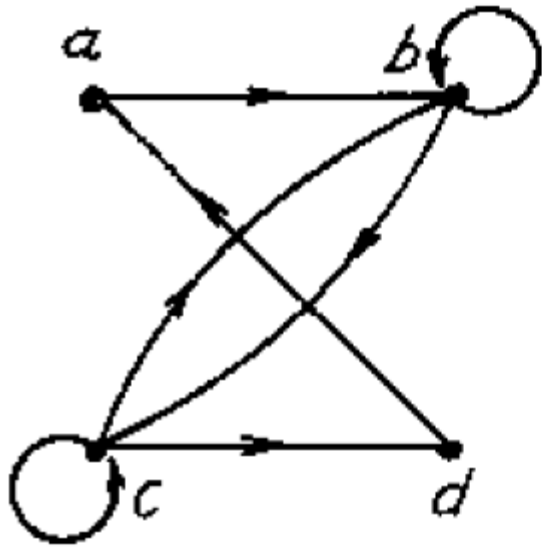


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

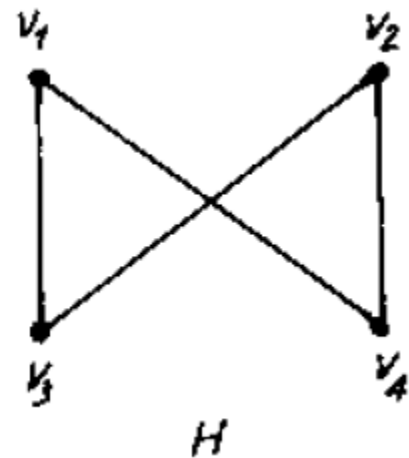
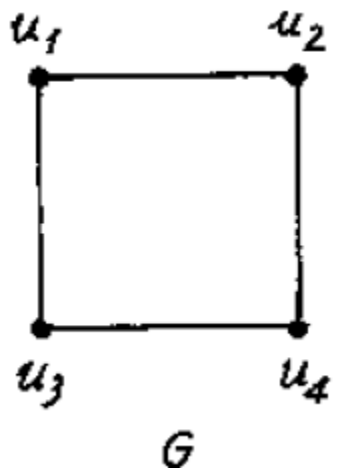
Biểu diễn đồ thị - Ma trận liên kề (3)



Sự đẳng cấu của hai đồ thị (1)

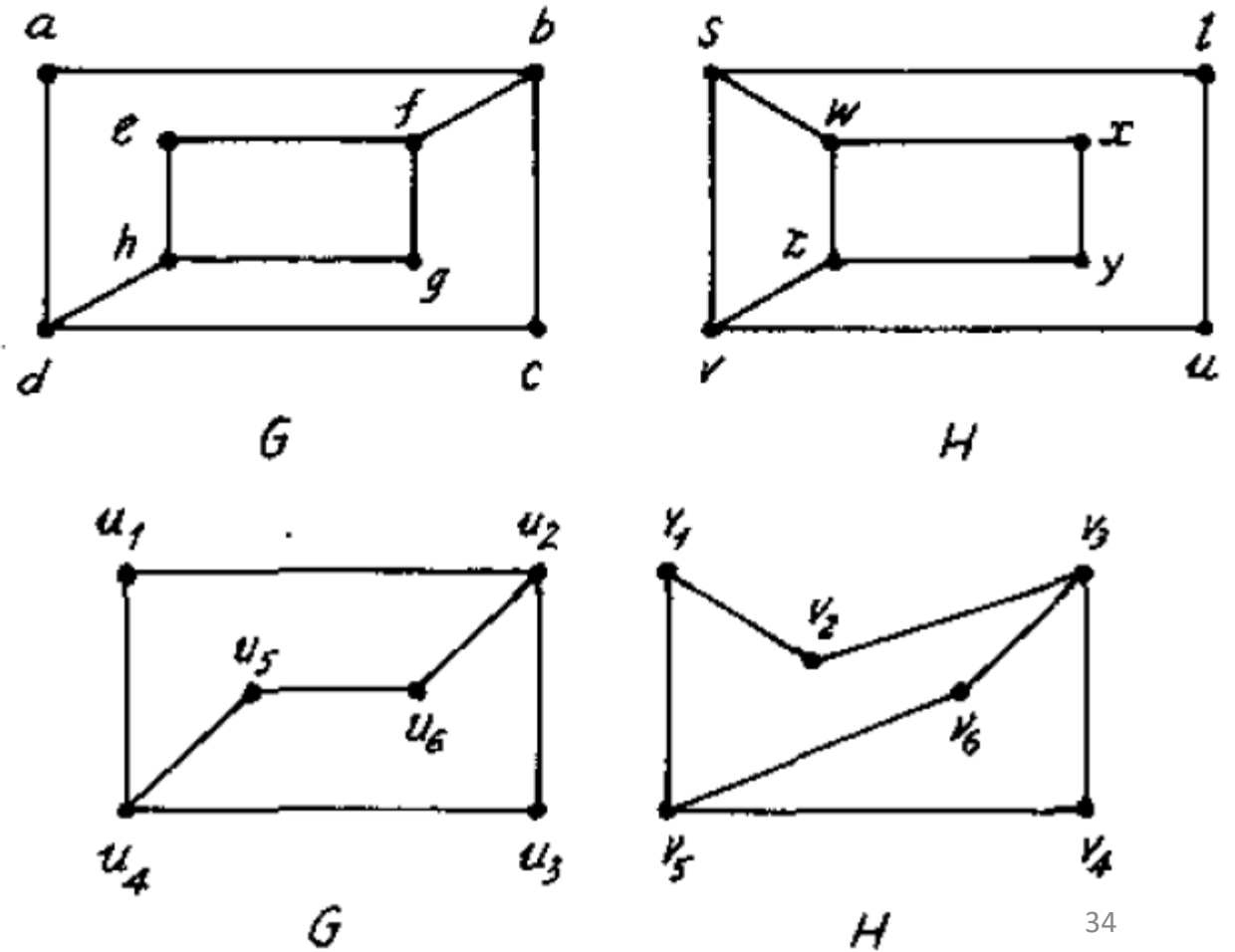
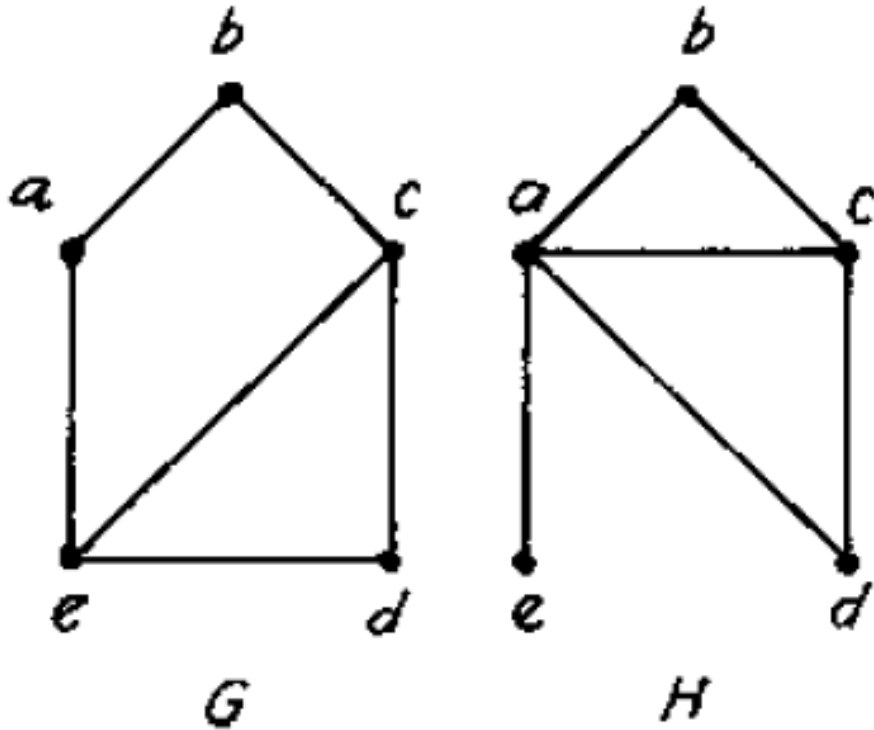
Các đồ thị đơn $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là *đẳng cấu* nếu có hàm song ánh f từ V_1 lên V_2 sao cho các đỉnh a và b là liên kề trong G_1 nếu và chỉ nếu $f(a)$ và $f(b)$ là liên kề trong G_2 với mọi a và b trong V_1 . Hàm f như thế được gọi là *một đẳng cấu*.

Nói cách khác khi hai đơn đồ thị là đẳng cấu, sẽ tồn tại một phép tương ứng một-một giữa các đỉnh của hai đồ thị bảo toàn quan hệ liên kề.



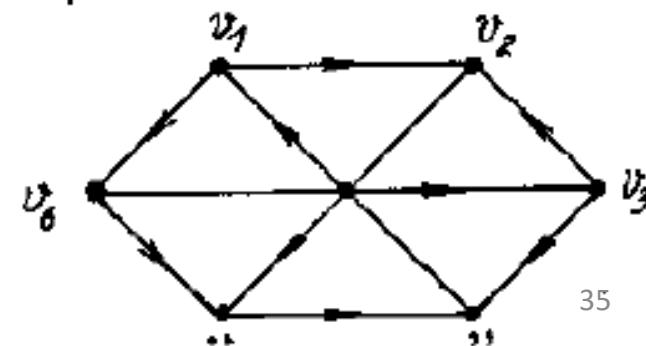
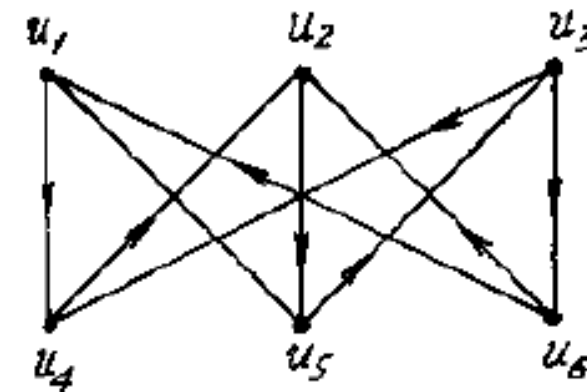
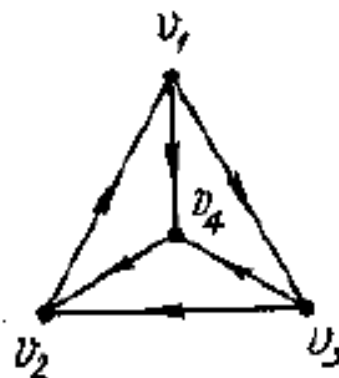
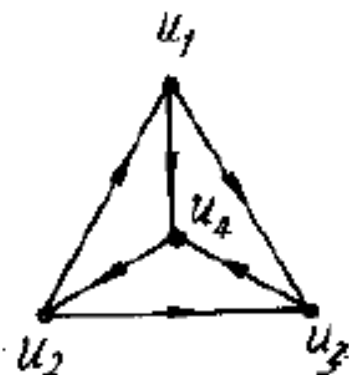
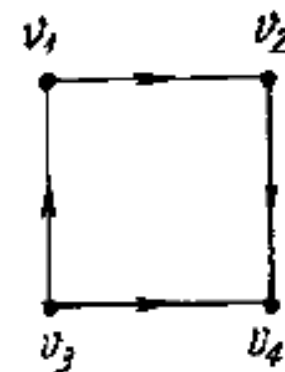
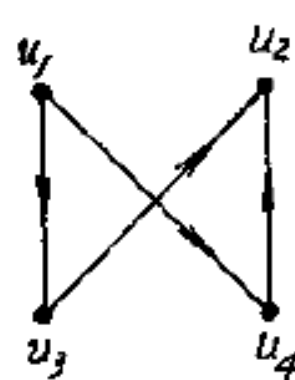
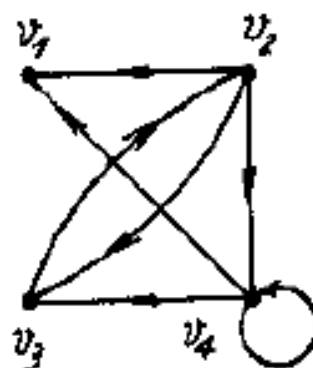
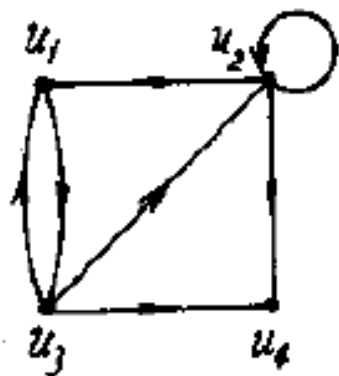
Sự đẳng cấu của hai đồ thị (2)

Các cặp đồ thị sau có đẳng cấu hay không?



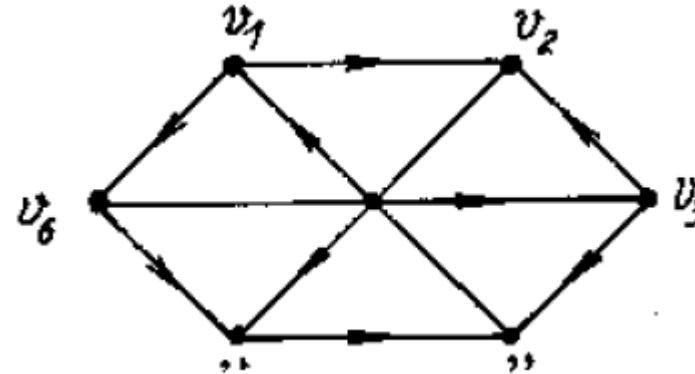
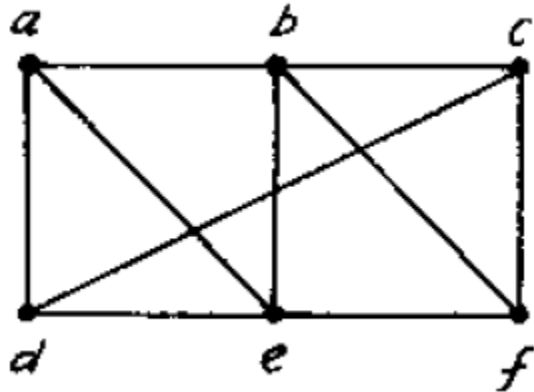
Sự đẳng cấu của hai đồ thị (3)

Các cặp đồ thị sau có đẳng cấu hay không?



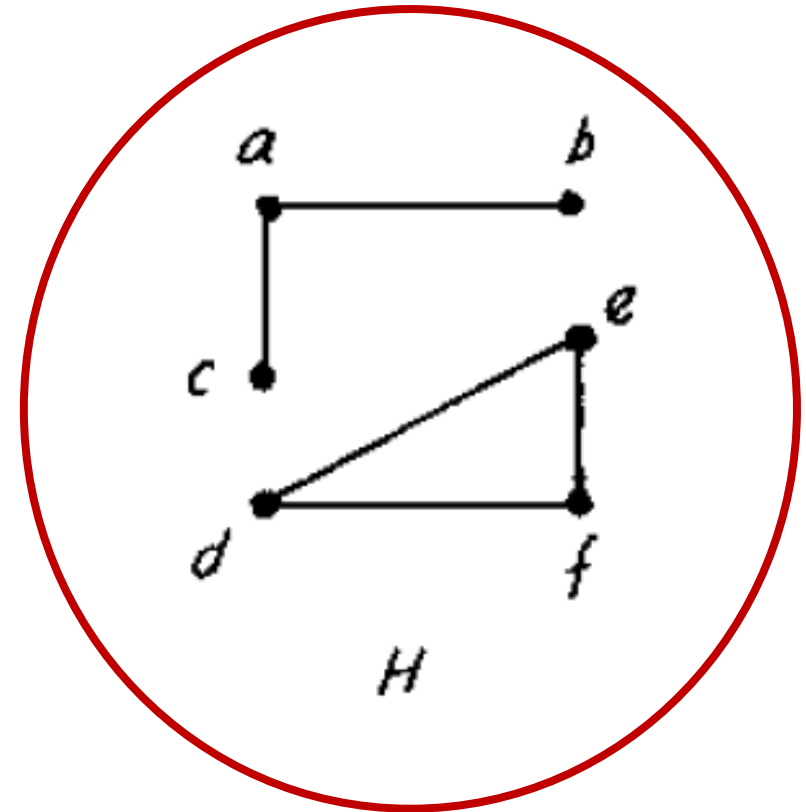
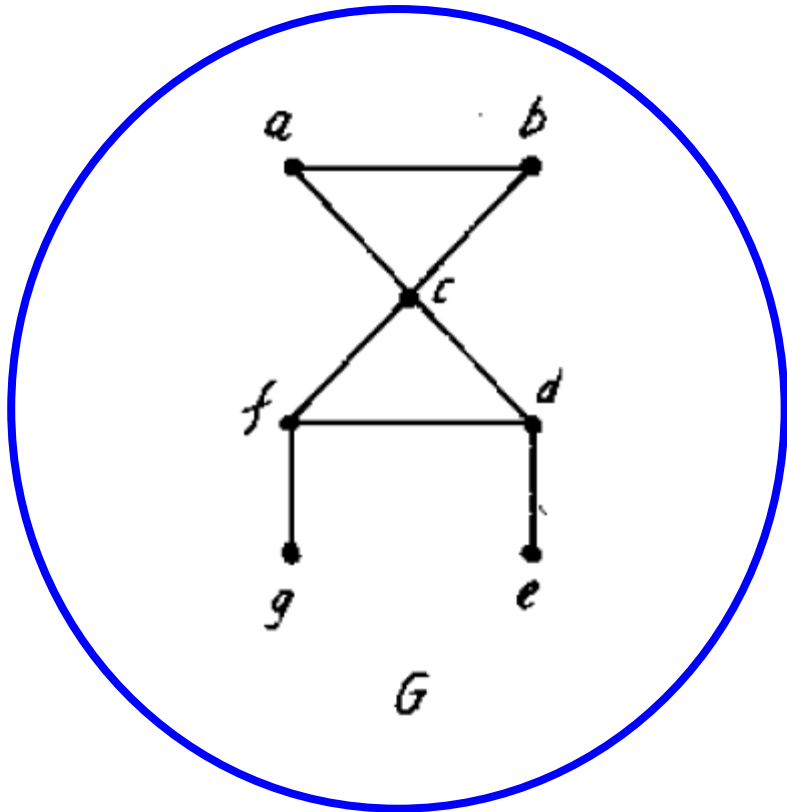
Đường đi, chu trình

- Đường đi độ dài s từ u đến v trong đơn đồ thị là một dãy các đỉnh $x_0, x_1, \dots, x_s$ mà $x_0 = u; x_s = v$ và $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{s-1}, x_s)$ là các cạnh của đồ thị.
- Đường đi được gọi là chu trình nếu đường đi có bắt đầu và kết thúc tại một đỉnh.
- Đường đi (hay chu trình) trong đơn đồ thị được gọi là đường đi đơn (chu trình đơn) nếu nó không chứa một cạnh quá một lần.



Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

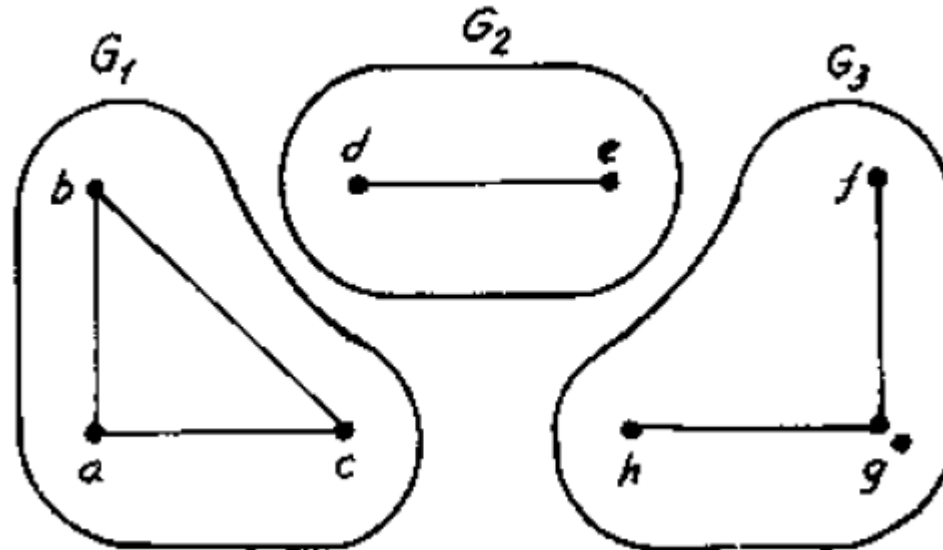


Định lý: Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn.

Chứng minh: Giả sử u và v là hai đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$. Vì G là liên thông nên có ít nhất một đường đi giữa u và v . Gọi $x_0, x_1, \dots, x_n$ với $x_0 = u$ và $x_n = v$, là dãy các đỉnh của đường đi có độ dài ngắn nhất. Đây chính là đường đi đơn cần tìm. Thật vậy, giả sử nó không là đường đi đơn, khi đó, $x_i = x_j$ với $0 \leq i < j$. Điều này có nghĩa là giữa các đỉnh u và v có đường đi ngắn hơn qua các đỉnh $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, \dots, x_n$ nhận được bằng cách xoá đi các cạnh tương ứng với dãy các đỉnh $x_i, \dots, x_{j-1}$.

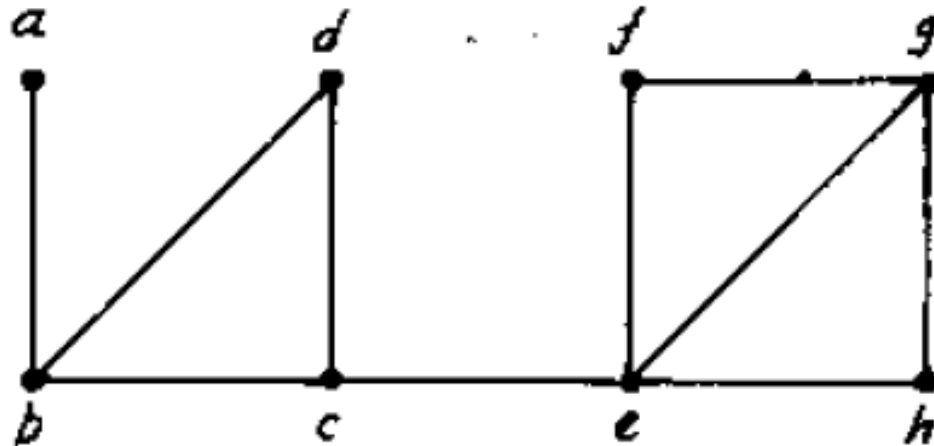
Các thành phần liên thông

Một đồ thị không liên thông là hợp của nhiều đồ thị con liên thông (các đồ thị con không có đỉnh chung). Các đồ thị con liên thông rời nhau như vậy được gọi là các thành phần liên thông.



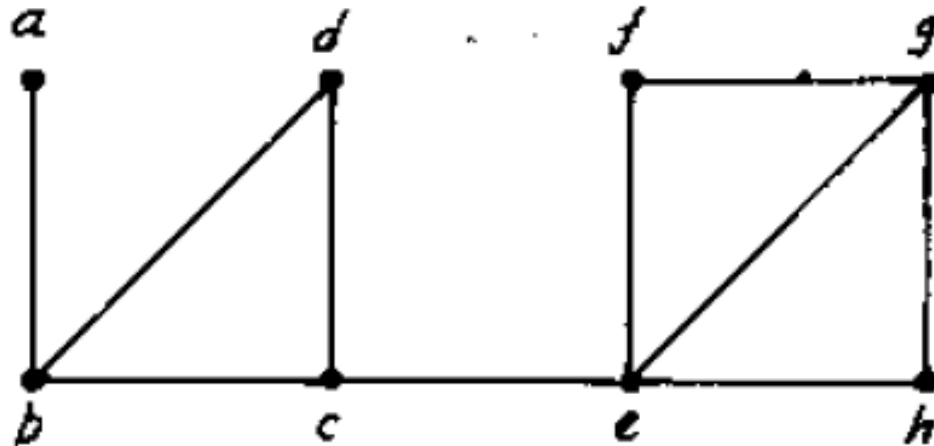
Đỉnh khớp (điểm khớp)

- Một đỉnh được gọi là đỉnh khớp nếu như việc xóa đi đỉnh này và tất cả các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra đồ thị mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị gốc.
- Các đỉnh nào trong đồ thị dưới đây là đỉnh khớp?



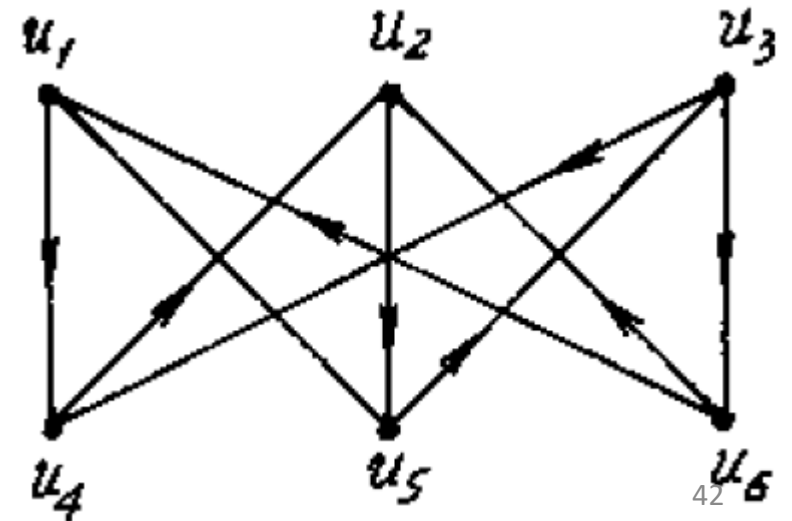
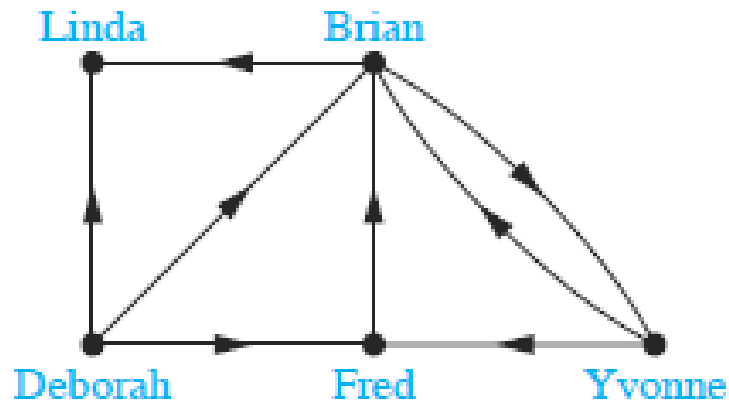
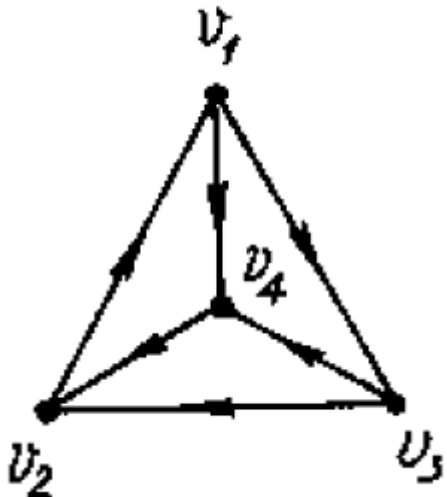
Cầu (cạnh cắt)

- Một cạnh được gọi là cầu nếu như việc xóa đi cạnh này sẽ tạo ra đồ thị mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị gốc.
- Các cạnh nào trong đồ thị dưới đây là cầu?



Tính liên thông trong đồ thị có hướng

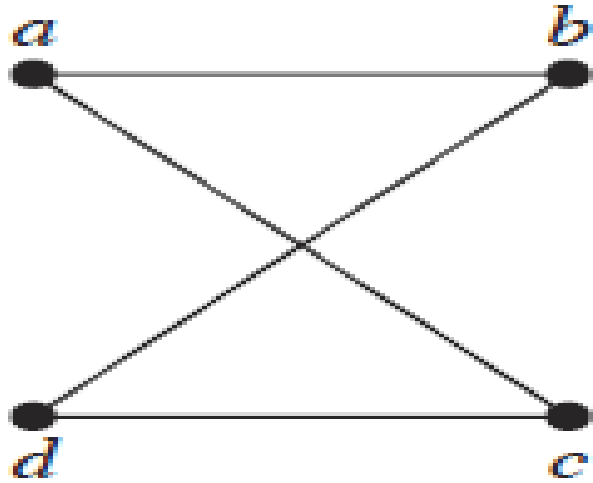
- Đồ thị có hướng gọi là **liên thông mạnh** nếu có đường đi từ a tới b và từ b đến a với mọi đỉnh a, b của đồ thị;
- Đồ thị có hướng gọi là **liên thông yếu** nếu luôn tồn tại đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ khi ta không quan tâm đến hướng của các cạnh. Đồ thị liên thông mạnh cũng là đồ thị liên thông yếu.



Đếm số đường đi giữa các đỉnh (1)

- Cho G là một đồ thị (có thể có cạnh bội, khuyên) với ma trận liên kề A , khi đó số đường đi khác nhau độ dài r từ i đến j bằng giá trị phần tử (i, j) của ma trận A^r .
- Chứng minh bằng quy nạp
 - Giả sử phần tử (i, j) của ma trận A^r là số đường đi khác nhau độ dài r từ i đến j .
 - Vì $A^{r+1} = A^r \times A$ nên phần tử (i, j) của A^{r+1} bằng
$$a_{i,j}^{r+1} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^r a_{k,j} = a_{i,1}^r a_{1,j} + a_{i,2}^r a_{2,j} + \cdots + a_{i,n}^r a_{n,j},$$
 trong đó $a_{i,k}^r$ là phần tử (i, k) của A^r , là số đường đi độ dài r từ i đến k .

Đếm số đường đi giữa các đỉnh (2)



Đếm số đường đi độ dài 4 từ
a đến d

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh

1) K_9

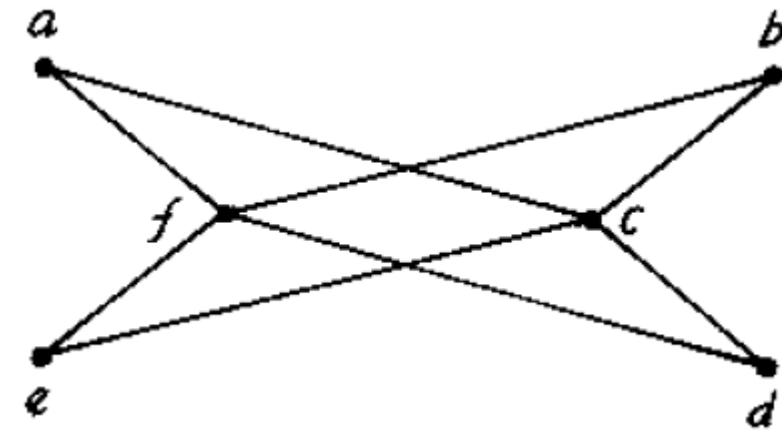
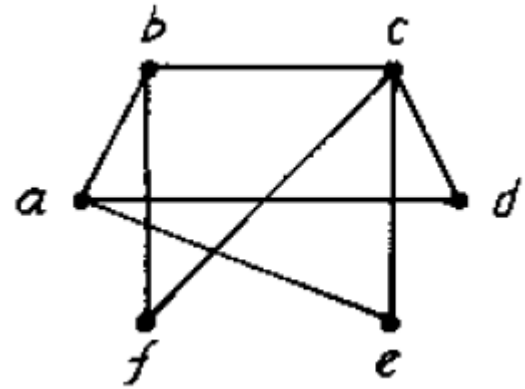
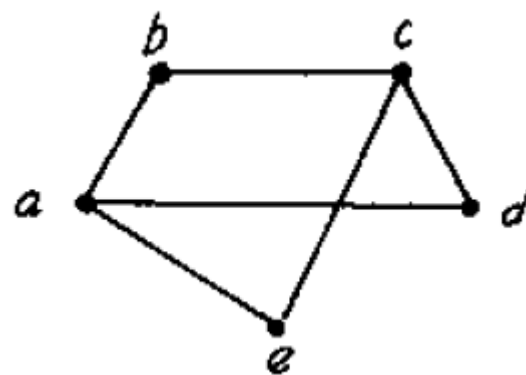
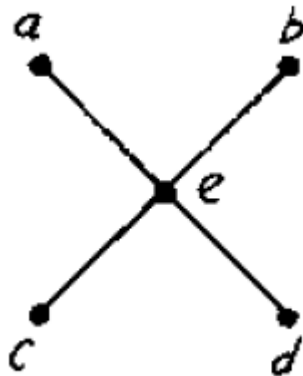
2) C_{15}

3) W_{15}

4) $K_{3,4}$

5) Q_7

Đồ thị nào dưới đây là đồ thị phân đôi (hai phía)



Dựng và tính số cạnh của đồ thị đơn có bậc các đỉnh như sau

1) 4, 3, 3, 2, 2

2) 3, 3, 3, 3, 2

3) 1, 2, 3, 4, 5

4) 1, 2, 3, 4, 4

Thách đố:

Có n đội bóng, đội thứ i đăng kí đá bị b_i trận. Hãy xếp lịch đá sao cho 2 đội bất kì đá với nhau không quá 1 trận và với mỗi đội số trận đá trên sân nhà và sân khách không vượt quá 1.

Gọi G là đồ thị có v đỉnh và e cạnh, còn M, m tương ứng là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của các đỉnh của G . Chỉ ra rằng

a) $\frac{2e}{v} \geq m,$

b) $\frac{2e}{v} \leq M.$

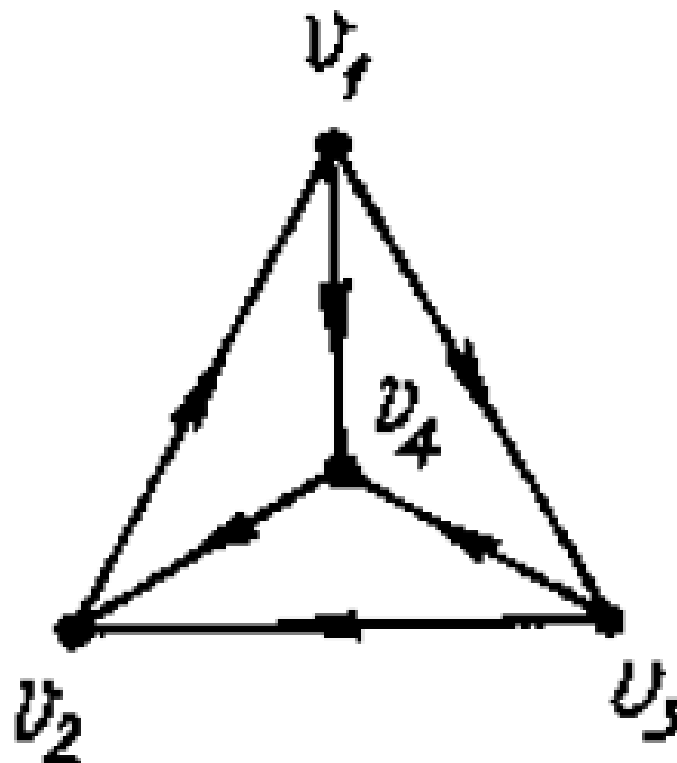
Chứng minh rằng nếu G là đồ thị đơn phân đôi có v đỉnh và e cạnh, khi đó $e \leq v^2/4$.

Chứng minh rằng nếu G là đồ thị đơn có n đỉnh, khi đó hợp của G và $\overline{G}$ là K_n .

Chỉ ra rằng nếu đơn đồ thị G có k thành phần liên thông và các thành phần liên thông này tương ứng có $n_1, n_2, \dots, n_k$ đỉnh, khi đó số các cạnh của G không vượt quá $\sum_{i=1}^k C(n_i, 2)$

- Chứng tỏ rằng đồ thị liên thông có n đỉnh thì có ít nhất $n-1$ cạnh.
- Chứng tỏ rằng trong một đơn đồ thị luôn tồn tại đường đi từ một đỉnh bậc lẻ tới một đỉnh bậc lẻ khác.
- Cho đơn đồ thị vô hướng, bậc mỗi đỉnh $\geq n/2$. Chứng minh đồ thị liên thông

Đếm số đường đi độ dài 4, độ dài 8 từ v_1 đến v_4

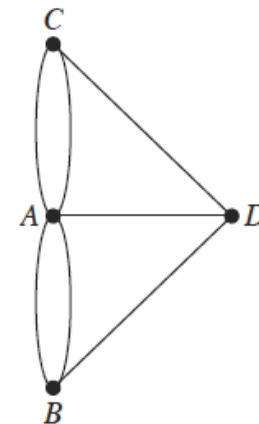
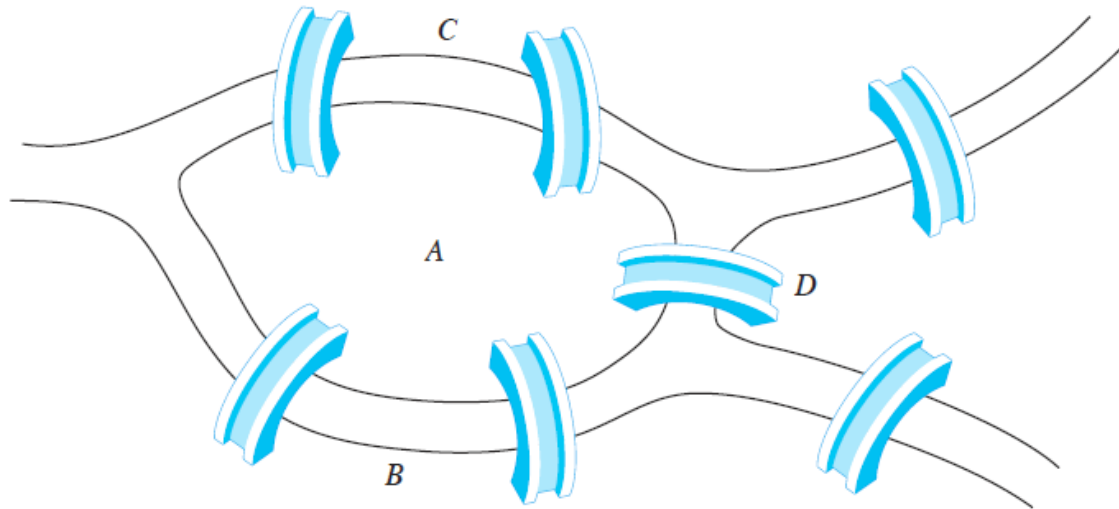


a) Hãy tìm ma trận kề của $K_{2,3}$.

b) Tìm số đường đi độ dài 3 và 4 từ một đỉnh bậc 3 đến một đỉnh bậc 2.

Chu trình Euler và đường đi Euler (1)

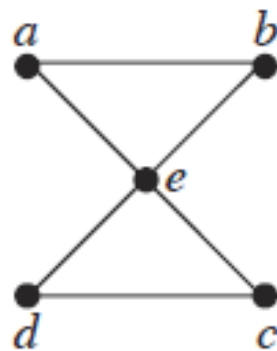
- Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là chu trình Euler;
- Đường đi đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là đường đi Euler;



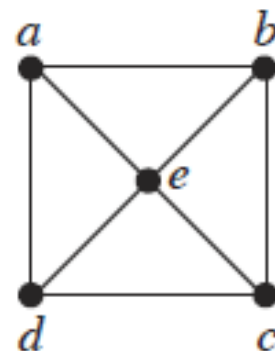
Chu trình Euler và đường đi Euler (2)

Đồ thị nào có chu trình Euler?

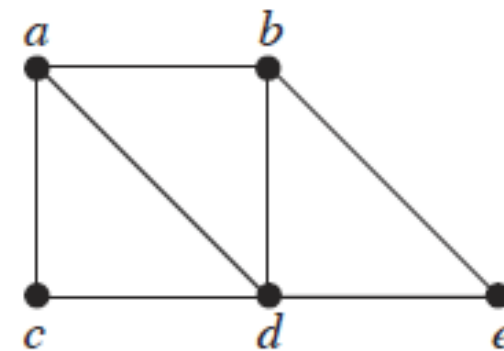
Đồ thị nào có đường đi Euler?



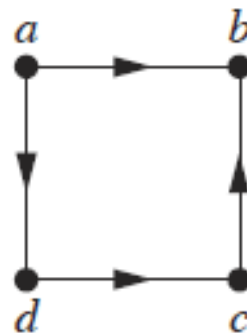
G_1



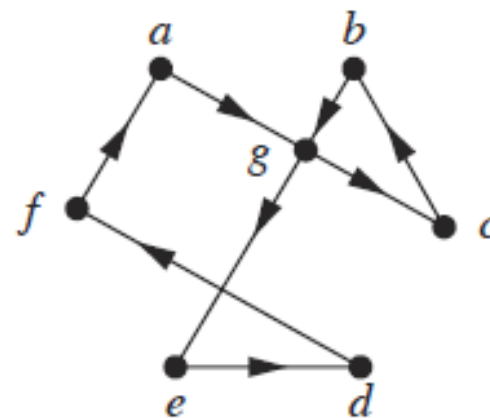
G_2



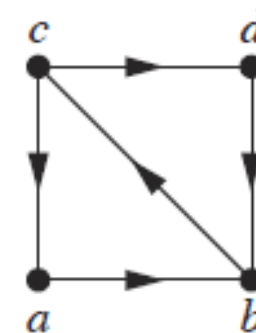
G_3



H_1



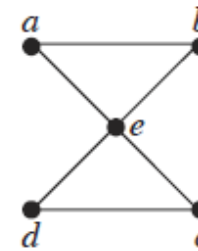
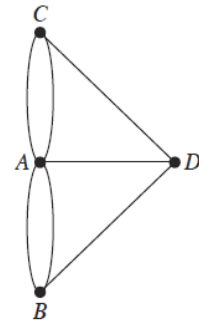
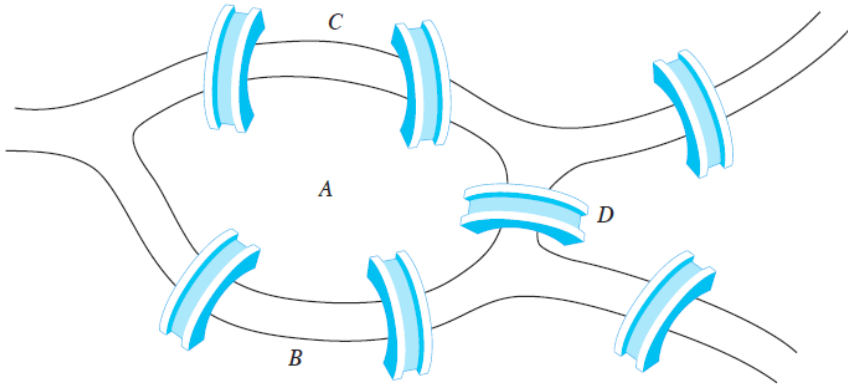
H_2



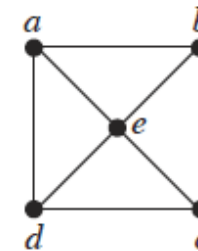
H_3

Điều kiện cần và đủ để đồ thị có chu trình Euler

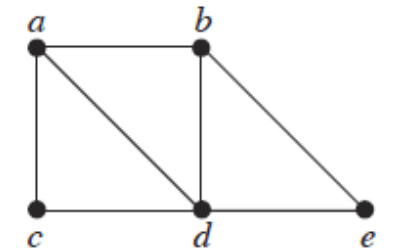
Một đa đồ thị **liên thông** có chu trình Euler nếu và chỉ nếu **mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn**.



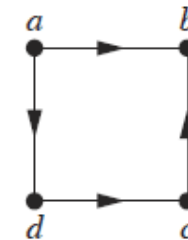
G_1



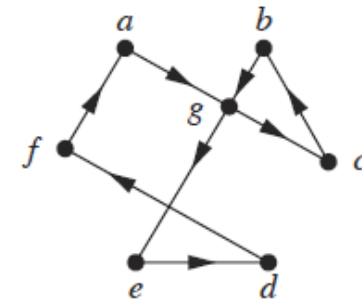
G_2



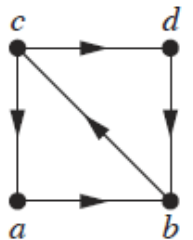
G_3



H_1



H_2



H_3

THUẬT TOÁN Xây dựng chu trình Euler.

procedure *Euler* (*G* : đa đồ thị liên thông với tất cả các đỉnh bậc chẵn)

chu trình := chu trình trong *G* bắt đầu tại một đỉnh được chọn
 tùy ý và các cạnh được thêm vào để xây dựng đường
 đi qua các đỉnh và cuối cùng quay lại đỉnh này.

H := *G* với các cạnh của *G* sau khi bỏ đi chu trình

while *H* còn các cạnh

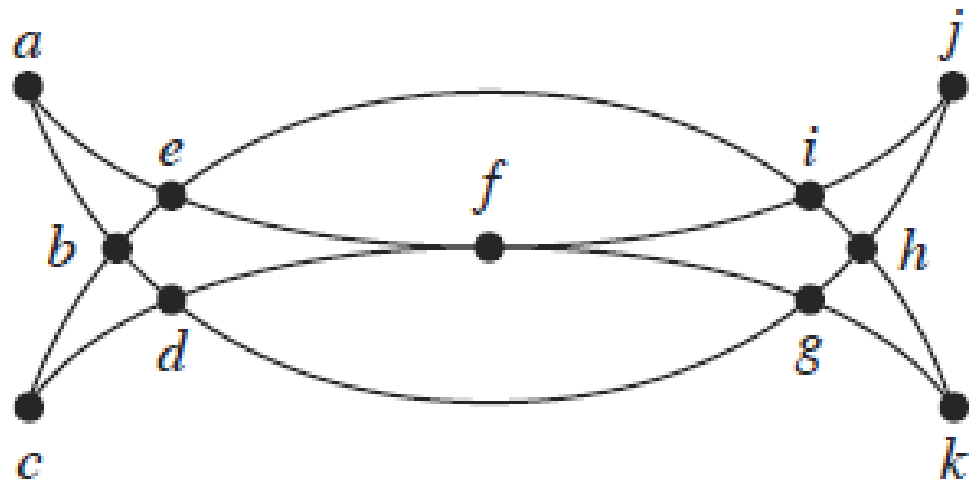
begin

Chu trình con := chu trình trong *H* bắt đầu tại đỉnh trong *H* cũng
 là đỉnh đầu mút của một cạnh thuộc chu trình.

H := *H* với các cạnh của *chu trình con*, và tất cả các đỉnh cô
 lập bị loại bỏ.

chu trình := *chu trình* với *chu trình con* được chèn vào tại một
 đỉnh thích hợp

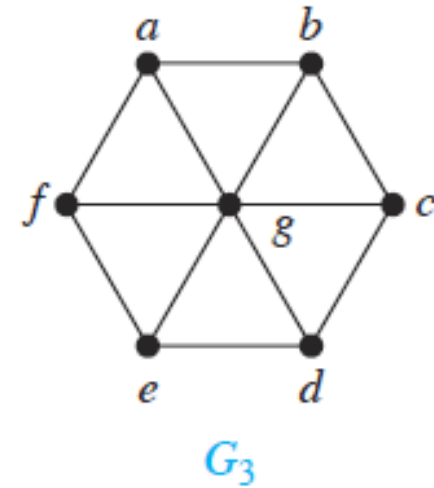
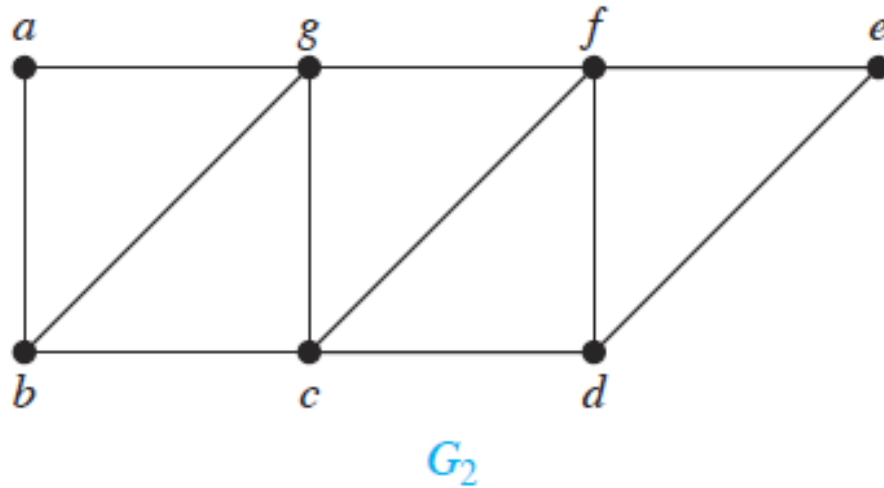
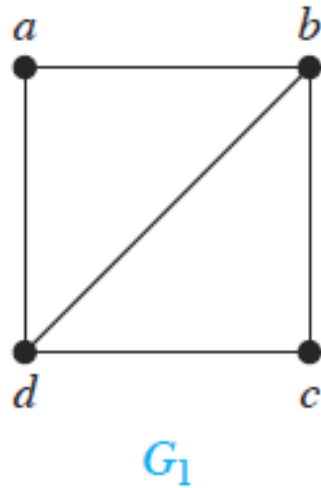
end {*chu trình* là chu trình Euler}



Điều kiện cần và đủ để đồ thị có đường đi Euler

Một đa đồ thị **liên thông** có đường đi Euler nhưng không có chu trình nếu và chỉ nếu đồ thị có **đúng 2 đỉnh bậc lẻ**.

Thuật toán tìm đường đi Euler???

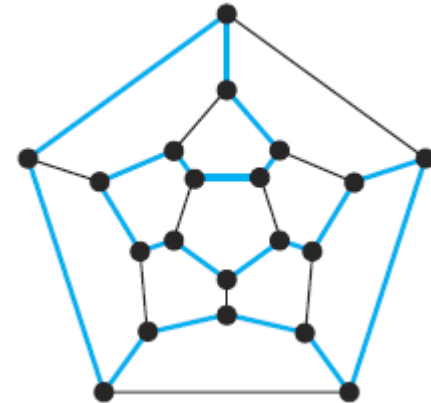
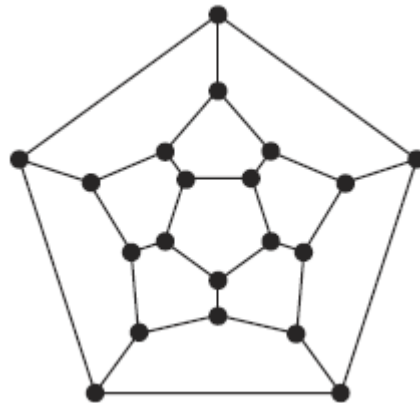
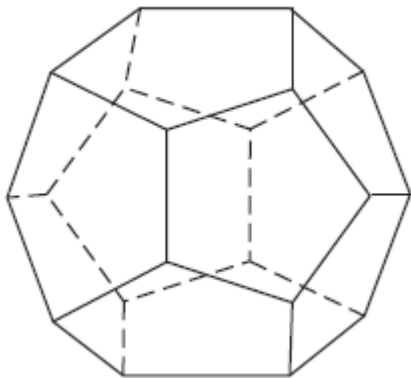


Thách đố

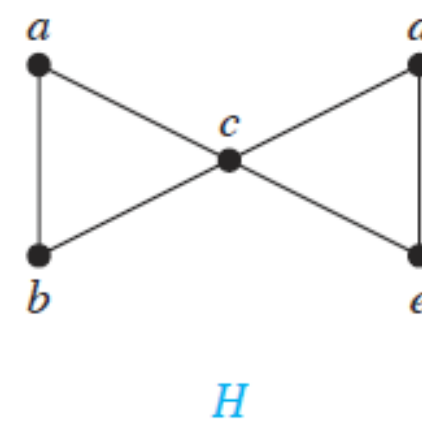
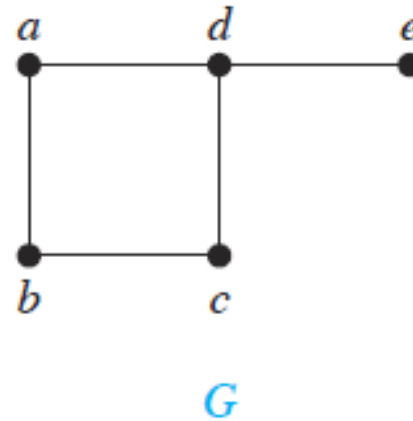
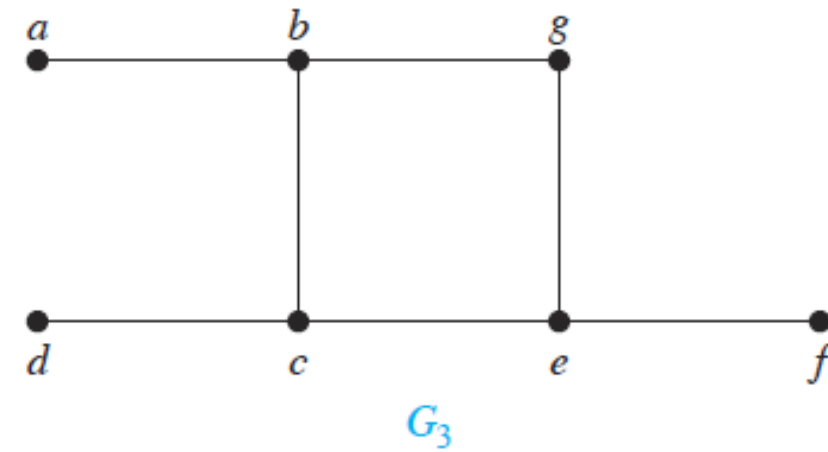
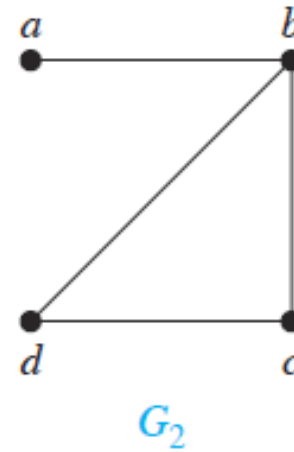
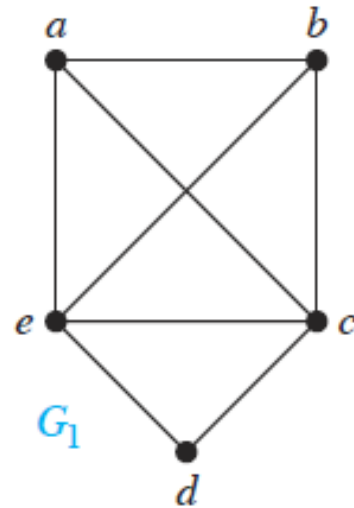
- 1) Tìm điều kiện cần đủ cho đồ thị có hướng để chu trình Euler và có đường đi Euler.
- 2) Cho một đa đồ thị vô hướng, vẽ đa đồ thị đó bằng ít nét vẽ nhất.

Đường đi, chu trình Hamilton

- Đường đi $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ trong đồ thị $G = (V, E)$, $n = |V|$, được gọi là đường đi Hamilton nếu $x_i \neq x_j$ với $i \neq j$.
- Chu trình $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ trong đồ thị $G = (V, E)$, $n = |V|$, được gọi là chu trình Hamilton nếu $x_i \neq x_j$ với $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$.
- **Có điều kiện cần và đủ để đồ thị có đường đi, chu trình Hamilton?**
- **Có thuật toán tìm đường đi, chu trình Hamilton?**

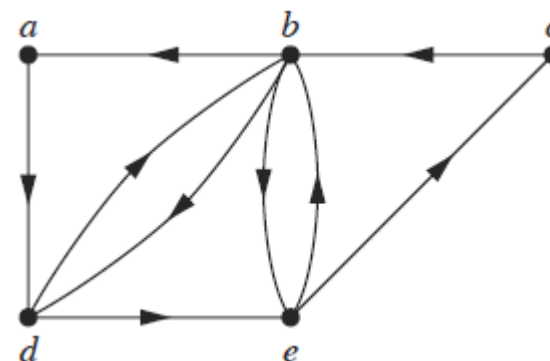
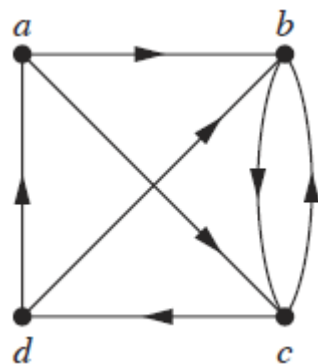
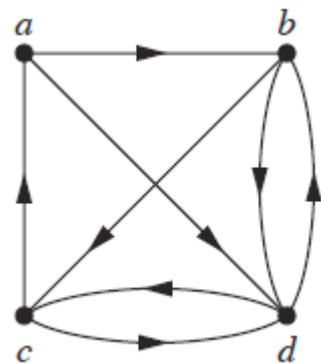
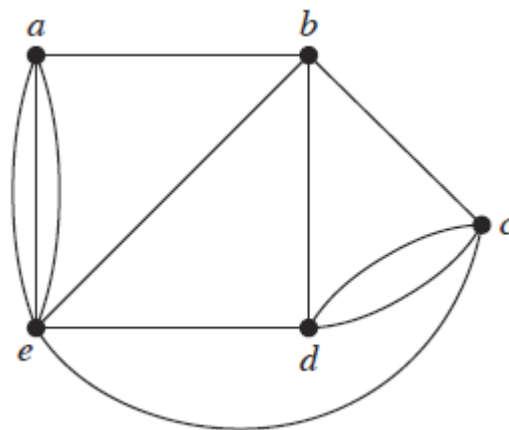
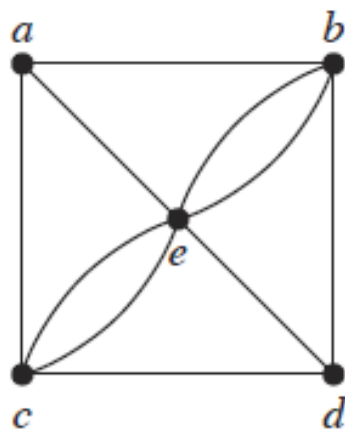


1) Tìm đường đi, hành trình Hamilton

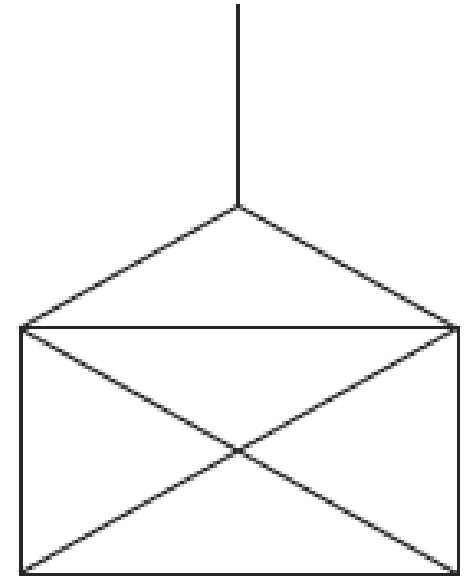
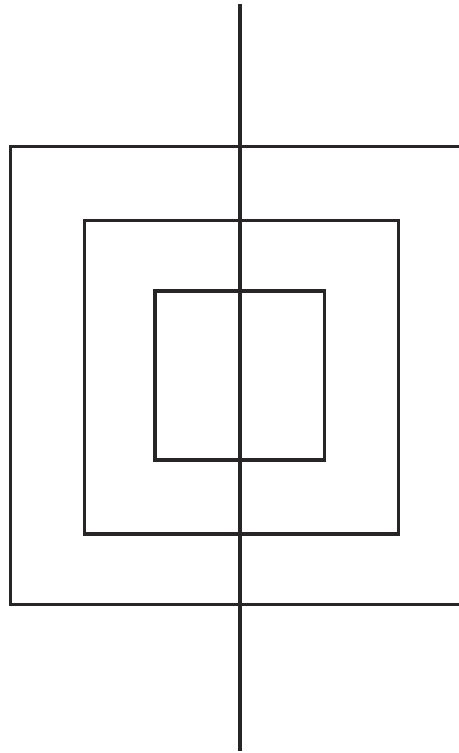
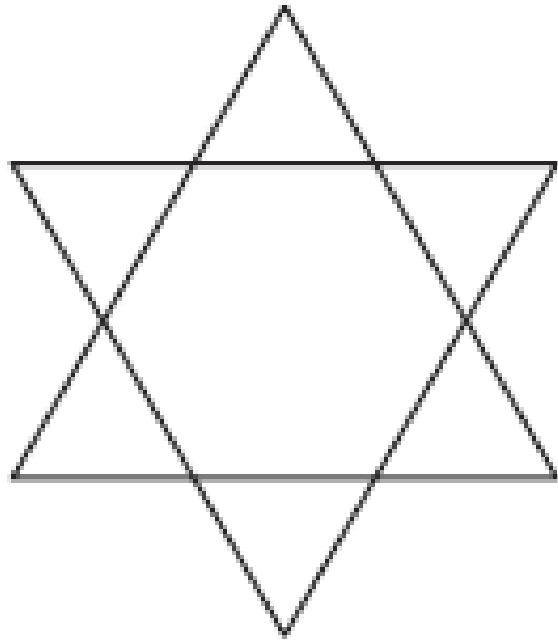


2) Chỉ ra rằng K_n luôn có chu trình Hamilton

Tìm đường đi, chu trình Euler



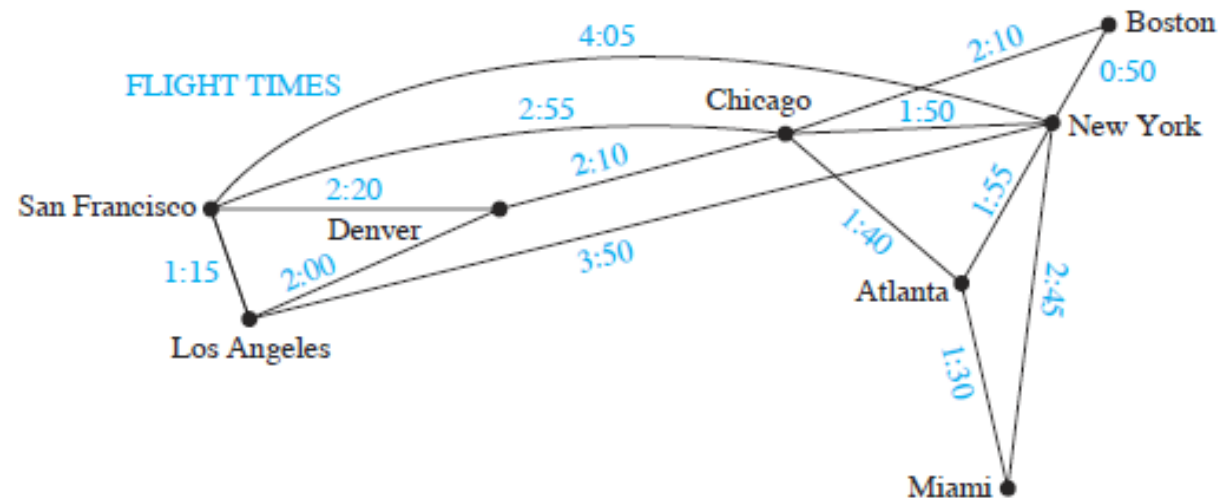
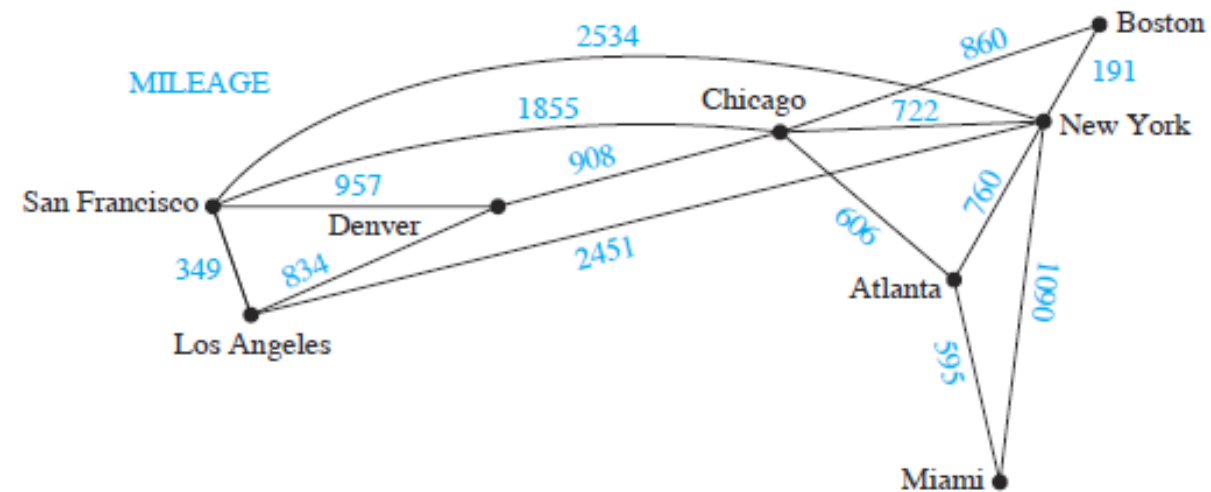
Vẽ bằng một nét



- 1) với giá trị nào của m, n thì $K_{m,n}$ có chu trình Euler, đường đi Euler?
- 2) với giá trị nào của m, n thì $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton, đường đi Hamilton?

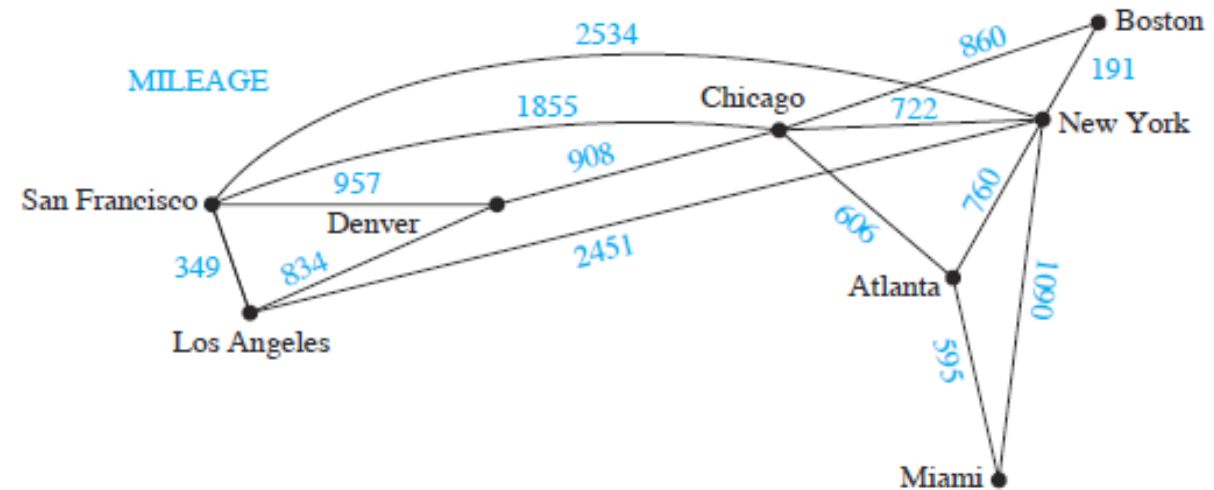
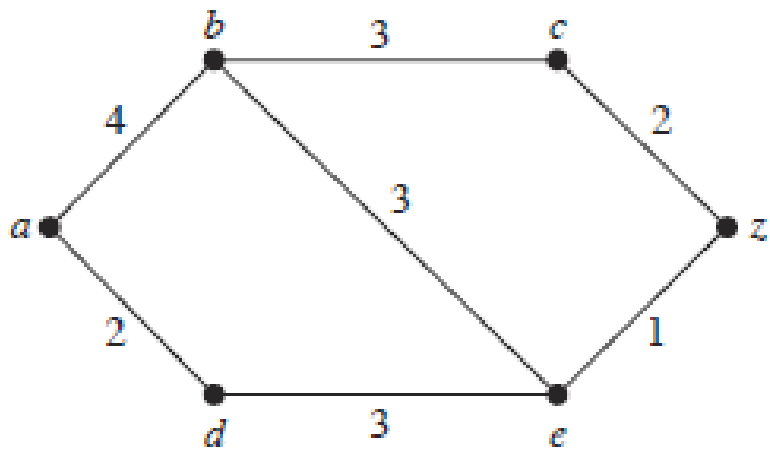
Đồ thị có trọng số

- Đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gán một con số (nguyên hoặc thực), được gọi là trọng số ứng với cạnh đó.
- Nhiều bài toán có thể mô hình bằng đồ thị có trọng số.



Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

- Bài toán tìm đường đi ngắn nhất: Tìm đường đi có độ dài ngắn nhất giữa hai đỉnh của đồ thị.
- Ví dụ, tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z



Thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất (1)

THUẬT TOÁN 1. THUẬT TOÁN DIJKSTRA.

procedure *Dijkstra* (G : đơn đồ thị liên thông có trọng số, với
trọng số dương)

{ G có các đỉnh $a = v_0, v_1, \dots, v_n = z$ và trọng số $w(v_i, v_j)$,
với $w(v_i, v_j) = \infty$ nếu $\{v_i, v_j\}$ không là một cạnh trong G }

for $i := 1$ **to** n

$L(v_i) := \infty$

$L(a) := 0$

$S := \phi$

{Ban đầu các nhãn được khởi tạo sao cho nhãn của a bằng không,
các đỉnh khác bằng ∞ , tập S là rỗng}

Thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất (2)

while $z \notin S$

begin

$u :=$ đỉnh không thuộc S có nhãn $L(u)$ nhỏ nhất.

$S := S \cup \{u\}$

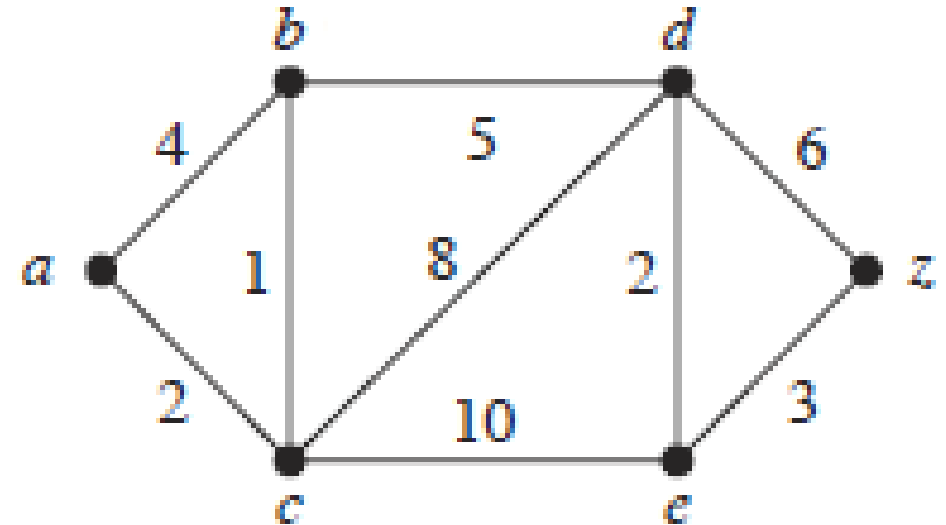
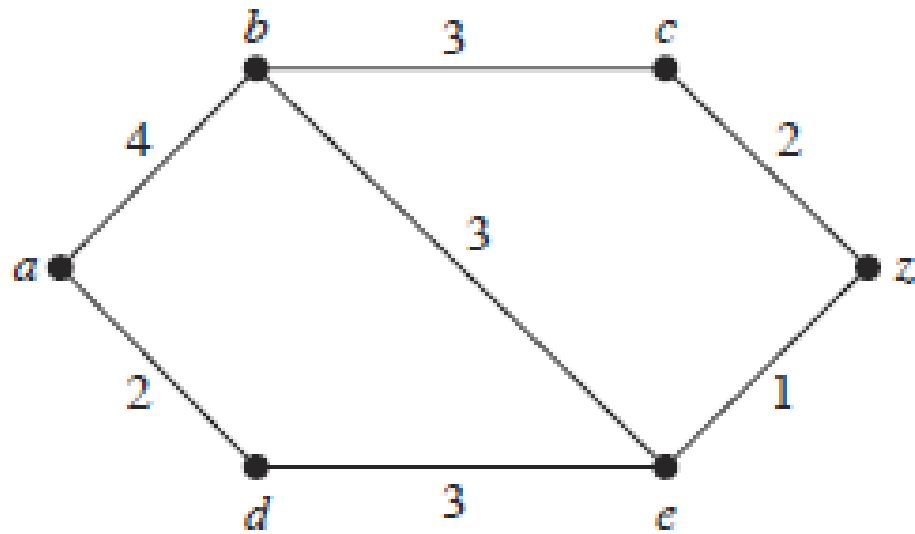
for tất cả các đỉnh v không thuộc S

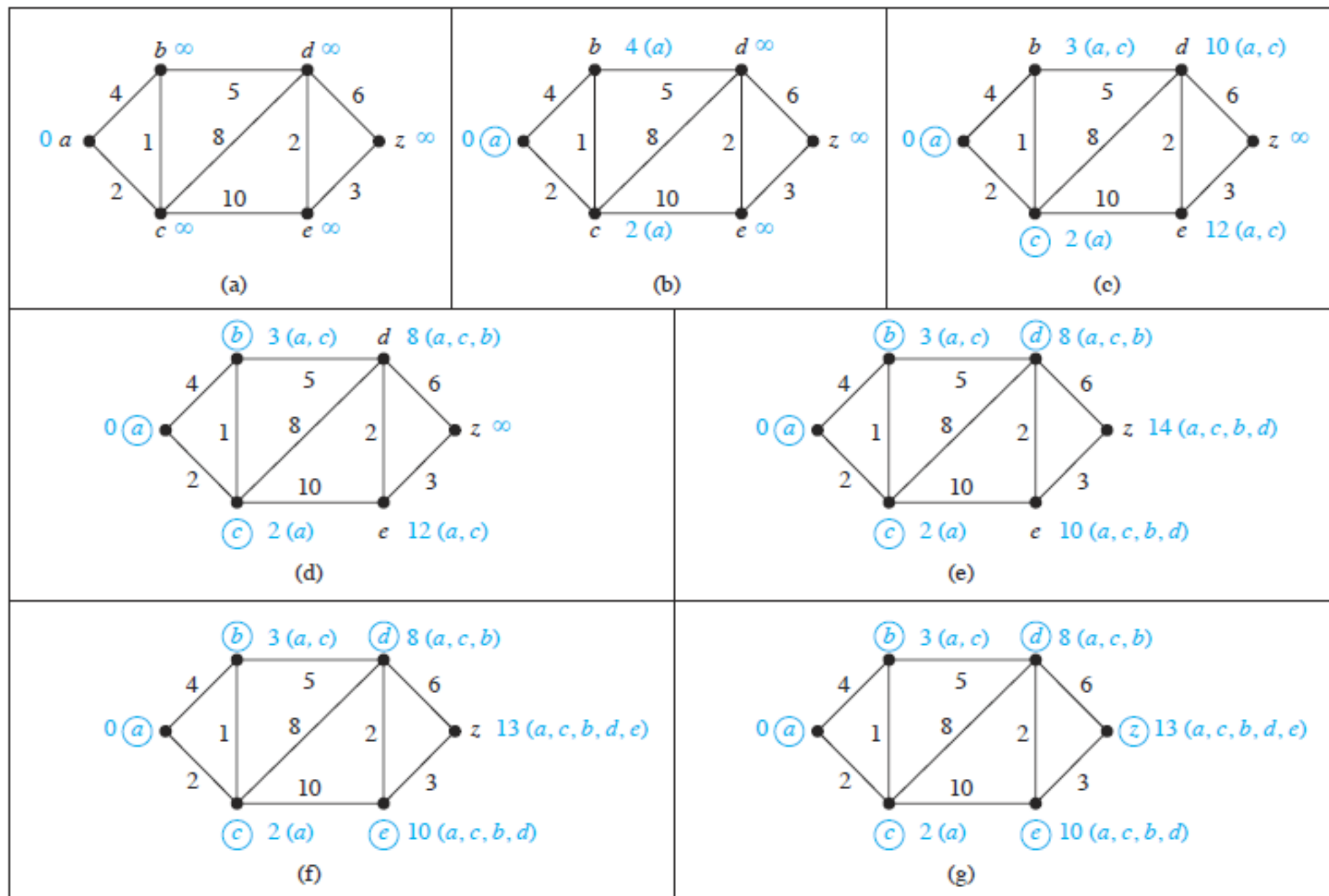
if $L(u) + w(u,v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u,v)$

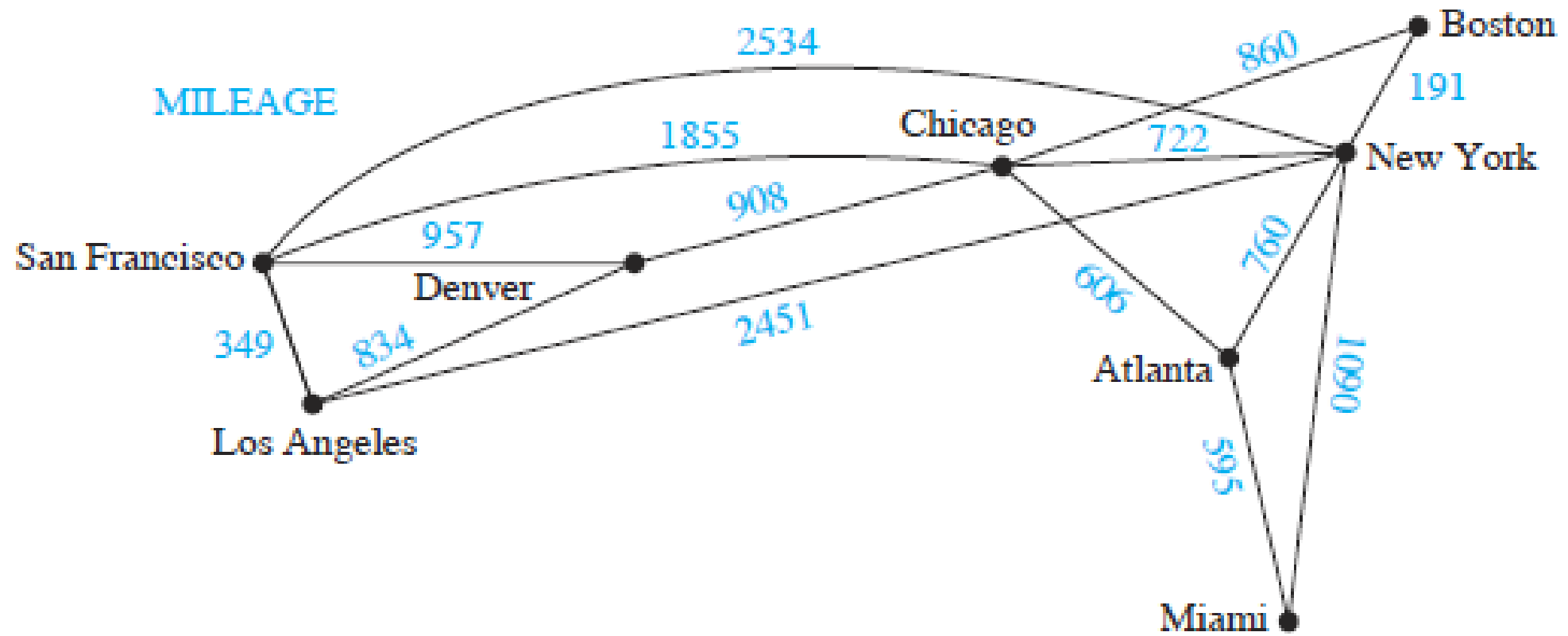
{thêm vào S đỉnh có nhãn nhỏ nhất, và sửa
đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S }

end $\{L(z) = \text{độ dài đường đi ngắn nhất từ } a \text{ tới } z\}.$

Tìm đường đi ngắn nhất bằng thuật toán Dijkstra

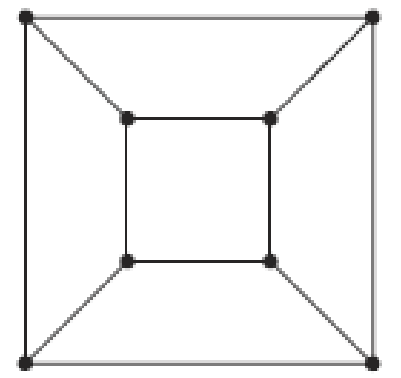
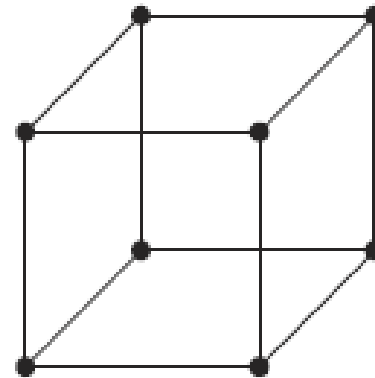
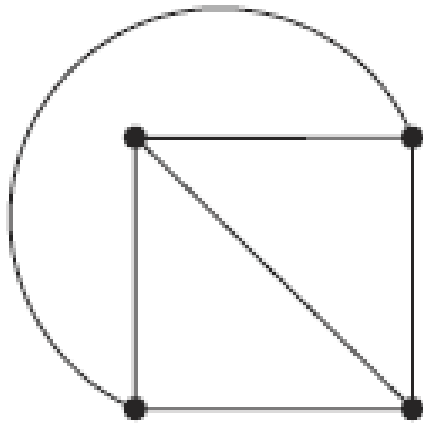
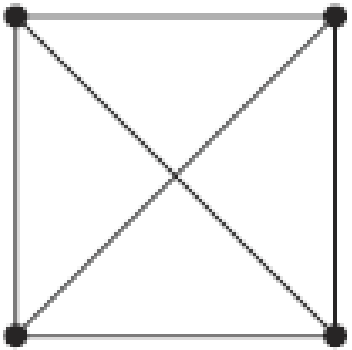






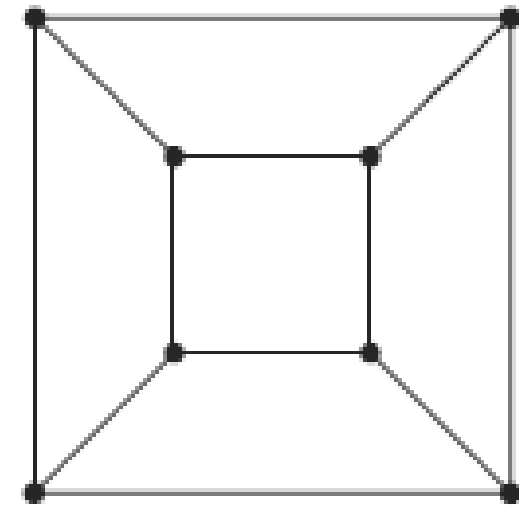
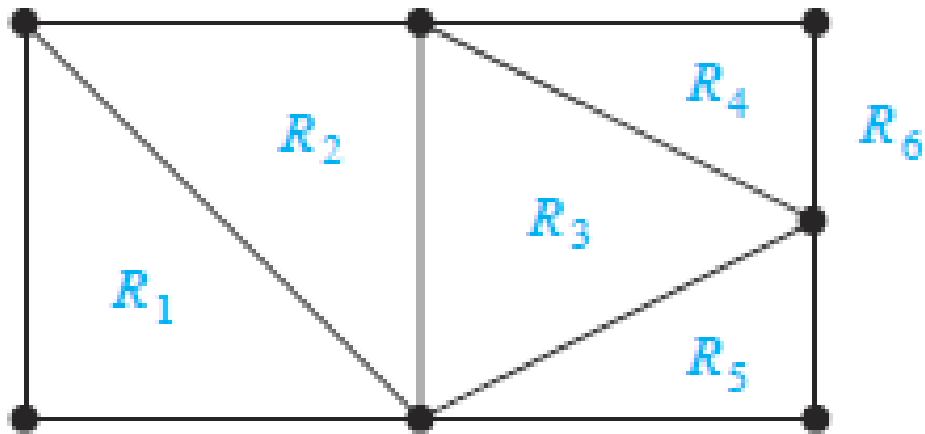
Đồ thị phẳng

- Đồ thị phẳng là đồ thị có thể vẽ được trên mặt phẳng mà không có cạnh nào cắt nhau (ở một điểm không phải là điểm mút của các cạnh)
- Ví dụ, K_4 là đồ thị phẳng



Công thức Euler (1)

- G là đồ thị đơn phẳng liên thông có e cạnh và v đỉnh. Gọi r là số miền trong biểu diễn mặt phẳng của G , khi đó $r = e - v + 2$



Công thức Euler (2)

- Giả sử một đơn đồ thị phẳng liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh bậc bằng 3, đồ thị chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

$$v = 20; e = (20 \times 3)/2 = 30 \rightarrow r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$$

- Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh ($v \geq 3$), khi đó $e \leq 3v - 6$

$$2e/3 \geq r = e - v + 2 \text{ nên } e \leq 3v - 6$$

- Chứng minh K_5 không phẳng

$$K_5 \text{ có 5 đỉnh và 10 cạnh, ta có } 10 > 3 \times 5 - 6$$

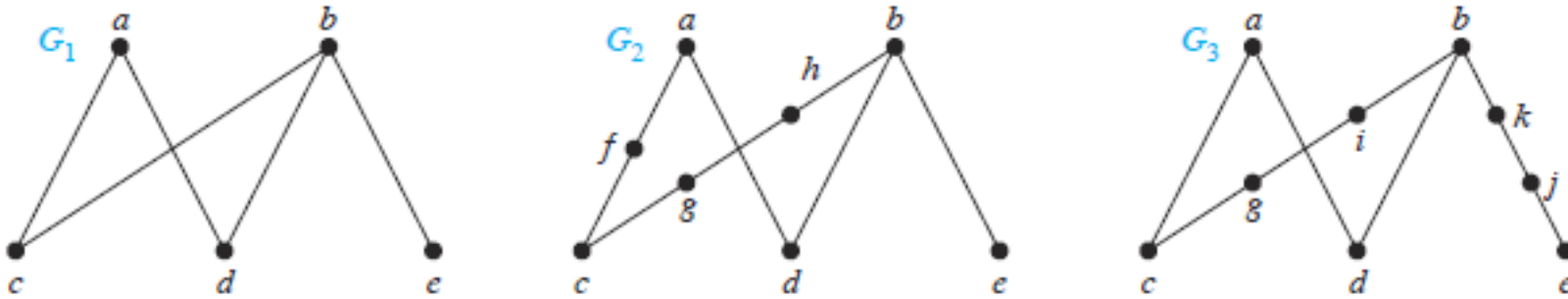
Công thức Euler (3)

- Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh ($v \geq 3$), và không có chu trình độ dài 3, khi đó $e \leq 2v-4$
- Chứng minh $K_{3,3}$ không phẳng

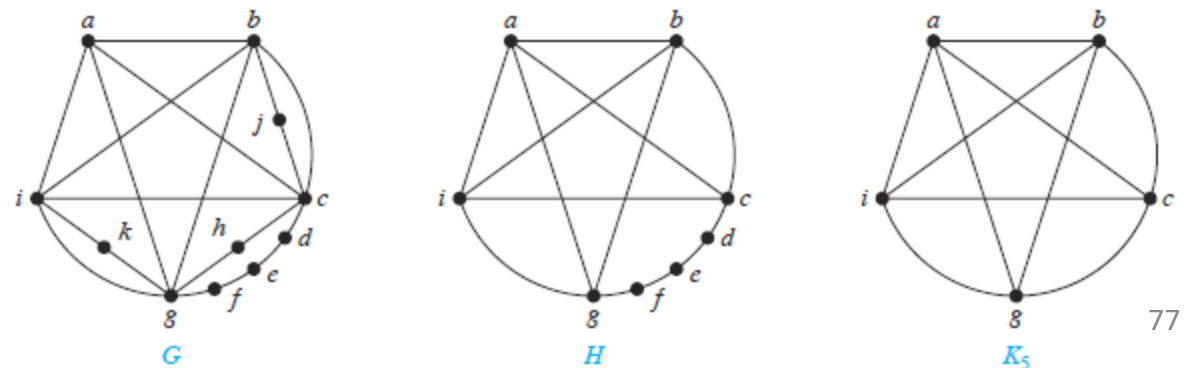
→ K_5 và $K_{3,3}$ là không phẳng, nên nếu đồ thị chứa K_5 hoặc $K_{3,3}$ thì đồ thị không phẳng;

Định lý Kuratowski

- Một đồ thị phẳng G , mọi đồ thị nhận được từ đồ thị G bằng cách bỏ đi cạnh (u,v) và thêm vào đỉnh với w cùng hai cạnh (u,w) và (w,v) cũng là đồ thị phẳng và được gọi là đồng phôi với G .

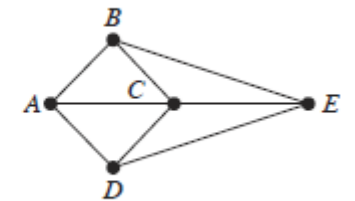
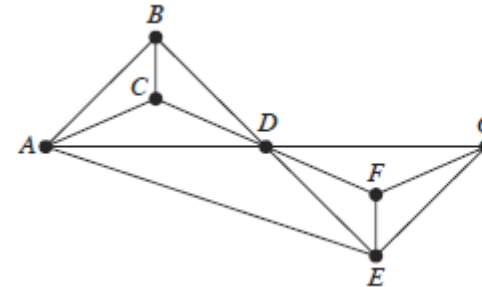
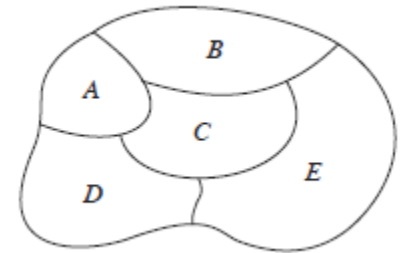
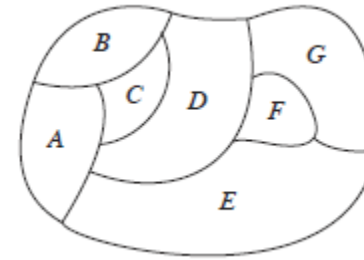


- Đồ thị là không phẳng nếu và chỉ nếu nó chứa một đồ thị con đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$;

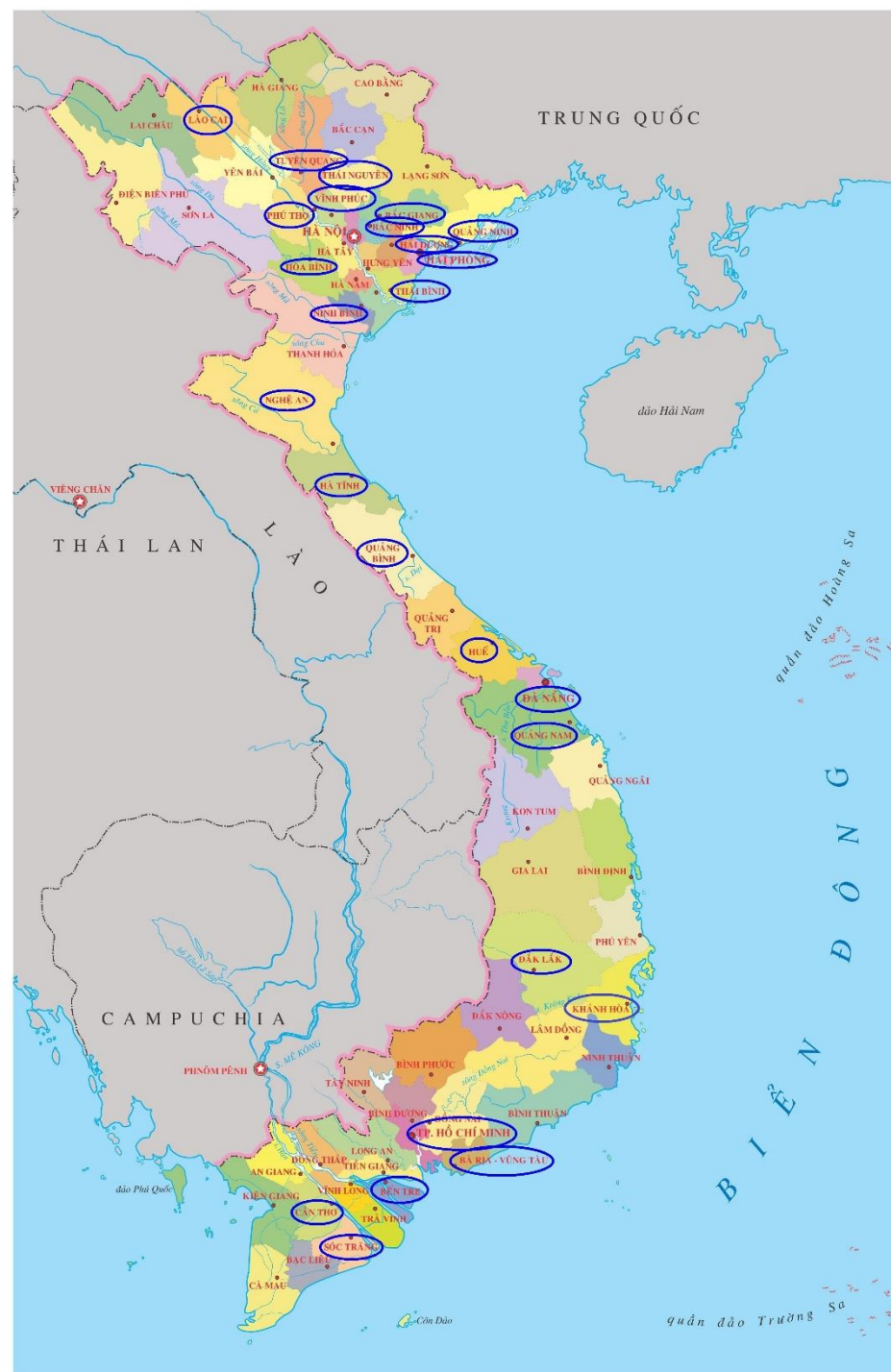


Tô màu đồ thị (1)

- Tô màu bản đồ
 - ✓ Các vùng kề nhau tô bằng màu khác nhau
 - ✓ Dùng ít màu nhất



- Biểu diễn bản đồ bằng đồ thị

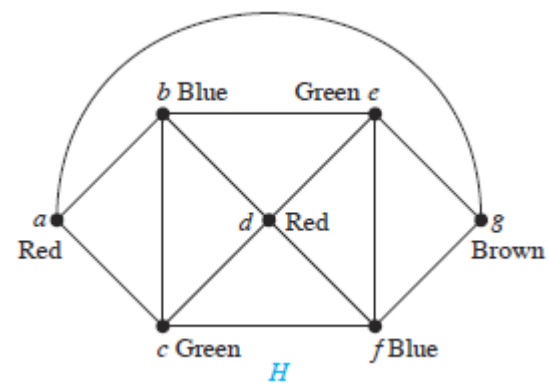
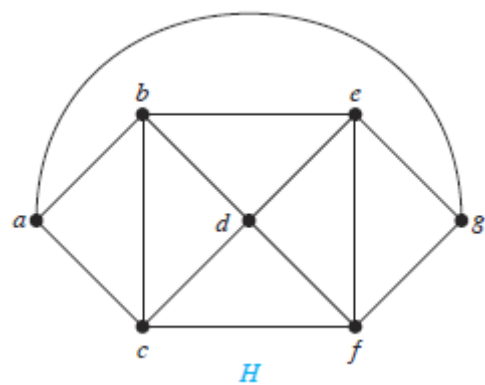
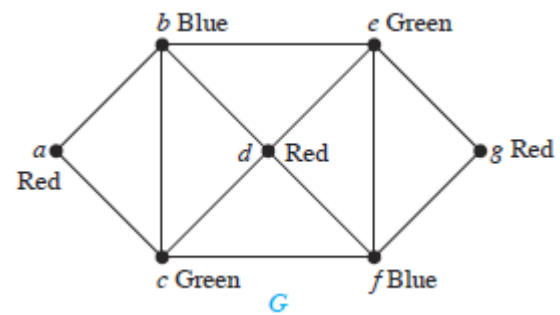
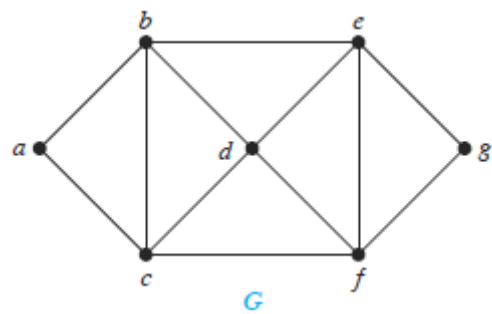


Tô màu đồ thị (2)

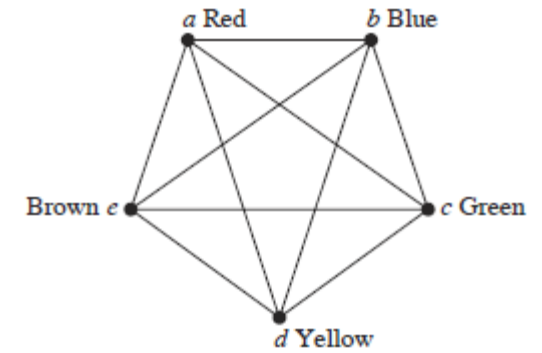
ĐỊNH NGHĨA 1. *Tô màu* một đơn đồ thị là sự gán màu cho các đỉnh của nó sao cho không có hai đỉnh liên kế được gán cùng một màu.

ĐỊNH NGHĨA 2. *Số màu* của một đồ thị là số tối thiểu các màu cần thiết để tô màu đồ thị này.

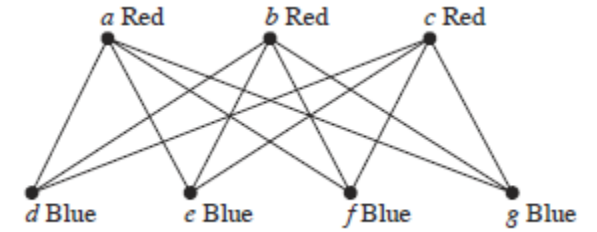
ĐỊNH LÝ 1. *Định lý Bốn Màu.* Số màu của một đồ thị phẳng là không lớn hơn bốn.



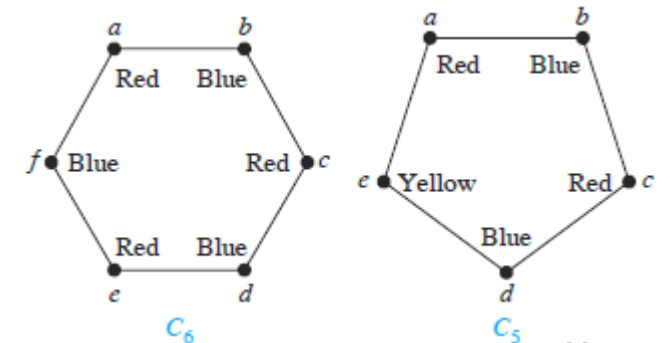
- Số màu của đồ thị K_n



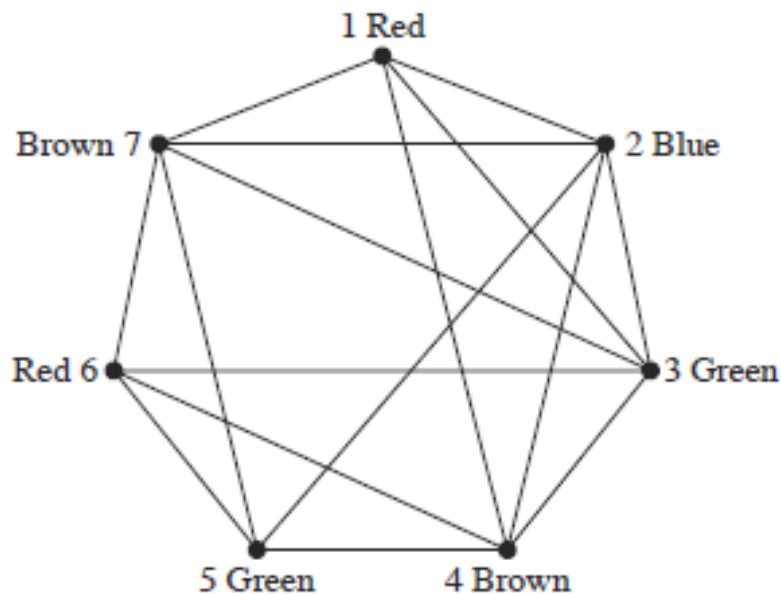
- Số màu của đồ thị $K_{m,n}$



- Số màu của đồ thị C_n



- Bài toán tô màu đồ thị có nhiều ứng dụng
- Ứng dụng lập lịch thi: Lập lịch thi sao cho không có sinh viên nào thi 2 môn cùng một lúc
 - Các môn là đỉnh của đồ thị
 - 2 môn có sinh phải thi cả 2 môn → cạnh
 - Thời gian thi được biểu diễn bằng các màu khác nhau
 - Việc lập lịch chính là tô màu đồ thị



Time Period	Courses
I	1, 6
II	2
III	3, 5
IV	4, 7

Hãy nêu mối quan hệ giữa tổng số bậc của các đỉnh trong một đồ thị vô hướng và số cạnh của nó. Hãy giải thích vì sao có mối quan hệ đó.

Hãy nêu mối quan hệ giữa tổng số bậc-vào và tổng các bậc-ra của các đỉnh trong một đồ thị có hướng. Hãy giải thích vì sao có mối quan hệ đó.

- a) Đồ thị phân đôi là gì?
- b) Đồ thị nào trong các đồ thị K_n , C_n , W_n là đồ thị phân đôi?
- c) Làm thế nào để xác định được một đồ thị có là phân đôi không?

- a) Hãy mô tả ba phương pháp khác nhau để hiệu diễn đồ thị.
- h) Hãy vẽ một đơn đồ thị có ít nhất 5 đỉnh và 8 cạnh. Hãy minh họa cách dùng các phương pháp mô tả ở câu a) để hiệu diễn đồ thị này.

Làm thế nào để có thể xác định xem một đồ thị vô hướng có đường đi Euler hay không?

Làm thế nào để có thể xác định xem một đồ thị vô hướng có chu trình Euler hay không?

Số miền của C_n

Số miền của W_n

- a) Định nghĩa số màu của đồ thị.
- b) Số màu của đồ thị K_n , trong đó n là một số nguyên dương, bằng bao nhiêu?
- c) Số màu của đồ thị C_n , trong đó n là một số nguyên dương lớn hơn 2, bằng bao nhiêu?
- d) Số màu của đồ thị $K_{m,n}$, trong đó m, n là các số nguyên dương, bằng bao nhiêu?

- Cho đơn đồ thị vô hướng, bậc mỗi đỉnh $\geq n/2$. Chứng minh đồ thị có chu trình hamilton

- Câu 4: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?
- $X_1 + X_2 + X_3 + 500X_4 = 1000$
- Câu 5: Đồ thị $K_{4,3}$ có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh? Đồ thị $K_{4,3}$ có chu trình Euler, đường đi Euler không? Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề.