

Toán rời rạc

TS. Đỗ Đức Đông

dongdoduc@gmail.com

Mô hình tính toán

1. Ngôn ngữ và văn phạm
 - ✓ Văn phạm cấu trúc câu
 - ✓ Phân loại văn phạm cấu trúc câu
2. Các máy hữu hạn trạng thái
 - ✓ Máy hữu hạn trạng thái có đầu ra
 - ✓ Máy hữu hạn trạng thái không có đầu ra
 - ✓ Sự chấp nhận của ngôn ngữ
3. Máy Turing
 - ✓ Đoán nhận ngôn ngữ
 - ✓ Tính hàm

Mô tả ngôn ngữ

- Một **bộ chữ cái** (một **bộ từ vựng**) V là một tập không rỗng, hữu hạn. Các phần tử của tập này được gọi là các ký hiệu; **Một từ** (hoặc **một câu**) trên V là một xâu các phần tử của V có chiều dài hữu hạn. Xâu rỗng, được ký hiệu là λ , là xâu không chứa ký hiệu nào. Tập tất cả các từ trên V được ký hiệu V^* . Một **ngôn ngữ** trên V là một tập con của V^* .
- Ngôn ngữ có thể mô tả bằng cách
 - Liệt kê các từ trong ngôn ngữ;
 - Chọn một số tiêu chuẩn mà các từ thuộc ngôn ngữ đó phải thỏa mãn.
 - Mô tả thông qua dùng văn phạm: Quy tắc sinh ngôn ngữ; một số phần tử của từ vựng không thể thay thế bằng ký hiệu khác $\rightarrow$ ký hiệu kết thúc (T); các phần tử khác có thể thay thế bằng các ký hiệu khác $\rightarrow$ ký hiệu không kết thúc (N).
Ví dụ: câu $\rightarrow$ chủ ngữ + vị ngữ

Văn phạm cấu trúc câu

- Một văn phạm cấu trúc câu $G=(V, T, S, P)$ gồm một từ vựng V , một tập con T của V là các phần tử kết thúc, một ký hiệu xuất phát S và tập các sản xuất P . Tập $V-T$ là tập không kết thúc (N). Mỗi sản xuất trong P cần phải chứa ít nhất một ký hiệu không kết thúc ở vế trái.
- Ví dụ 1, $G=(V, T, S, P)$, trong đó $V=\{\text{"tôi" "anh", "làm việc", chu_ngu, vi_ngu, S}\}$, $T=\{\text{"tôi","anh","làm việc"}\}$, S là ký hiệu xuất phát và các sản xuất $\{S \rightarrow \text{chu_ngu vi_ngu}, \text{chu_ngu} \rightarrow \text{"tôi"}, \text{chu_ngu} \rightarrow \text{"anh"}, \text{vi_ngu} \rightarrow \text{"làm việc"}\}$
- Ví dụ 2, $G=(V, T, S, P)$, trong đó $V=\{a,b, S\}$, $T=\{a,b\}$, S là ký hiệu xuất phát và các sản xuất $\{S \rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow \lambda\}$

Dẫn xuất

Cho $G=(V, T, S, P)$ là một văn phạm cấu trúc câu.

- Cho $w_0 = AXB$ và $w_1 = AYB$ là các xâu trên V , nếu có một sản xuất $X \rightarrow Y$ thì ta nói w_1 được dẫn xuất trực tiếp từ w_0 . Ký hiệu $w_0 \Rightarrow w_1$
- Nếu $w_0, w_1, \dots, w_n$ là các xâu trên V sao cho $w_0 \Rightarrow w_1; w_1 \Rightarrow w_2; \dots; w_{n-1} \Rightarrow w_n$ thì ta nói w_n được dẫn xuất từ w_0 , ký hiệu $w_0 \Rightarrow^* w_n$.
Dãy các bước dùng để nhận được w_n từ w_0 được gọi là một dẫn xuất
- Ví dụ, $G=(V, T, S, P)$, trong đó $V=\{a,b, S\}$, $T=\{a,b\}$, S là ký hiệu xuất phát và các sản xuất $\{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \lambda\}$ thì:
 ab được dẫn xuất trực tiếp từ aSb
 $aaabbbb$ được dẫn xuất từ S vì $S \rightarrow aSb \rightarrow aaSbbb \rightarrow aaaSbbbb \rightarrow aaabbbb$

Ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm

Cho $G=(V, T, S, P)$ là một văn phạm cấu trúc câu

- Ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm G (hay gọi là ngôn ngữ của G), được ký hiệu là $L(G)$ là tập hợp tất cả các xâu chỉ gồm ký hiệu kết thúc được dẫn xuất từ ký hiệu xuất phát S .

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow w\}$$

- Ví dụ, $G = (\{S, A, a, b\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aA, S \rightarrow b, A \rightarrow aa\})$, xác định $L(G)$

$G=(V, T, S, P)$, trong đó $V=\{a,b, S\}$, $T=\{a,b\}$, S là ký hiệu xuất phát và các sản xuất $\{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \lambda\}$, xác định $L(G)$

$G=(V, T, S, P)$, trong đó $V=\{a,b, S\}$, $T=\{a,b\}$, S là ký hiệu xuất phát và các sản xuất $\{S \rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow \lambda\}$, xác định $L(G)$

Tìm văn phạm cấu trúc sinh ra tập $\{0^n 1^m\}$

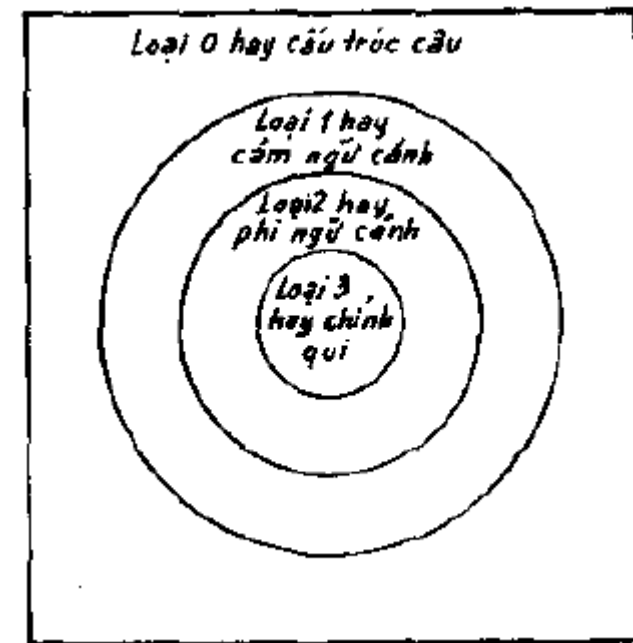
Văn phạm G_1 có từ vựng $V = \{S, 0, 1\}$, các ký hiệu kết thúc $T = \{0, 1\}$ và các sản xuất $S \rightarrow 0S$, $S \rightarrow S1$ và $S \rightarrow \lambda$.

Tìm văn phạm cấu trúc sinh ra tập $\{0^n 1^n 2^n\}$

$\{V, T, S, P\}$ với $V = \{0, 1, 2, S, A, B\}$, $T = \{0, 1, 2\}$, ký hiệu xuất phát là S và các sản xuất $S \rightarrow 0SAB$, $S \rightarrow \lambda$, $BA \rightarrow AB$, $0A \rightarrow 01$, $1A \rightarrow 11$, $1B \rightarrow 12$, $2B \rightarrow 22$.

Các loại văn phạm cấu trúc câu

- Các loại văn phạm cấu trúc câu được phân loại theo các loại sản xuất
- Phân loại do Chomsky đưa ra
 - Văn phạm loại 0: không có hạn chế nào đối với các sản xuất
 - Văn phạm loại 1: chỉ có các dạng sản xuất có dạng $w_1 \rightarrow w_2$, trong đó chiều dài w_2 lớn hơn hoặc bằng chiều dài w_1 hoặc có dạng $w_1 \rightarrow \lambda$.
 - Văn phạm loại 2: chỉ có các dạng sản xuất có dạng $w_1 \rightarrow w_2$, trong đó chiều dài w_1 chỉ là ký hiệu đơn và không phải là ký hiệu kết thúc.
 - Văn phạm loại 3: chỉ có các dạng sản xuất có dạng $w_1 \rightarrow w_2$, trong đó $w_1 = A$ và $w_2 = aB$ hoặc $w_2 = a$ (trong đó A, B là ký hiệu không kết thúc, còn a là ký hiệu kết thúc) hoặc có dạng $w_1 = S$ và $w_2 = \lambda$.



$G=(V, T, S, P)$, trong đó $V=\{a,b, S\}$, $T=\{a,b\}$, S là ký hiệu xuất phát và các sản xuất $\{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \lambda\}$ là văn phạm loại gì?

Văn phạm cấu trúc sinh ra tập $\{0^n 1^n 2^n\}$ dưới đây là văn phạm loại gì?

$\{V, T, S, P\}$ với $V = \{0, 1, 2, S, A, B\}$, $T = \{0, 1, 2\}$, ký hiệu xuất phát là S và các sản xuất $S \rightarrow 0SAB$, $S \rightarrow \lambda$, $BA \rightarrow AB$, $0A \rightarrow 01$, $1A \rightarrow 11$, $1B \rightarrow 12$, $2B \rightarrow 22$.

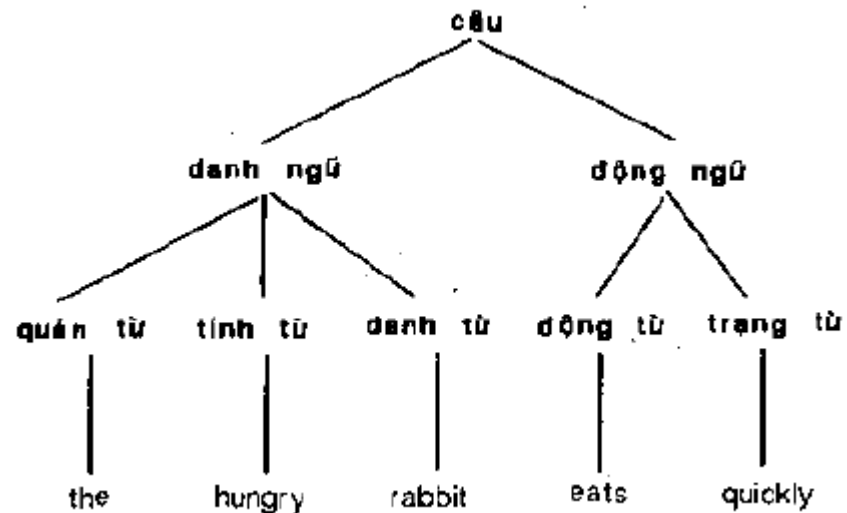
Tìm văn phạm cấu trúc sinh ra tập $\{0^n 1^m\}$ bằng văn phạm chính quy

Văn phạm G_1 có từ vựng $V = \{S, 0, 1\}$, các ký hiệu kết thúc $T = \{0, 1\}$ và các sản xuất $S \rightarrow 0S$, $S \rightarrow S1$ và $S \rightarrow \lambda$.

- ~~$V = \{S, A, 0, 1\}; T = \{0, 1\}; P = \{S \rightarrow 0S; S \rightarrow 1A; S \rightarrow \lambda; A \rightarrow 1A; A \rightarrow 1\}$~~
- $V = \{S, A, 0, 1\}; T = \{0, 1\}; P = \{S \rightarrow 0S; S \rightarrow 1A; S \rightarrow 1; A \rightarrow 1A; A \rightarrow 1; S \rightarrow \lambda\}$

Cây dẫn xuất

Một dẫn xuất trong ngôn ngữ được sinh bởi một văn phạm phi ngữ cảnh có thể được biểu diễn bằng đồ thị nhờ một cây, gọi là cây dẫn xuất (cây cú pháp).



$G=(V, T, S, P)$, trong đó $V=\{a,b, S\}$,
 $T=\{a,b\}$, S là ký hiệu xuất phát và các
sản xuất $\{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \lambda\}$

Dựng cây dẫn xuất cho xâu $aaabbb$

Cho $V = \{S, A, B, a, b\}$ và $T = \{a, b\}$. Tìm ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm $\{V, T, S, P\}$ với tập P các sản xuất bao gồm:

a) $S \rightarrow AB, A \rightarrow ab, B \rightarrow bb$

b) $S \rightarrow AB, S \rightarrow aA, A \rightarrow a, B \rightarrow ba$

c) $S \rightarrow AB, S \rightarrow AA, A \rightarrow aB, A \rightarrow ab, B \rightarrow b$

d) $S \rightarrow AA, S \rightarrow B, A \rightarrow aaA, A \rightarrow aa, B \rightarrow bB, B \rightarrow b$

e) $S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb, B \rightarrow bBa, A \rightarrow \lambda, B \rightarrow \lambda$

Tìm văn phạm cấu trúc câu cho từng ngôn ngữ sau:

- a) Tập tất cả các xâu nhị phân chứa một số chẵn các số 0 và không chứa số 1 nào.
- b) Tập tất cả các xâu nhị phân tạo bởi một số 1 và tiếp sau là một số lẻ các số 0.
- c) Tập tất cả các xâu nhị phân chứa một số chẵn các số 0 và một số chẵn các số 1.
- d) Tập tất cả các xâu chứa 10 hoặc nhiều hơn các số 0 và không chứa số 1 nào.
- e) Tập tất cả các xâu chứa số các số 0 nhiều hơn số các số 1
- f) Tập tất cả các xâu chứa số các số 0 và số các số 1 bằng nhau.
- g) Tập tất cả các xâu chứa số các số 0 và số các số 1 không bằng nhau.

Phân loại văn phạm

a) $S \rightarrow aAB, A \rightarrow Bb, B \rightarrow \lambda$

b) $S \rightarrow aA, A \rightarrow a, A \rightarrow b$

c) $S \rightarrow ABa, AB \rightarrow a$

d) $S \rightarrow ABA, A \rightarrow aB, B \rightarrow ab$

e) $S \rightarrow bA, A \rightarrow B, B \rightarrow a$

f) $S \rightarrow aA, aA \rightarrow B, B \rightarrow aA, A \rightarrow b$

g) $S \rightarrow bA, A \rightarrow b, S \rightarrow \lambda$

h) $S \rightarrow AB, B \rightarrow aAb, aAb \rightarrow b$

i) $S \rightarrow aA, A \rightarrow bB, B \rightarrow b, B \rightarrow \lambda$

j) $S \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow \lambda$

Cho G là văn phạm với $V = \{a, b, c, S\}$, $T = \{a, b, c\}$, ký hiệu xuất phát S và các sản xuất $S \rightarrow abS$, $S \rightarrow bcS$, $S \rightarrow bbS$, $S \rightarrow a$, $S \rightarrow cb$. Dựng các cây dẫn xuất cho

a) $bcbbba$

b) $bbbcbba$

c) $bcabbbbbbcb$

Máy hữu hạn trạng thái có đầu ra

Máy bán hàng – Nguyên tắc hoạt động

Một máy bán hàng hoạt động theo nguyên tắc sau:

- 1) Máy chỉ nhận các đồng 5 xu, 10 xu, 25 xu
- 2) Nếu tổng số tiền đưa vào vượt quá 30 xu thì máy sẽ trả lại số tiền thừa (số tiền vượt quá 30 xu)
- 3) Giá 1 cốc nước cam bằng giá một cốc nước táo là 30 xu. Khi máy đã nhận đủ 30 xu, người mua ấn nút màu cam thì nhận được cốc nước cam, ấn vào nút màu đỏ thì nhận được cốc nước táo

Ví dụ, đưa vào đồng 25 xu, đồng 10 xu, máy sẽ trả lại 5 xu. Sau đó ấn nút đỏ, máy sẽ đưa ra cốc nước táo.

Máy hữu hạn trạng thái có đầu ra

Máy bán hàng – Thiết kế máy (1)

- Các khả năng của đầu vào là:

5 xu, 10 xu, 25 xu, nút màu cam (O), nút màu đỏ (R)

- Các khả năng của đầu ra là:

không có gì (n), 5 xu, 10 xu, 15 xu, 20 xu, 25 xu, cốc nước cam (OJ), cốc nước táo (AJ)

- Các trạng thái có thể của máy:

có 7 trạng thái khác nhau s_i ($i = 0, 1, \dots, 6$), trạng thái s_i nghĩa là máy đã nhận được $(5 \times i)$ xu

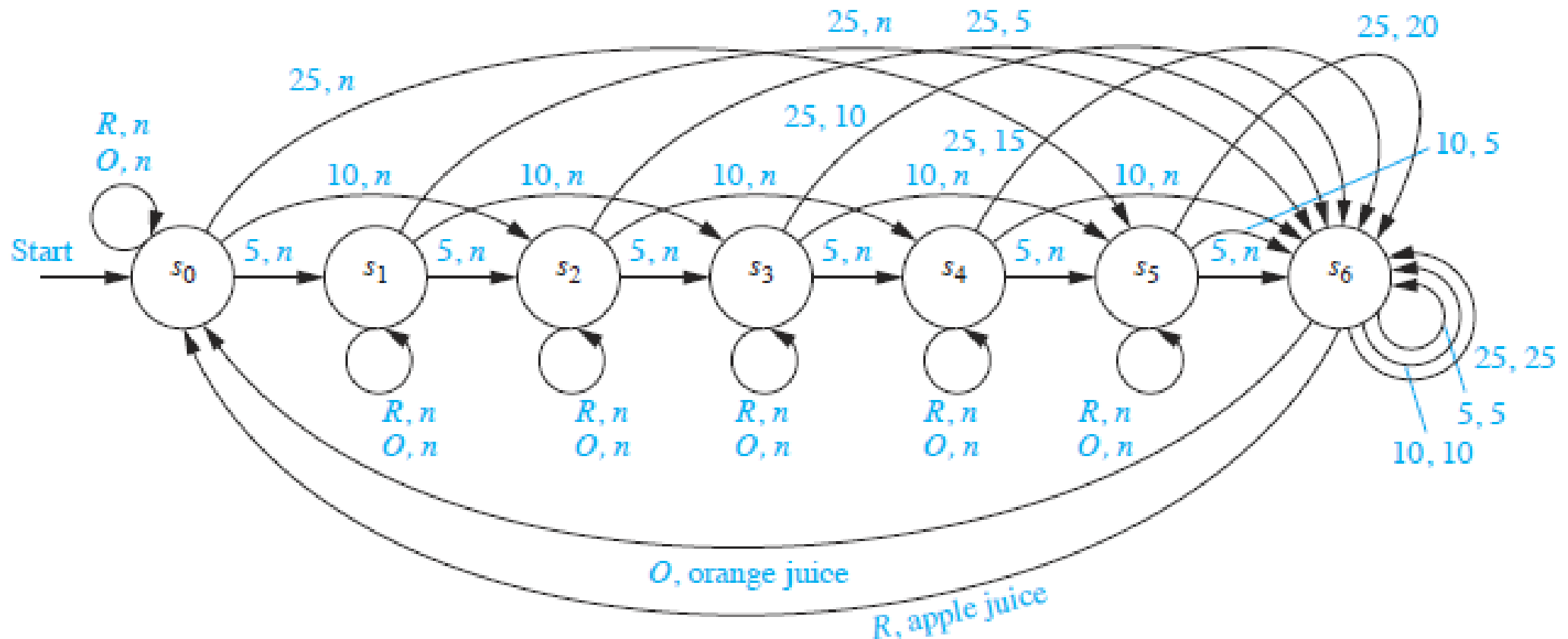
Máy bán hàng – Thiết kế máy (2)

- Các khả năng của đầu vào là: 5 xu, 10 xu, 25 xu, nút màu cam (O), nút màu đỏ (R)
- Các khả năng của đầu ra là: không có gì (n), 5 xu, 10 xu, 15 xu, 20 xu, 25 xu, OJ, AJ
- Các trạng thái có thể của máy: có 7 trạng thái khác nhau s_i ($i = 0, 1, \dots, 6$)

	Next State					Output				
	<i>Input</i>					<i>Input</i>				
<i>State</i>	5	10	25	O	R	5	10	25	O	R
s_0	s_1	s_2	s_5	s_0	s_0	n	n	n	n	n
s_1	s_2	s_3	s_6	s_1	s_1	n	n	n	n	n
s_2	s_3	s_4	s_6	s_2	s_2	n	n	5	n	n
s_3	s_4	s_5	s_6	s_3	s_3	n	n	10	n	n
s_4	s_5	s_6	s_6	s_4	s_4	n	n	15	n	n
s_5	s_6	s_6	s_6	s_5	s_5	n	5	20	n	n
s_6	s_6	s_6	s_6	s_0	s_0	5	10	25	OJ	AJ

Máy bán hàng – Thiết kế máy (3)

- Các khả năng của đầu vào là: 5 xu, 10 xu, 25 xu, nút màu cam (O), nút màu đỏ (R)
- Các khả năng của đầu ra là: không có gì (n), 5 xu, 10 xu, 15 xu, 20 xu, 25 xu, OJ, AJ
- Các trạng thái có thể của máy: có 7 trạng thái khác nhau s_i ($i = 0, 1, \dots, 6$)

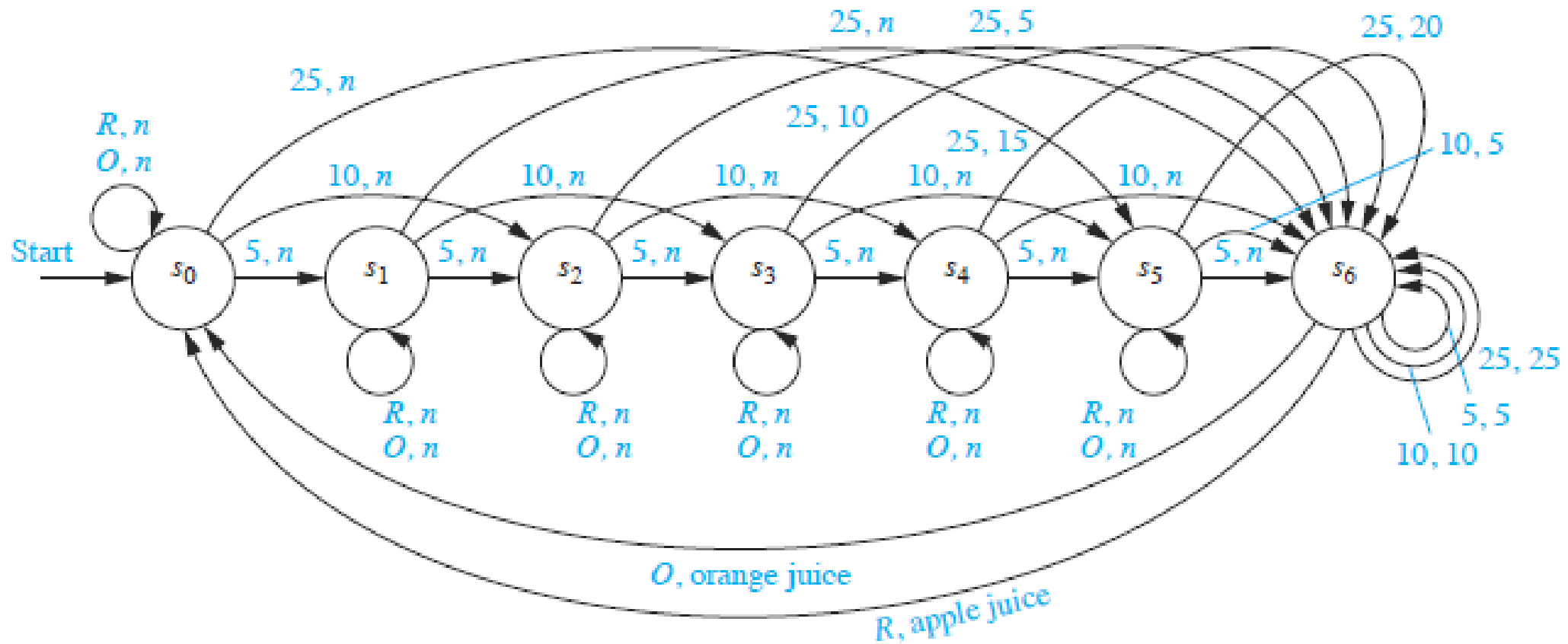


Máy hữu hạn trạng thái có đầu ra

- Một máy hữu hạn trạng thái $M = (S, I, O, f, g, s_0)$, trong đó $s_0 \in S$, S là tập hữu hạn các trạng thái, I là bộ chữ cái hữu hạn đầu vào, O là bộ chữ cái hữu hạn đầu ra, f là hàm chuyển trạng thái $f(s, i) = s'$ với $s, s' \in S, i \in I$, g là hàm đầu ra $g(s, i) = o$ với $s \in S, i \in I, o \in O$.
- Hàm chuyển và hàm đầu ra có thể mô tả bằng **bảng chuyển trạng thái**

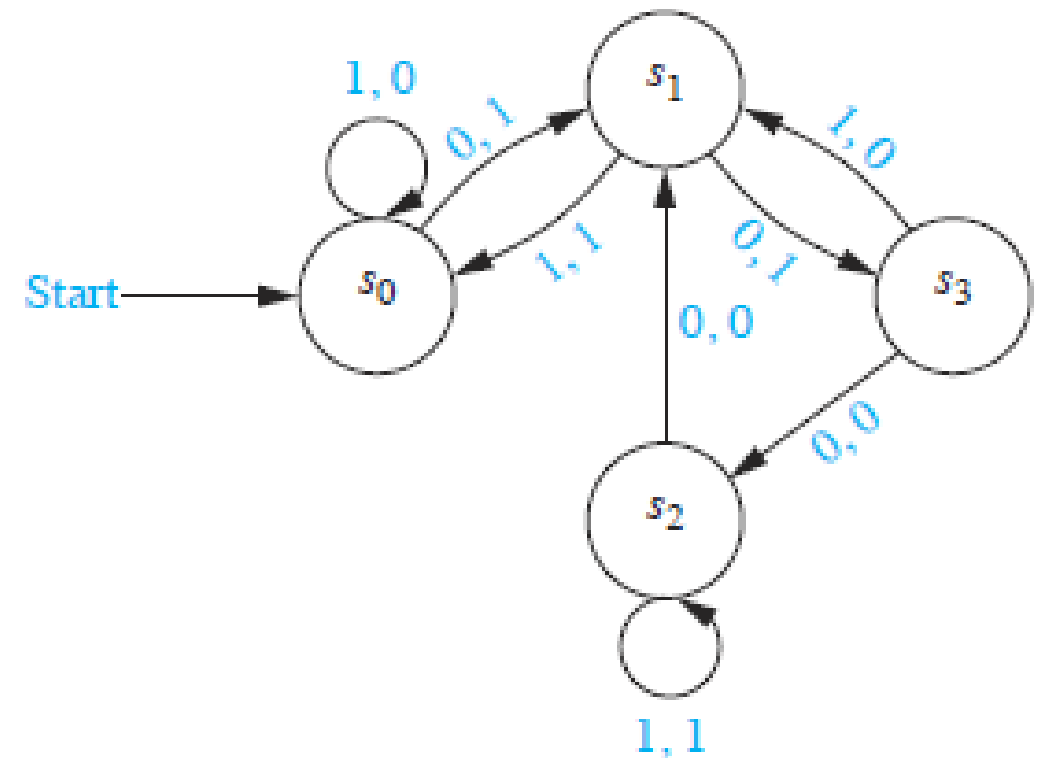
State	Next State					Output				
	Input					Input				
	5	10	25	O	R	5	10	25	O	R
s_0	s_1	s_2	s_5	s_0	s_0	n	n	n	n	n
s_1	s_2	s_3	s_6	s_1	s_1	n	n	n	n	n
s_2	s_3	s_4	s_6	s_2	s_2	n	n	5	n	n
s_3	s_4	s_5	s_6	s_3	s_3	n	n	10	n	n
s_4	s_5	s_6	s_6	s_4	s_4	n	n	15	n	n
s_5	s_6	s_6	s_6	s_5	s_5	n	5	20	n	n
s_6	s_6	s_6	s_6	s_0	s_0	5	10	25	OJ	AJ

Dùng đồ thị để biểu diễn máy hữu hạn trạng thái

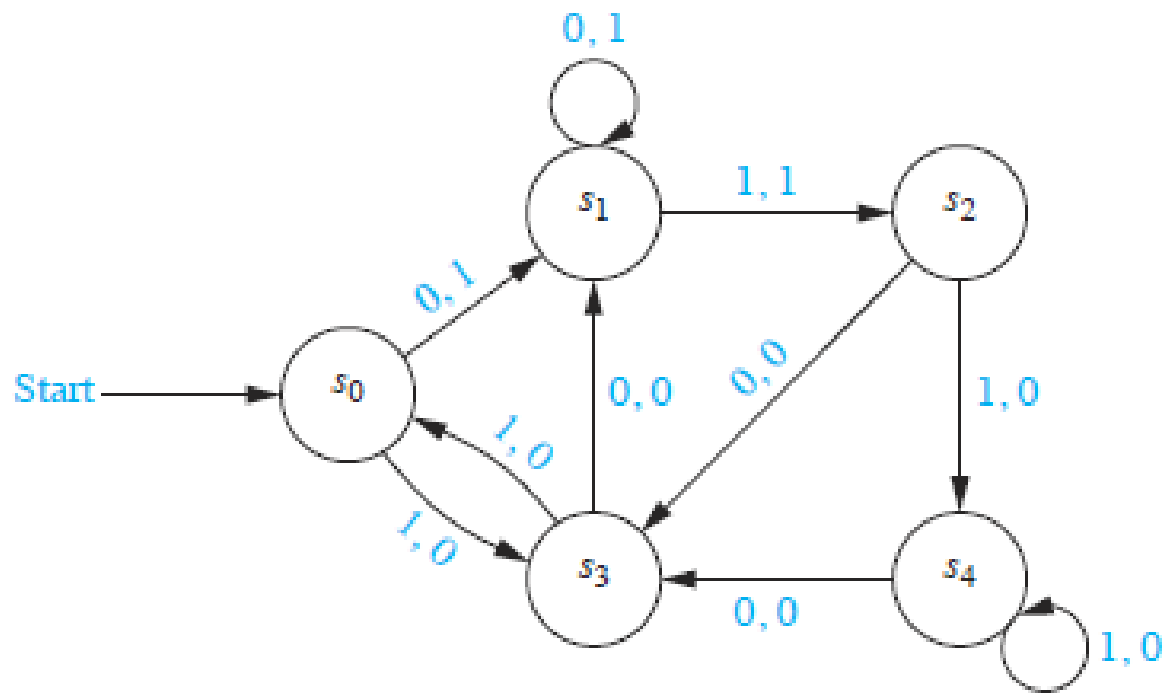


Biểu diễn máy hữu hạn trạng thái sau bằng đồ thị

State	f		g	
	<i>Input</i>		<i>Input</i>	
	0	1	0	1
s_0	s_1	s_0	1	0
s_1	s_3	s_0	1	1
s_2	s_1	s_2	0	1
s_3	s_2	s_1	0	0



Mô tả máy hữu hạn trạng thái bằng bảng chuyển trạng thái được biểu diễn bởi đồ thị sau



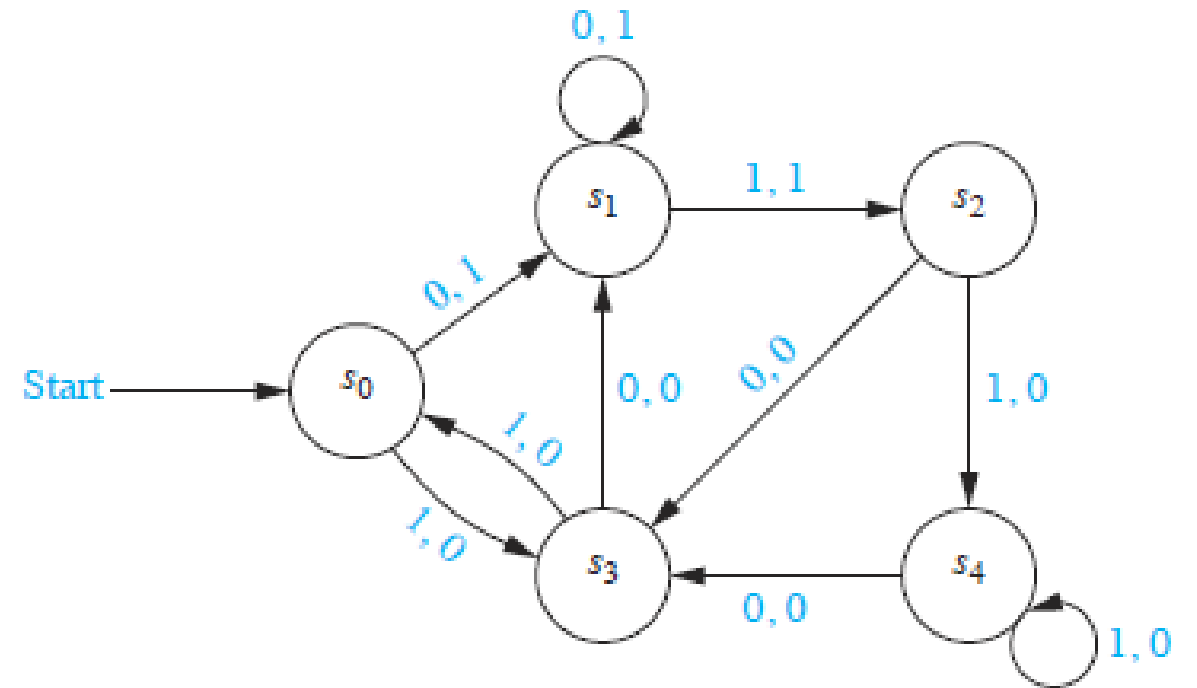
	<i>f</i>		<i>g</i>	
	<i>Input</i>		<i>Input</i>	
<i>State</i>	0	1	0	1
<i>s</i> ₀	<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₃	1	0
<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₂	1	1
<i>s</i> ₂	<i>s</i> ₃	<i>s</i> ₄	0	0
<i>s</i> ₃	<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₀	0	0
<i>s</i> ₄	<i>s</i> ₃	<i>s</i> ₄	0	0

Xâu đầu vào và xâu đầu ra

- Một xâu đầu vào đưa trạng thái xuất phát qua một dãy các trạng thái được xác định bởi hàm chuyển. Lần lượt từ trái sang phải, mỗi ký hiệu đầu vào đưa máy từ trạng thái này sang trạng thái khác.
- Mỗi lần chuyển trạng thái tạo ra một đầu ra, do đó với một xâu đầu vào sẽ tạo ra một xâu đầu ra.
- Cụ thể, với xâu đầu vào $x = x_1x_2 \dots x_k$ máy sẽ chuyển lần lượt qua các trạng thái $s_1s_2 \dots s_k$, trong đó $s_i = f(s_{i-1}, x_i)$ và tạo ra xâu đầu ra $y = y_1y_2 \dots y_k$, trong đó $y_i = g(s_{i-1}, x_i)$

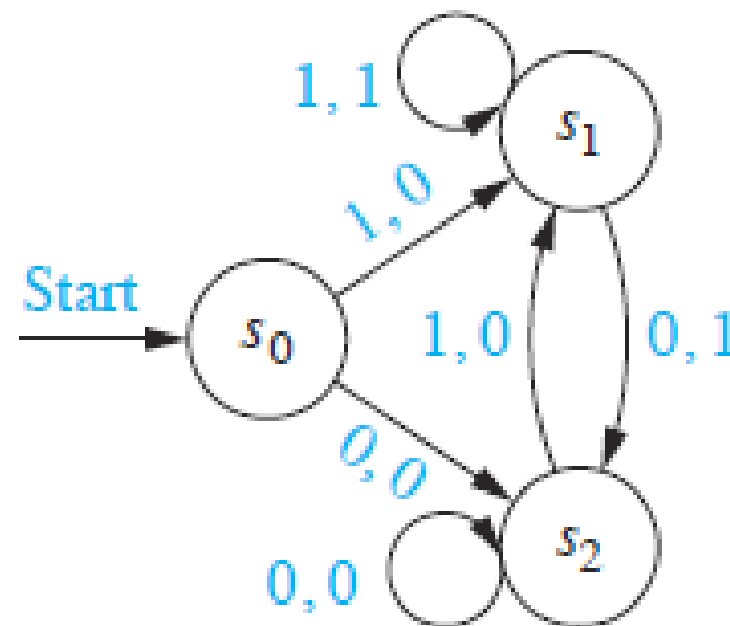
$$g(x) = y$$

Tìm $g(101011)$

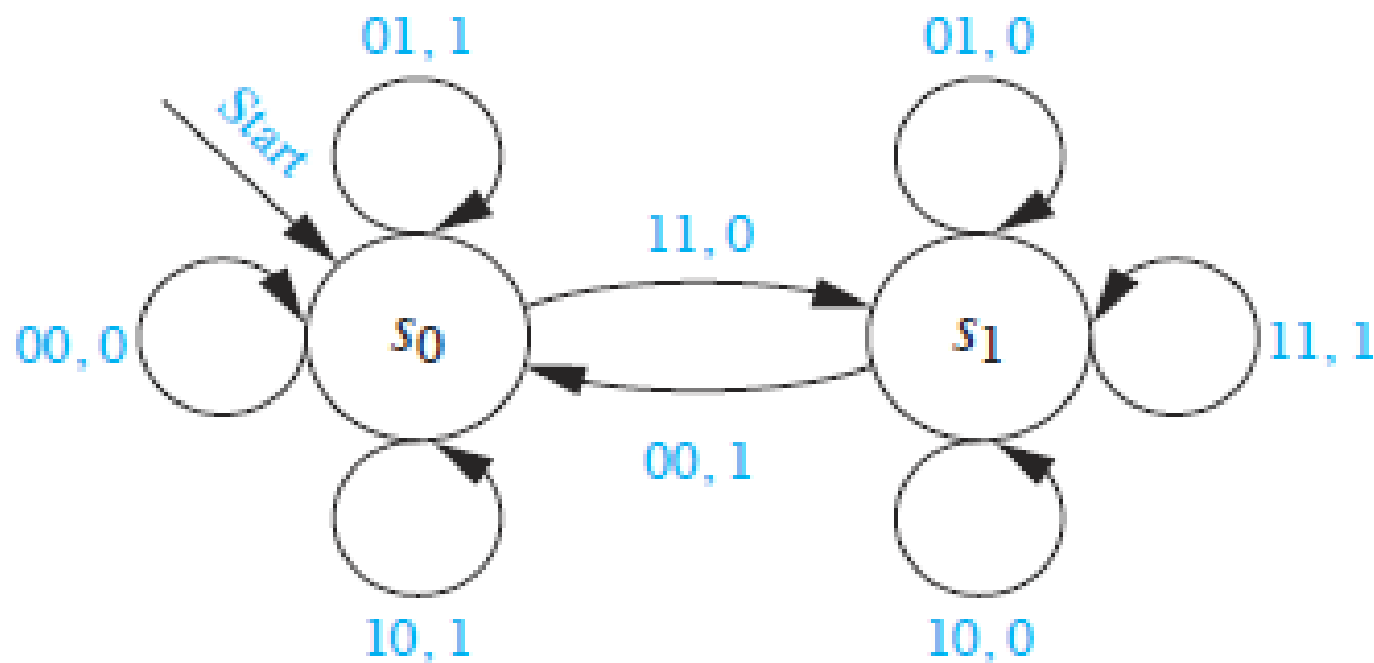


<i>Input</i>	1	0	1	0	1	1	—
<i>State</i>	s_0	s_3	s_1	s_2	s_3	s_0	s_3
<i>Output</i>	0	0	1	0	0	0	—

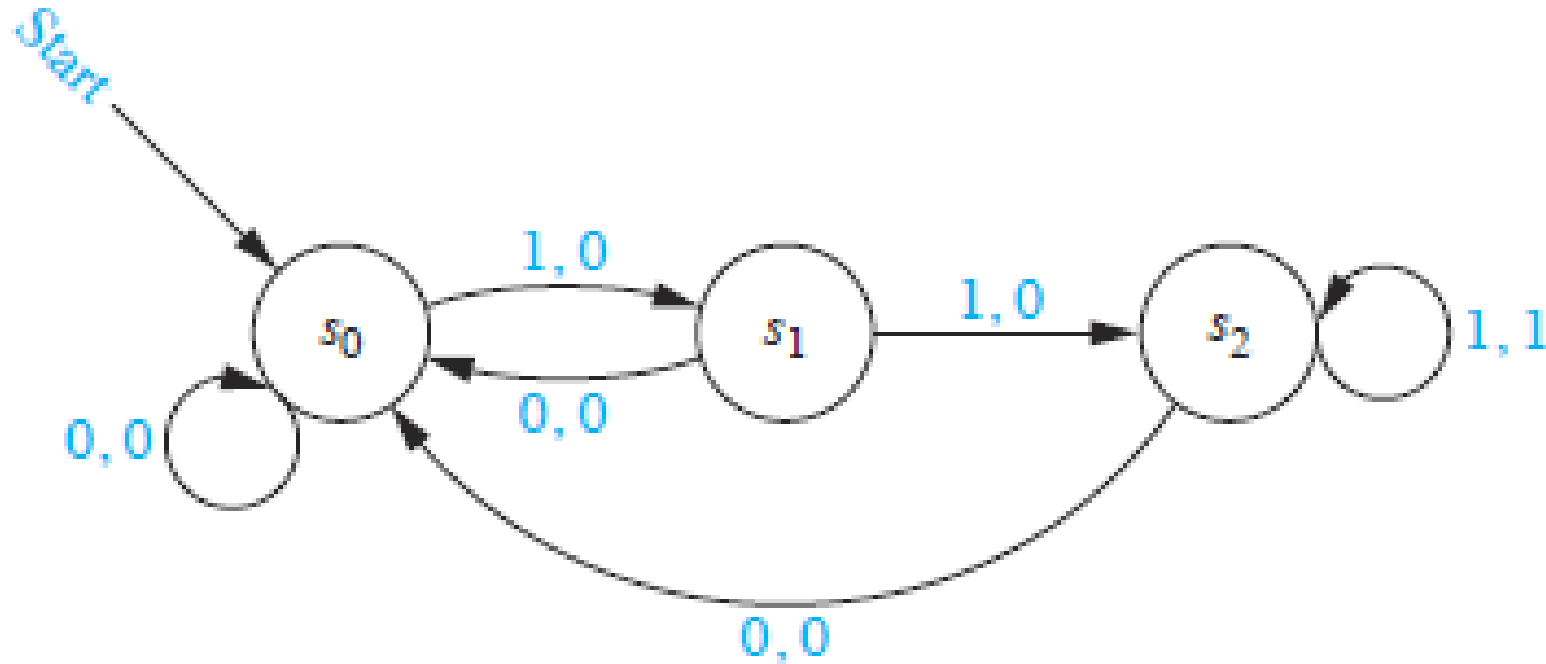
Một phần tử quan trọng trong nhiều dụng cụ điện tử là *máy* *trễ* – *đơn vị*, đây là máy tạo nên đầu ra chính là xâu đầu vào nhưng bị trễ một lượng thời gian cho trước. Vậy một máy hữu hạn trạng thái có thể được xây dựng như thế nào để nó làm trễ xâu đầu vào một đơn vị thời gian, tức là tạo nên đầu ra là xâu nhị phân $0x_1x_2...x_{k-1}$ từ xâu đầu vào đã cho là $x_1x_2...x_k$?



Tạo một máy hữu hạn trạng thái để cộng hai số nguyên ở dạng nhị phân



Xây dựng máy hữu hạn trạng thái cho kết quả đầu ra bằng 1 nếu đọc phải xâu nhị phân tới thời điểm đó kết thúc là 111 $\rightarrow$ bộ nhận ngôn ngữ



Xây dựng máy hữu hạn trạng thái cho kết quả đầu ra bằng 1 nếu đọc phải xâu (gồm các ký tự a đến z) tới thời điểm đó kết thúc là computer

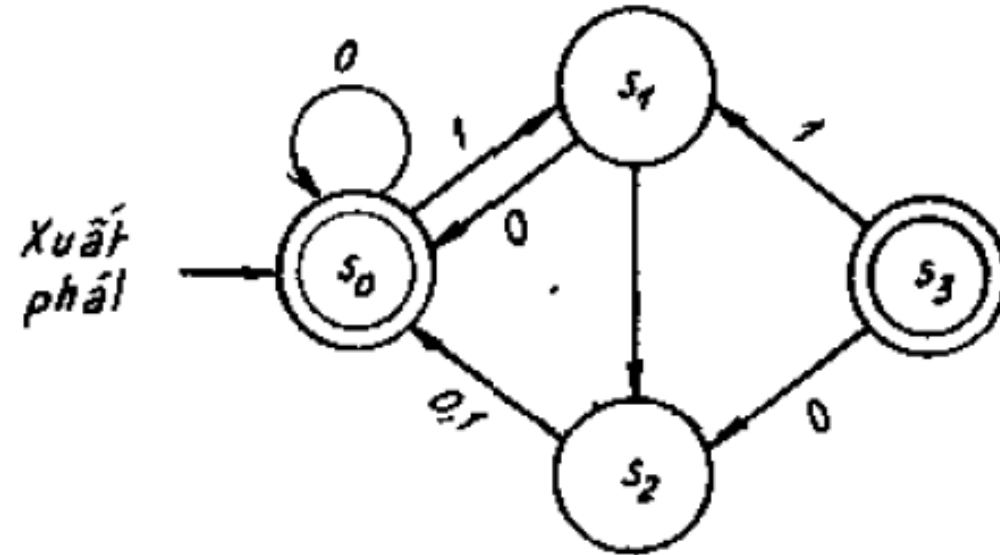
Máy hữu hạn trạng thái không có đầu ra

Thay vì xây dựng máy hữu hạn trạng thái có đầu ra để đoán nhận ngôn ngữ

- xây dựng máy hữu hạn trạng thái không có đầu ra nhưng có những trạng thái kết thúc. Một xâu được chấp nhận nếu và chỉ nếu nó đưa trạng thái xuất phát tới một trong các trạng thái kết thúc.
- Otomat hữu hạn $M = (S, I, f, s_0, F)$, S tập hữu hạn các trạng thái, I bộ chữ cái đầu vào, f là hàm chuyển, s_0 là trạng thái xuất phát, tập trạng thái kết thúc F là tập con của S .

Dựng giản đồ trạng thái của ôtômat hữu hạn $M = (S, I, f, s_0, F)$ với $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $I = \{0, 1\}$, $F = \{s_0, s_3\}$ và hàm chuyển f được cho trong Bảng 1.

BẢNG 1		
Trạng thái	f	
	Đầu vào 0	1
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_0	s_0
s_3	s_2	s_1



Một số định nghĩa

- Cho A, B là hai tập con của V^* (V là tập từ vựng). Phép ghép của A, B được ký hiệu AB là tập tất cả các xâu có dạng xy trong đó x thuộc A , y thuộc B .

Ví dụ, $A=\{0,11\}$, $B=\{1,10,110\}$ thì $AB=\{01, 010, 0110, 111, 1110, 11110\}$

$BA = ?$

- $A^n = A^{n-1} A$ (chú ý $A^0 = \lambda$)

$A=\{1,00\}$ thì $A^2 = \{11, 100, 001, 0000\}$

$A^3 = ?$

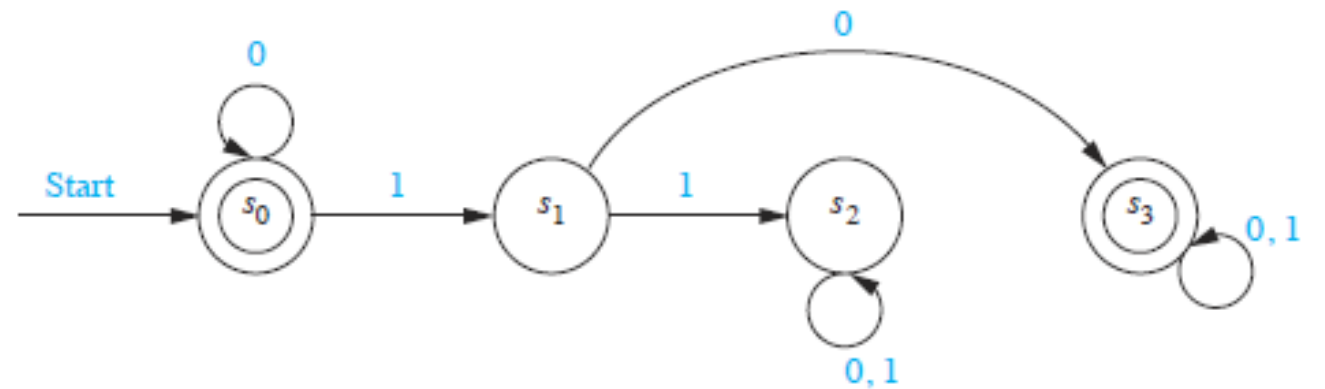
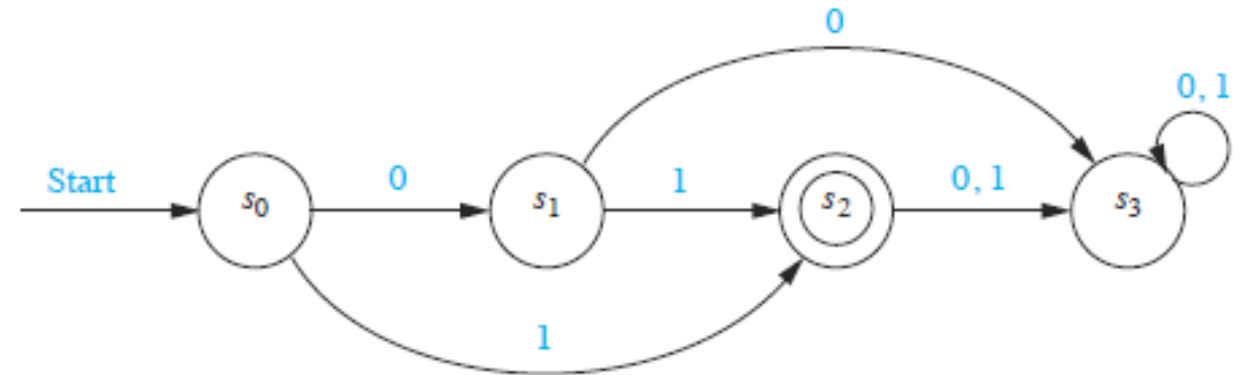
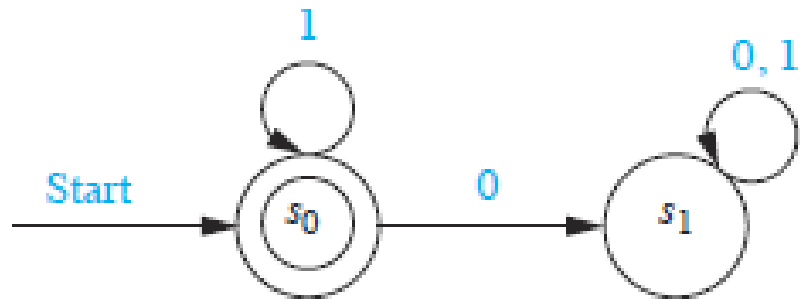
- Cho A là một tập con của V^* . Khi đó bao đóng Kleen của A được ký hiệu là A^* là tập gồm các xâu được tạo bởi cách ghép một số tùy ý các xâu thuộc A .
 $A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k$. Ví dụ, $A=\{0\}$ thì $A^* = \{0^n\}$ với $n \geq 0$; $B=\{00\}$ thì $B^* = \{0^{2n}\}$ với $n \geq 0$; $C = \{0,1\}$ thì A^* là tập tất cả các xâu nhị phân.

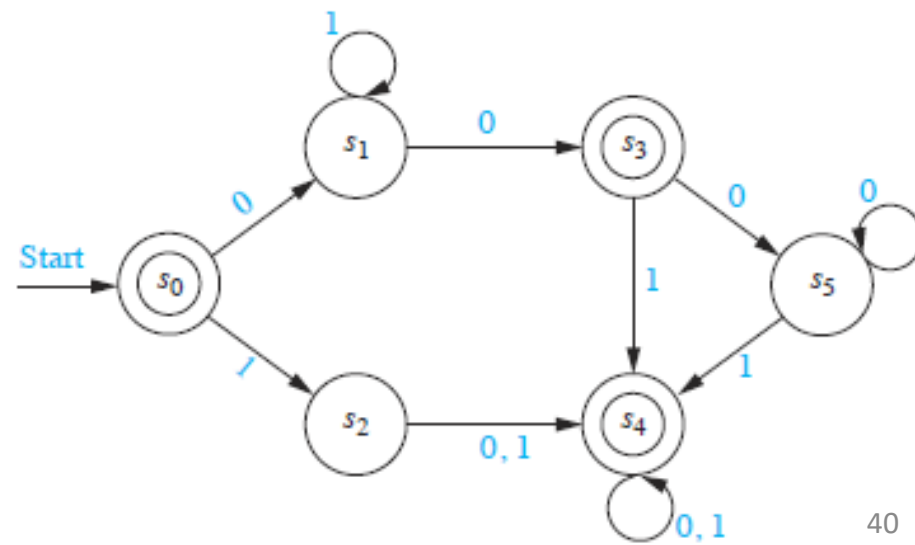
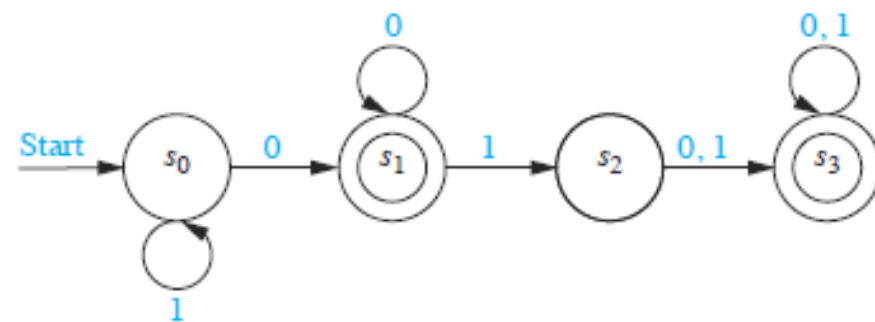
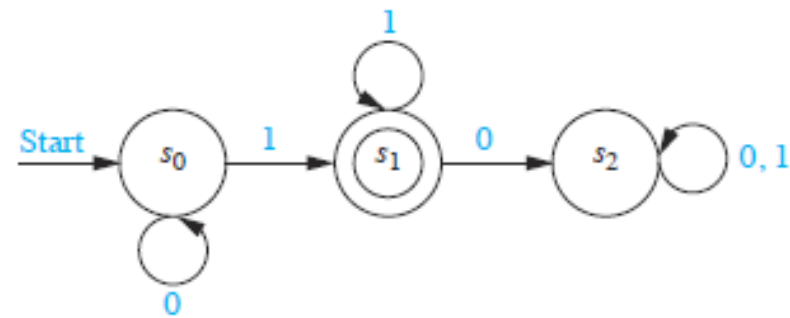
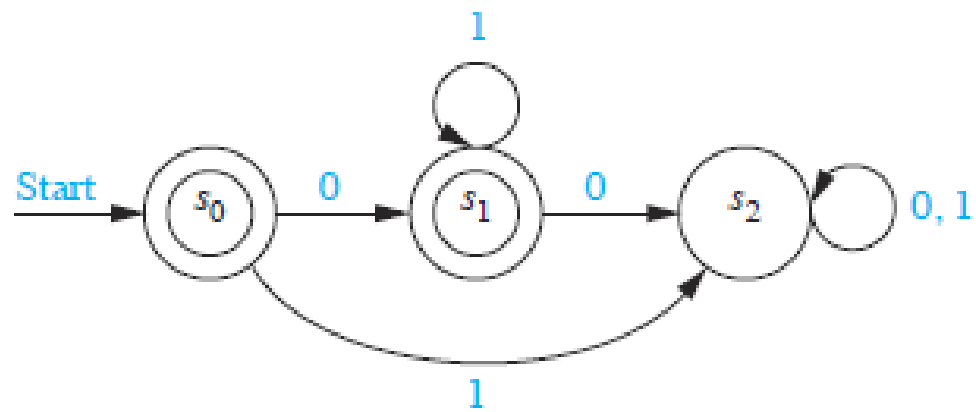
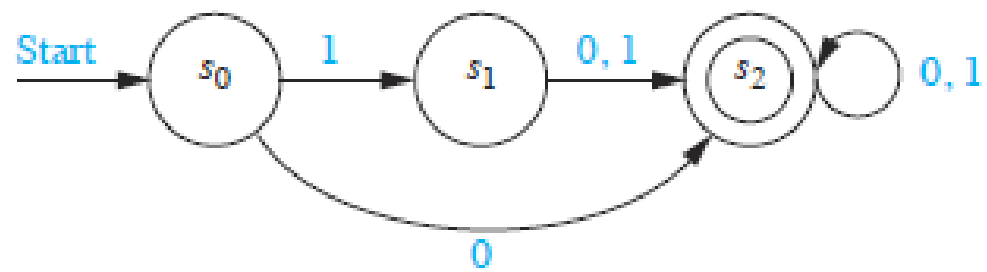
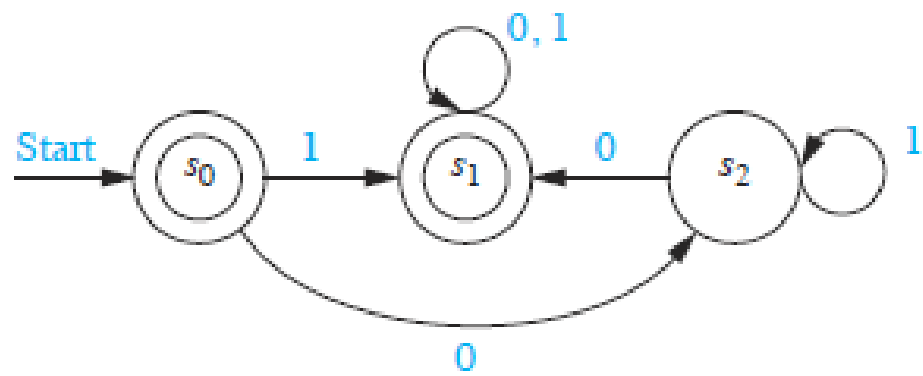
Xác định xem xâu 11101 có nằm trong các tập sau không?

- a) $\{0, 1\}^*$ b) $\{1\}^*\{0\}^*\{1\}^*$ c) $\{11\}\{1\}^*\{01\}$
d) $\{11\}^*\{10\}^*$ e) $\{111\}^*\{0\}^*\{1\}$ f) $\{111, 000\}\{00, 01\}$

- Giả sử $x = x_1x_2 \dots x_k$ là xâu trong I^* , khi đó $f(s_0, x)$ là trạng thái nhận được bằng cách dùng tuần tự các ký hiệu trong x
- Xâu x được gọi là chấp nhận được bởi máy $M = (S, I, f, s_0, F)$ nếu $f(s_0, x)$ là trạng thái kết thúc (thuộc F)
- Ngôn ngữ được chấp nhận được bởi máy M được ký hiệu $L(M)$ là tập tất cả các xâu được chấp nhận bởi M .
- Hai otomat được gọi là tương đương nếu cùng chấp nhận một ngôn ngữ.

Xác định ngôn ngữ được chấp nhận bởi các otomat sau



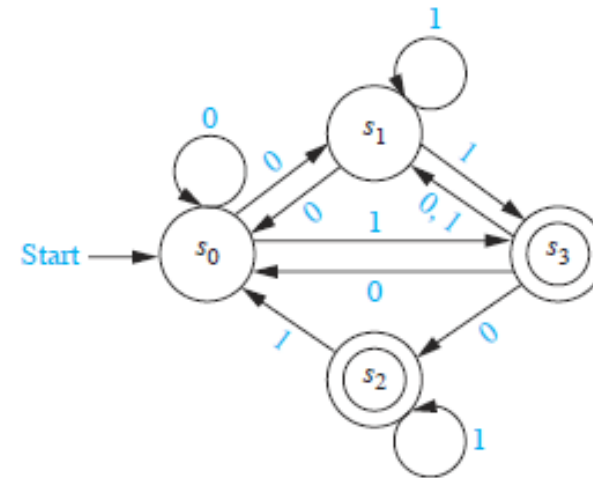


- a) Dựng ô tô máy hữu hạn đoán nhận tập $0^*11(10)^*$.
- b) Hãy xây dựng văn phạm $G = \langle V, T, S, P \rangle$ sinh ra tập trên.

Otomat không tất định

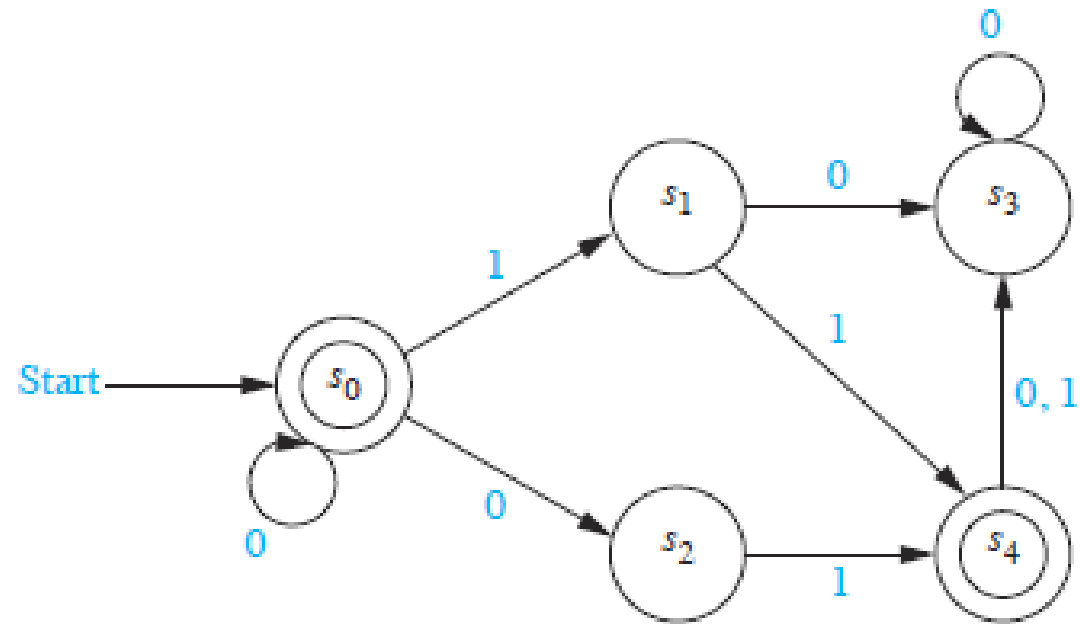
- Các otomat xét đến thời điểm này là **otomat tất định** vì mỗi trạng thái và một giá trị đầu vào có **một trạng thái tiếp theo duy nhất**.
- Các otomat xét đến thời điểm này là **otomat không tất định** vì mỗi trạng thái và một giá trị đầu vào có **nhiều trạng thái tiếp theo khả dĩ**.
- Otomat hữu hạn không tất định $M = (S, I, f, s_0, F)$, S tập hữu hạn các trạng thái, I bộ chữ cái đầu vào, f là hàm chuyển với mỗi trạng thái ứng với mỗi đầu vào là **tập trạng thái đầu ra**, s_0 là trạng thái xuất phát, tập trạng thái kết thúc F là tập con của S .

State	f	
	Input	
	0	1
s_0	s_0, s_1	s_3
s_1	s_0	s_1, s_3
s_2		s_0, s_2
s_3	s_0, s_1, s_2	s_1



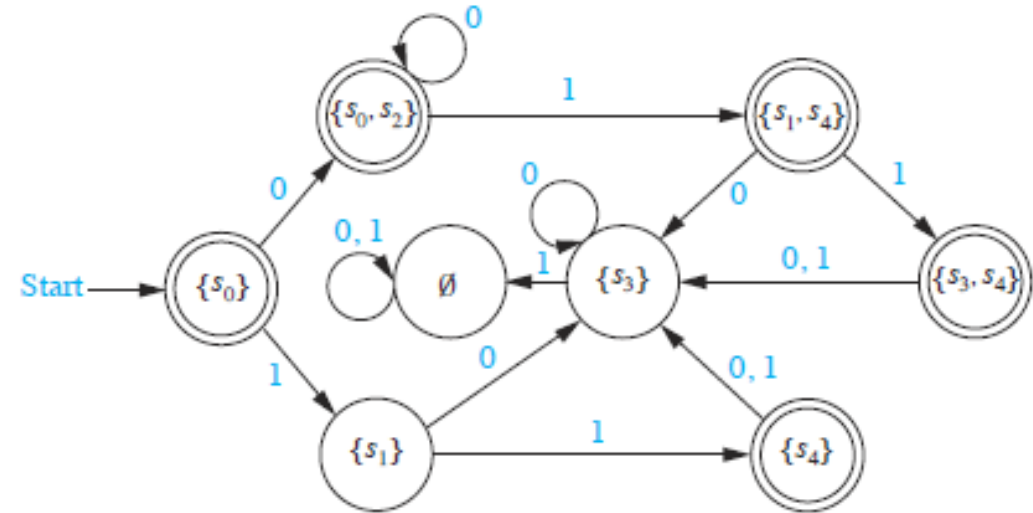
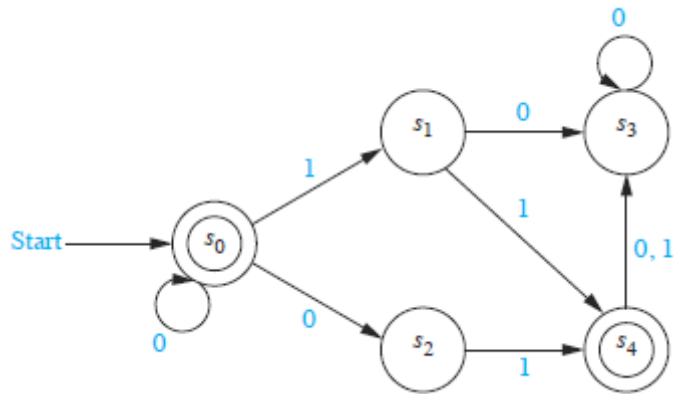
- Giả sử $x = x_1 x_2 \dots x_k$ là xâu trong I^* , khi đó $S_1 = f(s_0, x_1)$, $S_2 = \bigcup_{s \in S_1} f(s, x_2)$, ..., $S_k = \bigcup_{s \in S_{k-1}} f(s, x_k)$
- **Xâu x được gọi là chấp nhận** được bởi máy hữu hạn không tất định $M = (S, I, f, s_0, F)$ nếu S_k chứa trạng thái kết thúc (thuộc F)
- **Ngôn ngữ được chấp nhận** được bởi máy M được ký hiệu $L(M)$ là tập tất cả các xâu được chấp nhận bởi M .
- Định lý: Nếu ngôn ngữ L được chấp nhận bởi otomat hữu hạn không tất định M_0 thì L cũng được chấp nhận bởi một otomat tất định M_1

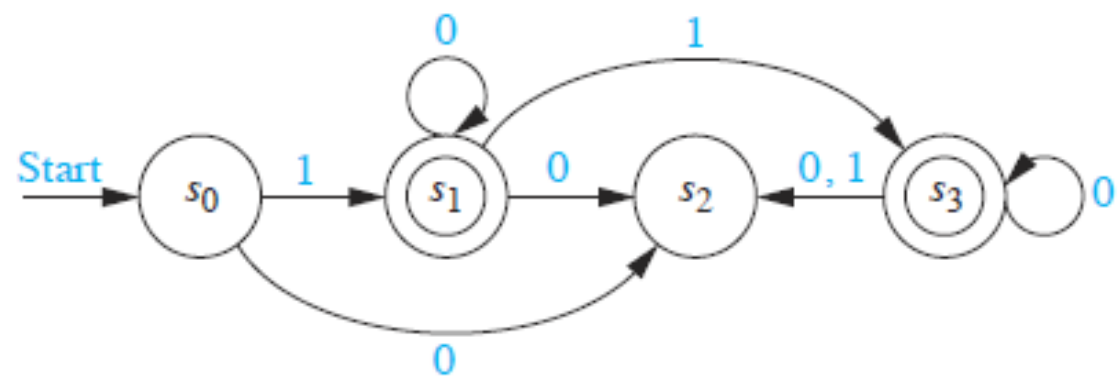
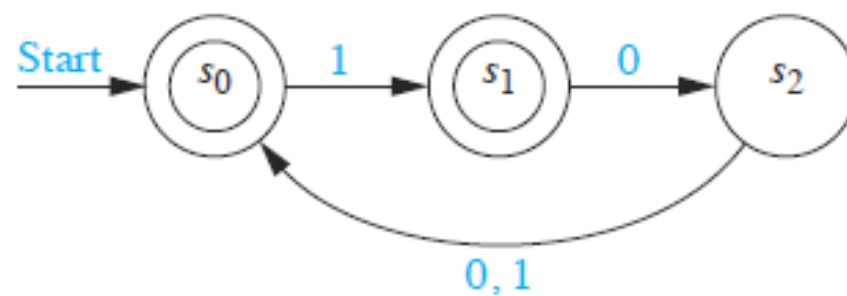
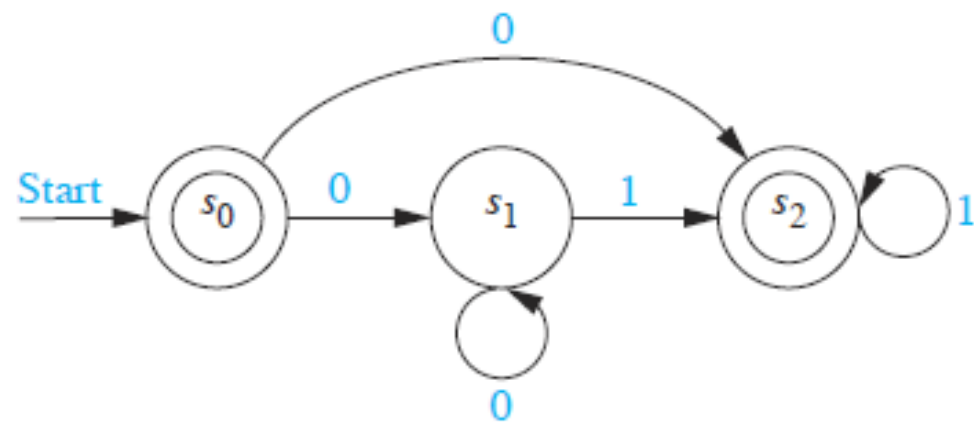
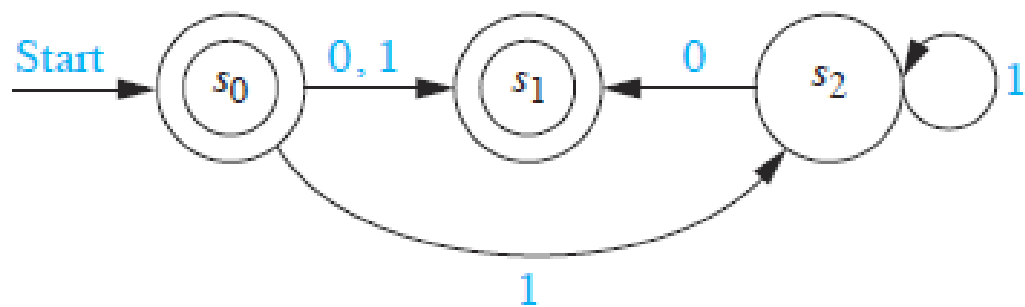
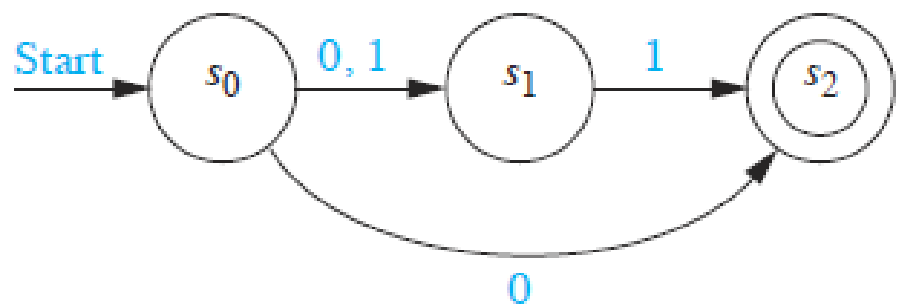
Tìm ngôn được chấp nhận bởi otomat hữu hạn không tắt định sau

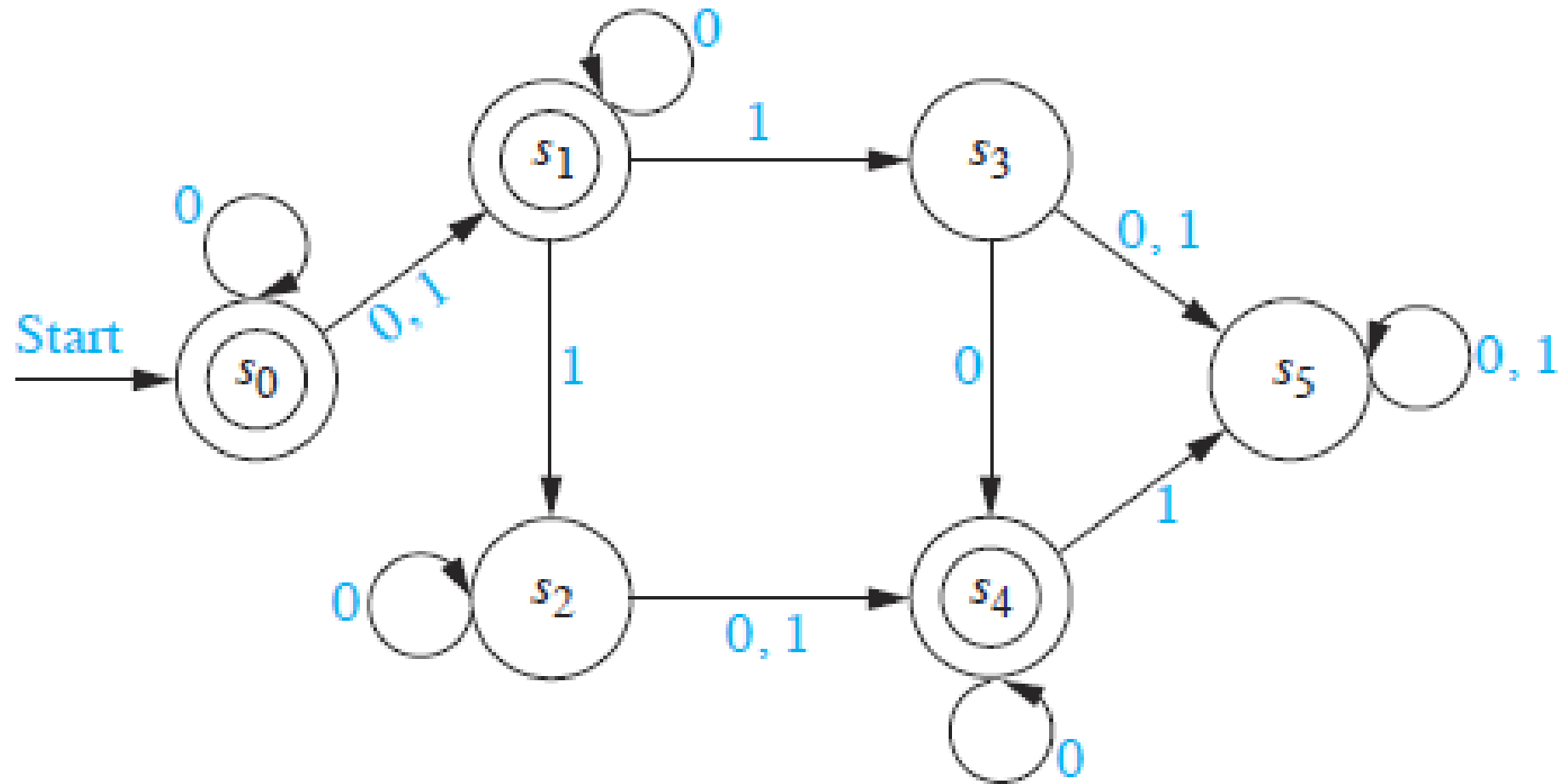


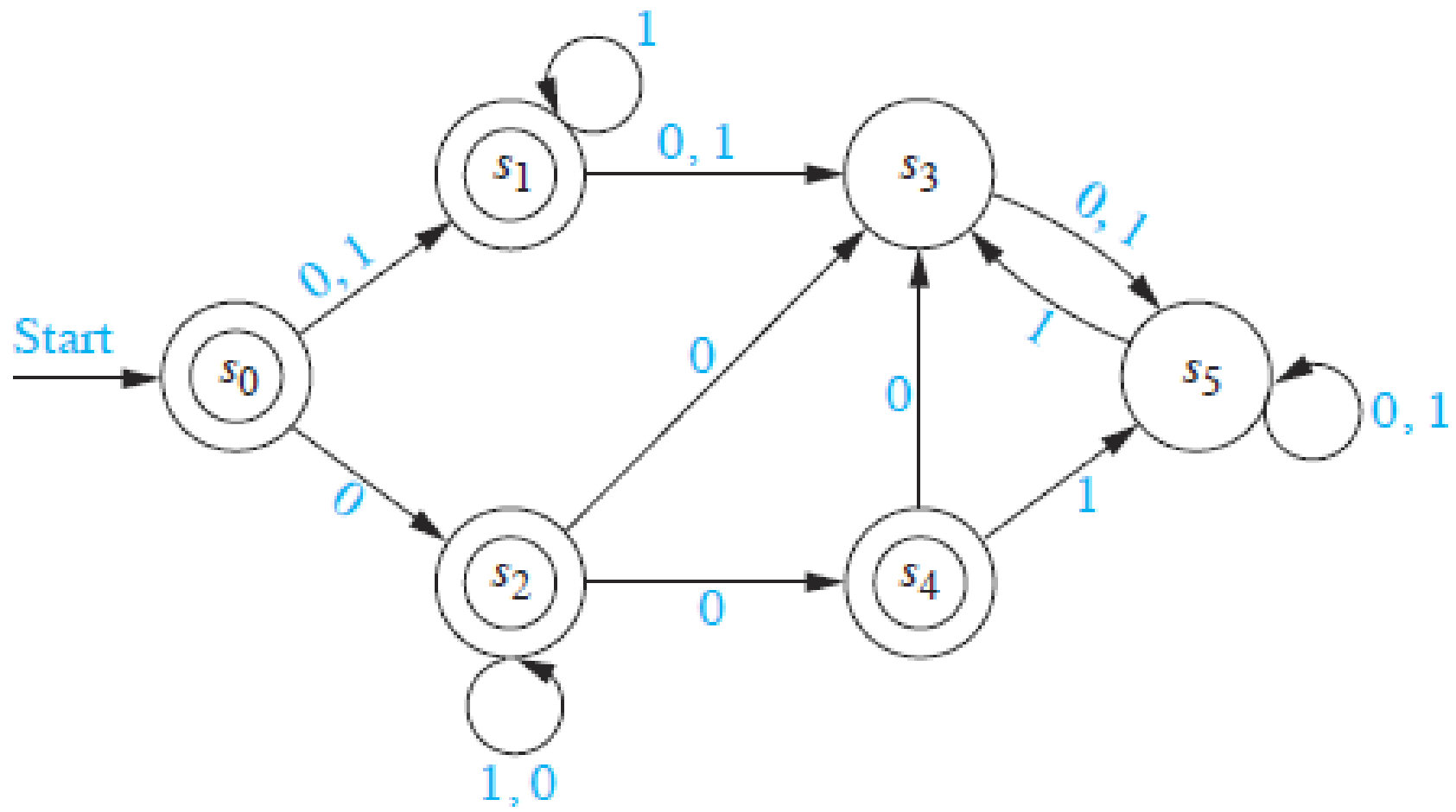
Định lý: Nếu ngôn ngữ L được chấp nhận bởi otomat hữu hạn không tắt định M_0 thì L cũng được chấp nhận bởi một otomat tắt định M_1

Tìm otomat hữu hạn tất định tương đương
otomat hữu hạn không tất định sau









Sự chấp nhận của ngôn ngữ

Otomat hữu hạn có thể đoán nhận được ngôn ngữ

→ Otomat hữu hạn có thể đoán nhận được ngôn ngữ nào?

Biểu thức chính quy (tập chính quy)

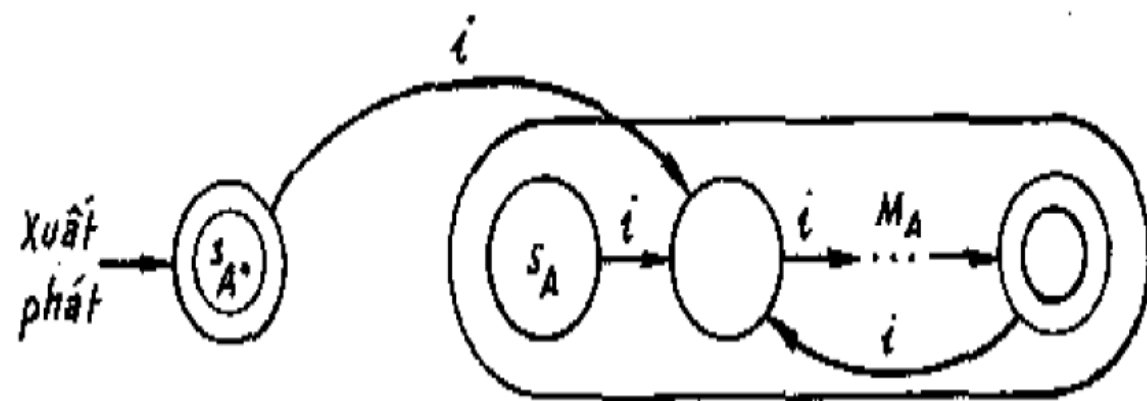
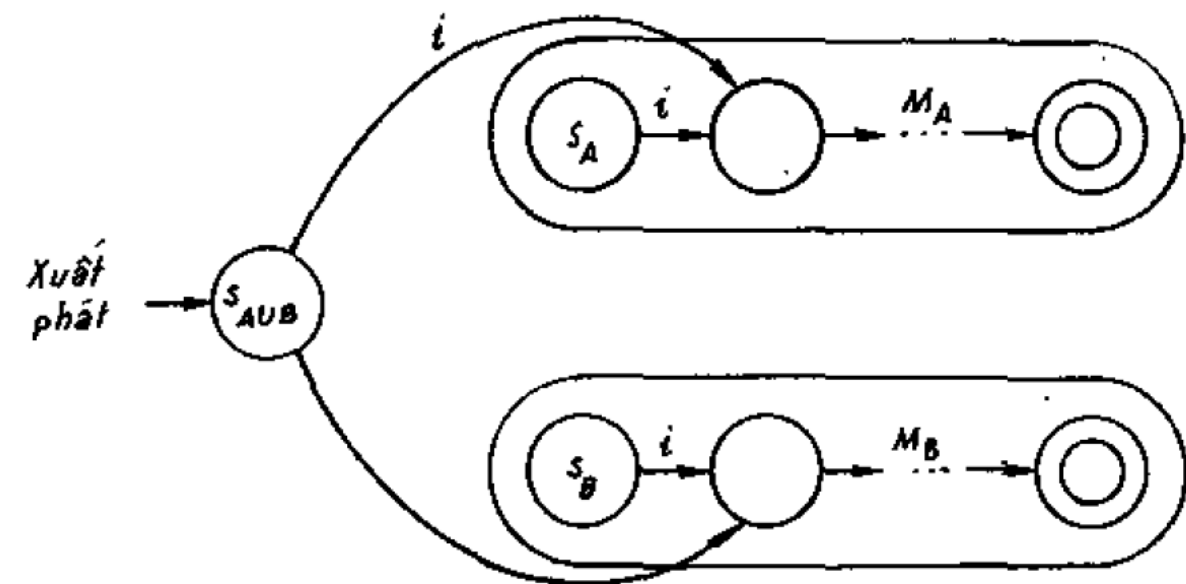
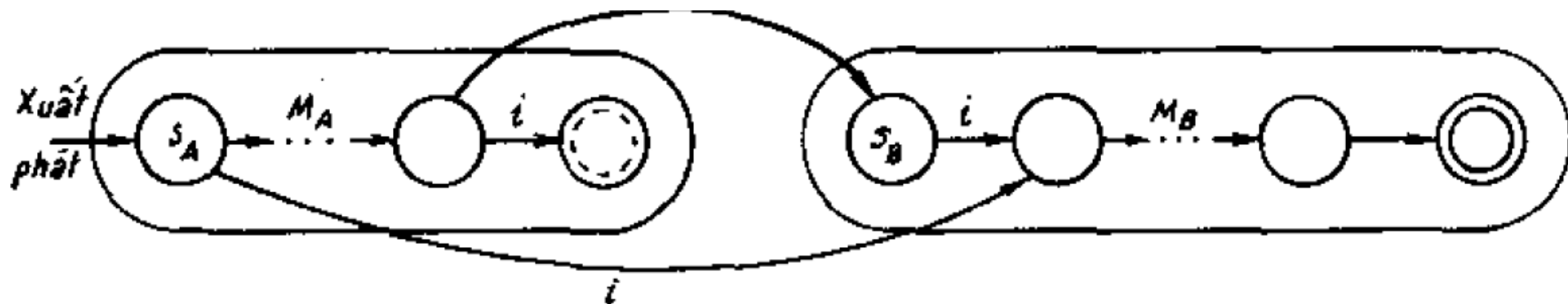
- Biểu thức chính quy trên tập I
 - ✓ Ký hiệu $\emptyset$ là một biểu thức chính quy
 - ✓ Ký hiệu λ là một biểu thức chính quy
 - ✓ Ký hiệu x là một biểu thức chính quy với mọi $x \in I$
 - ✓ Các ký hiệu (AB) , $(A \cup B)$, A^* là các biểu thức chính quy với mọi A, B là các biểu thức chính quy.
- Mỗi biểu thức chính quy biểu diễn một tập được đặc tả bởi các quy tắc sau:
 - ✓ Ký hiệu $\emptyset$ biểu diễn tập rỗng
 - ✓ Ký hiệu λ biểu diễn tập $\{\lambda\}$, tập chỉ chứa xâu rỗng
 - ✓ Ký hiệu x biểu diễn tập $\{x\}$ chỉ chứa xâu chỉ có một ký hiệu x
 - ✓ Các ký hiệu (AB) là tập được ghép bởi A, B
 - ✓ A^* biểu diễn bao đóng Kleene của tập được biểu diễn bởi A

Ví dụ

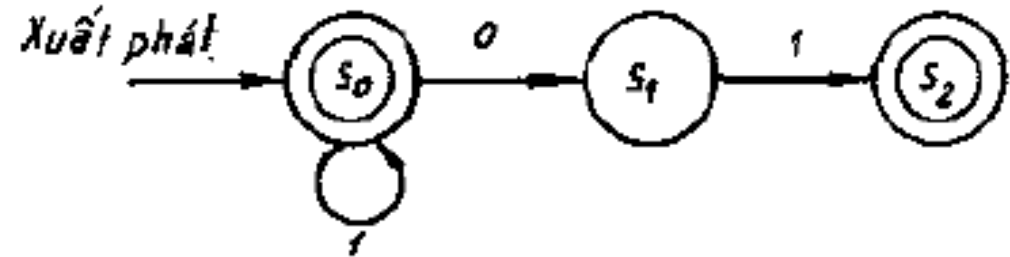
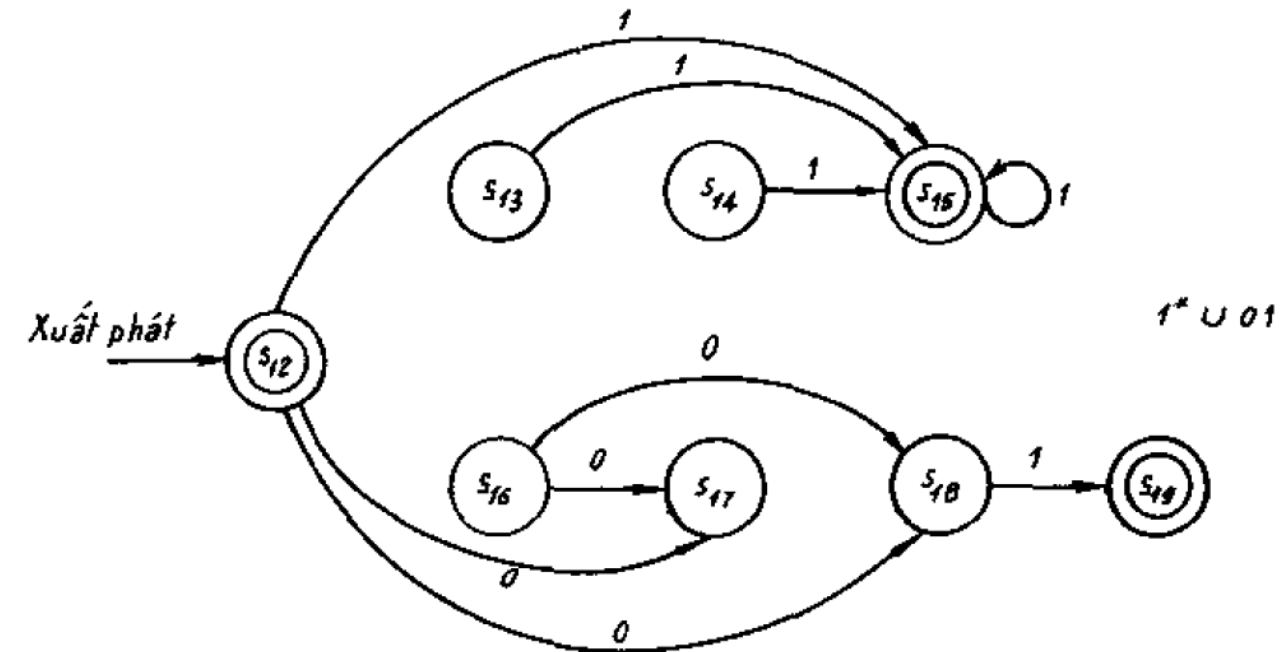
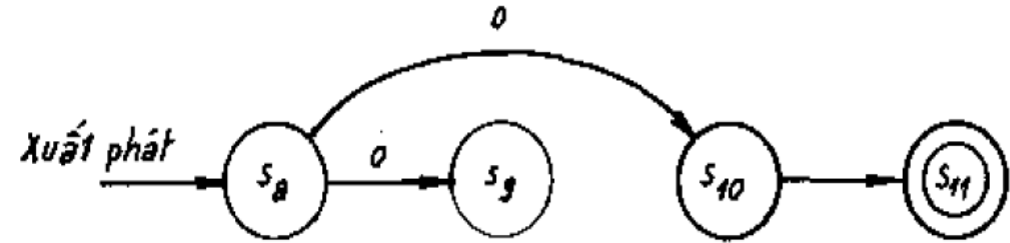
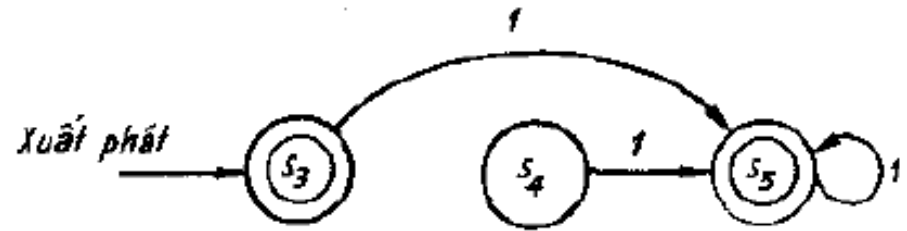
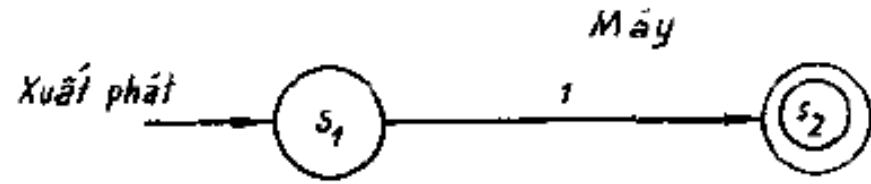
Biểu thức	Xâu
10^*	Một số 1 được tiếp theo bởi một số bất kỳ số 0 (kể cả không có số không nào)
$(10)^*$	Một số bất kỳ các cặp 10 (kể cả xâu rỗng)
$0 \cup 01$	Xâu 0 hoặc xâu 01
$0(0 \cup 1)^*$	Xâu bất kỳ bắt đầu bằng 0
$(0^*1)^*$	Xâu bất kỳ không kết thúc bằng 0

Định lý Kleene: Một tập là biểu thức chính quy nếu và chỉ nếu nó được chấp nhận bởi một otomat hữu hạn

- Mọi tập chính quy đều được chấp nhận bởi otomat hữu hạn nếu
 - ✓ $\emptyset$ được chấp nhận bởi otomat hữu hạn
 - ✓ λ được chấp nhận bởi otomat hữu hạn
 - ✓ x được chấp nhận bởi otomat hữu hạn với mọi $x \in I$
 - ✓ (AB) được chấp nhận bởi otomat hữu hạn nếu A, B được chấp nhận
 - ✓ $A \cup B$ được chấp nhận bởi otomat hữu hạn nếu A, B được chấp nhận
 - ✓ A^* được chấp nhận bởi otomat hữu hạn nếu A được chấp nhận



Dựng otomat hữu hạn đoán nhận tập chính quy $1^* \cup 01$



Tập hợp chính quy và văn phạm chính quy

- Văn phạm loại 3 (văn phạm chính quy): chỉ có các dạng sản xuất có dạng $w_1 \rightarrow w_2$, trong đó $w_1 = A$ và $w_2 = aB$ hoặc $w_2 = a$ (trong đó A, B là ký hiệu không kết thúc, còn a là ký hiệu kết thúc) hoặc có dạng $w_1 = S$ và $w_2 = \lambda$.
- Một tập sinh bởi một văn phạm chính quy nếu và chỉ nếu nó là một tập chính quy.

Mô tả bằng lời các xâu trong các tập chính quy sau:

a) 1^*0

b) 1^*00^*

c) $111 \cup 001$

d) $(1 \cup 00)^*$

e) $(00^*1)^*$

f) $(0 \cup 1)(0 \cup 1)^*00$

Xâu 1011 có thuộc các tập chính quy cho dưới đây không?

a) 10^*1^*

b) $0^*(10 \cup 11)^*$

c) $1(01)^*1^*$

d) $1^*01(0 \cup 1)$

e) $(10^*(11)^*$

f) $1(00)^*(11)^*$

g) $(10)^*1011$

h) $(1 \cup 00)(01 \cup 0)1^*$

Tìm otomat hữu hạn đoán nhận

a) $\{\lambda, 0\}$

b) $\{0, 11\}$

c) $\{0, 11, 000\}$

Tìm otomat hữu hạn đoán nhận

a) 0^*1^*

b) $(0 \cup 11)^*$

c) $01^* \cup 00^*1$

Dựng một ô tômat hữu hạn tất định chấp nhận các ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm chính quy $G = (V, T, S, P)$ trong đó $V = \{0, 1, S, A, B\}$, $T = \{0, 1\}$, S là ký hiệu xuất phát, và tập P các sản xuất là:

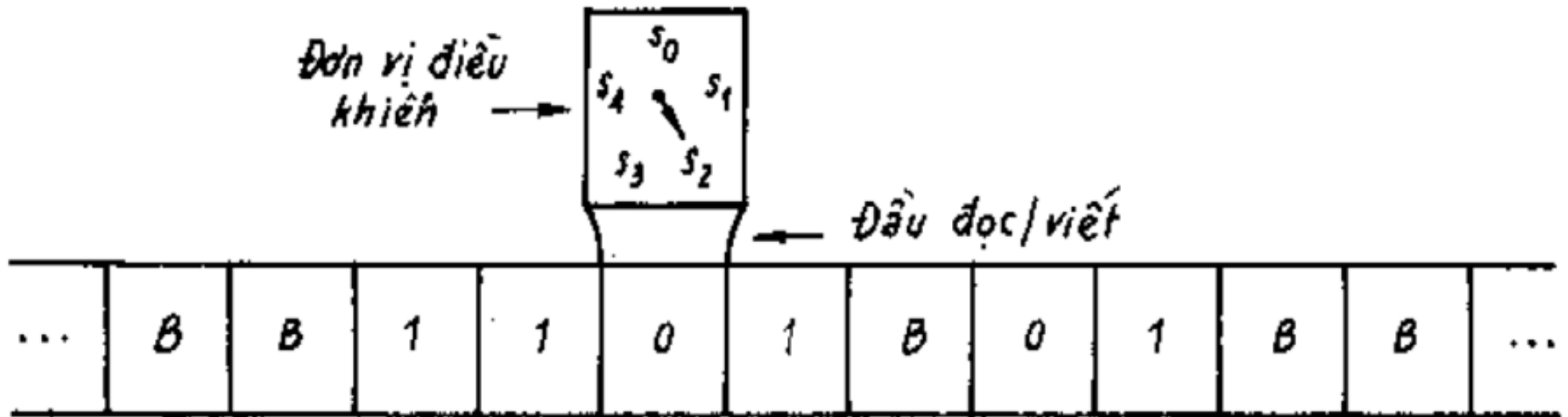
$$\text{a) } S \rightarrow 0A, S \rightarrow 1B, A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$$

$$\text{b) } S \rightarrow 1A, S \rightarrow 0, S \rightarrow \lambda, A \rightarrow 0B, B \rightarrow 1B, B \rightarrow 1$$

$$\text{c) } S \rightarrow 1B, S \rightarrow 0, A \rightarrow 1A, A \rightarrow 0B, A \rightarrow 1, A \rightarrow 0, B \rightarrow 1$$

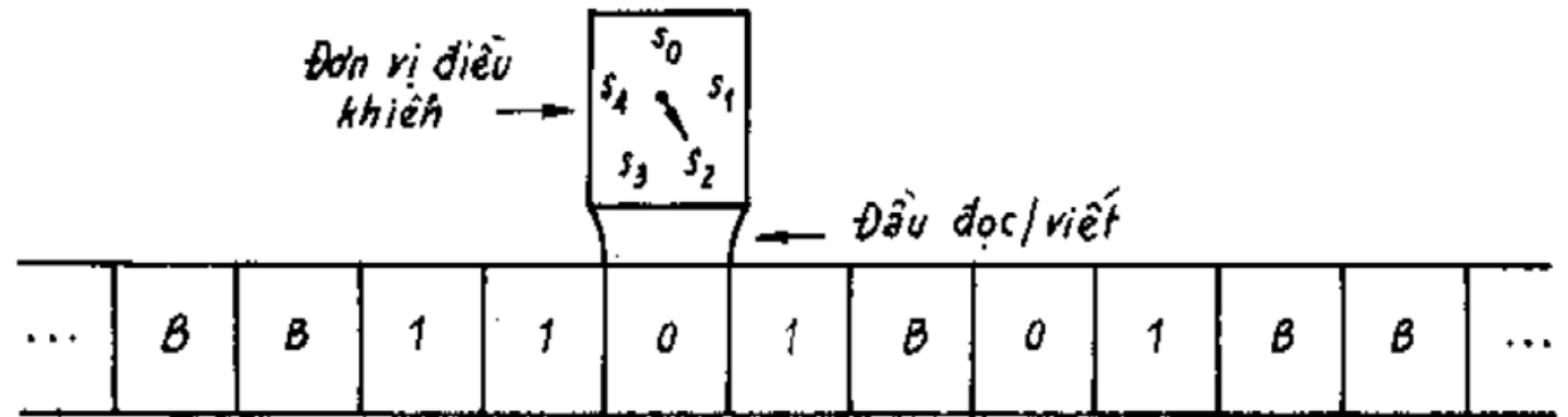
Máy Turing (1)

- Các máy otomat hữu hạn còn đơn giản, đoán nhận được biểu thức chính quy (sinh ra bởi văn phạm chính quy), không đoán nhận được tập dễ mô tả như $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Máy Turing $T = (S, I, f, s_0)$, gồm một tập hữu hạn S các trạng thái; một bộ ký hiệu I (chứa ký hiệu khoảng trống B); hàm f từ $S \times I$ đến $S \times I \times \{R, L\}$ trong đó R – phải, L – trái; trạng thái xuất phát s_0 .



Băng vô hạn về cả 2 phía. Tại một thời điểm bất kỳ chỉ có một số hữu hạn các ô khác trống (khác B)

Máy Turing (2)



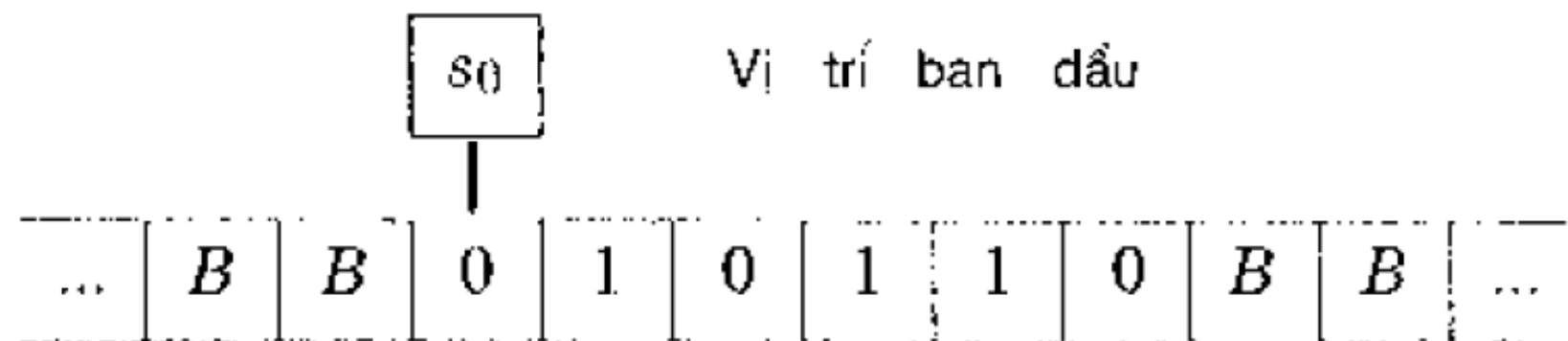
Băng vô hạn về cả 2 phía. Tại một thời điểm bất kỳ chỉ có một số hữu hạn các ô khác trống (khác B)

Ở mỗi bước, đơn vị điều khiển đọc được ký hiệu x hiện thời trên băng, nếu đơn vị điều khiển ở trạng thái s và hàm $f(s, x) = (s', x', d)$ thì đơn vị điều khiển:

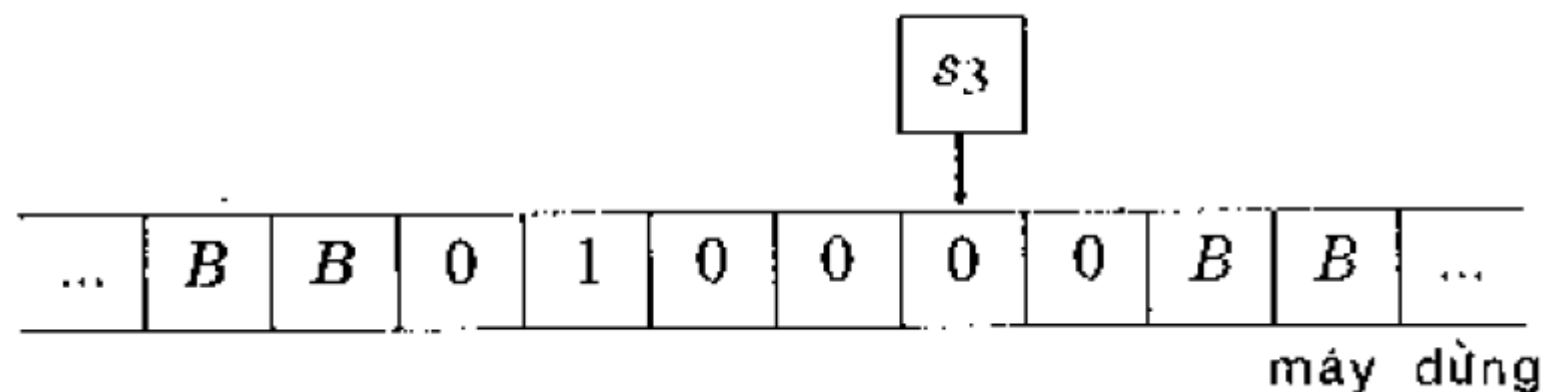
- 1) Chuyển sang trạng thái s' ;
- 2) Chuyển x' vào ô hiện thời sau khi xóa x ;
- 3) Chuyển sang phải 1 ô nếu $d = R$ hoặc chuyển sang trái nếu $d = L$

Để định nghĩa máy Turing là đặc tả **tập các bộ 5 phần tử dạng (s, x, s', x', d)** .

Khi bắt đầu hoạt động, máy Turing được giả thiết là ở trạng thái ban đầu s_0 và được đặt trên ký hiệu khác B trái nhất của băng. Trạng thái kết thúc của một máy Turing là trạng thái đầu tiên không nằm trong tập bộ 5 mô tả máy.



Xác định băng kết thúc khi máy Turing T được xác định bởi bảy bộ năm phân tử sau $(s_0, 0, s_0, 0, R)$, $(s_0, 1, s_1, 1, R)$, (s_0, B, s_3, B, R) , $(s_1, 0, s_0, 0, R)$, $(s_1, 0, s_0, 0, R)$, $(s_1, 1, s_2, 0, L)$, (s_1, B, s_3, B, R) , $(s_2, 1, s_3, 0, R)$ chạy trên băng như được cho trên



Máy Turing được đặc tả bởi các bộ năm phần tử $(s_0, 0, s_1, B, R)$,
 $(s_0, 1, s_1, 1, R)$, $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_2, 1, R)$, $(s_2, 0, s_1, 0, R)$, $(s_2, 1, s_3, 0, L)$,
 $(s_3, 0, s_4, 0, R)$, $(s_3, 1, s_4, 0, R)$ sẽ làm gì khi cho đầu vào là một chuỗi nhị phân?

Cho T là máy Turing được xác định bởi các bộ năm phần tử $(s_0, 0, s_1, 1, R)$, $(s_0, 1, s_1, 0, R)$, $(s_0, B, s_1, 0, R)$, $(s_1, 0, s_2, 1, L)$, $(s_1, 1, s_1, 0, R)$ và $(s_1, B, s_2, 0, L)$. Đối với các băng ban đầu cho dưới đây, hãy xác định băng kết thúc khi T dừng lại. Giả sử rằng T xuất phát từ vị trí ban đầu.

a)	...	B	B	0	0	1	1	B	B	...
b)	...	B	B	1	0	1	B	B	B	...
c)	...	B	B	1	1	B	0	1	B	...
d)	...	B	B	B	B	B	B	B	B	...

$(s_0, 0, s_1, 0, R), (s_0, 1, s_1, 0, L), (s_0, B, s_1, 1, R), (s_1, 0, s_2, 1, R), (s_1, 1, s_1, 1, R), (s_1, B, s_2, 0, R)$ và $(s_2, B, s_3, 0, R)$.

a)

...	B	B	0	1	0	1	B	B	...
-----	-----	-----	---	---	---	---	-----	-----	-----

b)

...	B	B	1	1	1	B	B	B	...
-----	-----	-----	---	---	---	-----	-----	-----	-----

b)

...	B	B	0	0	B	0	0	B	...
-----	-----	-----	---	---	-----	---	---	-----	-----

d)

...	B	B	B	B	B	B	B	B	...
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Máy Turing được đặc tả bởi các bộ năm phần tử $(s_0, 0, s_0, 0, R)$, $(s_0, 1, s_1, 0, R)$, (s_0, B, s_2, B, R) , $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_0, 1, R)$, (s_1, B, s_2, B, R) sẽ làm gì khi cho đầu vào là một xâu nhị phân?

Cũng hỏi như trên đối với máy Turing được đặc tả bởi các bộ năm phần tử $(s_0, 0, s_1, B, R)$, $(s_0, 1, s_1, 1, R)$, $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_2, 1, R)$, $(s_2, 0, s_1, 0, R)$, $(s_2, 1, s_3, 0, L)$, $(s_3, 0, s_4, 0, R)$ và $(s_3, 1, s_4, 0, R)$?

Xây dựng một máy Turing với các ký hiệu trên băng là 0, 1 và B , biết rằng máy thay số 0 đầu tiên bằng số 1 và không làm thay đổi bất cứ một ký hiệu nào khác trên băng.

Xây dựng một máy Turing với các ký hiệu trên băng là 0, 1, và B . Biết rằng với đầu vào là một xâu nhị phân máy sẽ thay tất cả các số 0 trên băng bằng các số 1 và không làm thay đổi bất kỳ một số 1 nào trên băng.

Máy Turing để đoán nhận ngôn ngữ

ĐỊNH NGHĨA Cho V là tập con của bộ chữ cái I . Một máy Turing $T = (S, I, f, s_0)$ **chấp nhận** chuỗi x trong V^* nếu và chỉ nếu T xuất phát từ vị trí ban đầu khi x đã được viết trên băng sẽ dừng lại ở một trạng thái kết thúc. T được nói là chấp nhận một tập con A của V^* nếu và chỉ nếu với mọi x thuộc A , x được chấp nhận bởi T .

Khi nào một máy Turing T không chấp nhận một chuỗi x trong V^* ? Câu trả lời ở đây là: x không được chấp nhận nếu T không dừng lại hoặc dừng lại không phải ở trạng thái kết thúc khi máy hoạt động trên băng có chứa các ký hiệu của x trong các ô liên tiếp và xuất phát từ vị trí ban đầu.

Tìm một máy Turing chấp nhận tập các xâu nhị phân có số 1 là bit thứ hai của chúng. (Tức là tập chính quy $(0^*1)1(0^*1)^*$).

Tìm máy Turing chấp nhận tập $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$

Giải: Để xây dựng một máy như vậy, ta sẽ dùng một ký hiệu phụ M trên băng như một phân tử đánh dấu. Ta có $V = \{0, 1\}$ và $I = \{0, 1, M\}$.

$(s_0, 0, s_1, M, R),$

$(s_1, 0, s_1, 0, R), (s_1, 1, s_1, 1, R), (s_1, M, s_2, M, L), (s_1, B, s_2, B, L), (s_2, 1, s_3, M, L), (s_3, 1, s_3, 1, L), (s_3, 0, s_4, 0, L), (s_3, M, s_5, M, R), (s_4, 0, s_4, 0, L), (s_4, M, s_0, M, R), (s_5, M, s_6, M, R).$

Dựng một máy Turing chấp nhận tập tất cả các xâu nhị phân kết thúc bằng một số 0.

Dựng một máy Turing chấp nhận tập tất cả các xâu nhị phân chứa ít nhất hai số 1.

Dựng một máy Turing chấp nhận tập tất cả các xâu nhị phân chứa một số chẵn con số 1.

Tính hàm bằng máy Turing

- Máy Turing T khi cho đầu vào x sẽ dừng lại với đầu ra y ở trên băng, khi đó có thể định nghĩa $T(x) = y$
- Miền xác định của T là tập các đầu vào làm cho T dừng lại; $T(x)$ không xác định nếu T không dừng lại khi cho x như một đầu vào
- Dùng biểu diễn nhất phân các số nguyên, cụ thể số nguyên n được biểu diễn bằng đầu vào gồm $n + 1$ số 1. Số 0 được biểu diễn 1, số 5 được biểu diễn 11111
- Biểu diễn bộ k số nguyên $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ bằng ghép của k đầu vào, đầu thứ i biểu diễn nhất phân của n_i , giữa các đầu vào này ngăn cách bởi dấu $*$. Ví dụ bộ 3 số $(3, 0, 2)$ được biểu diễn bằng 1111*1*111

Xây dựng máy Turing cộng hai số nguyên

Giải: Ta cần phải dựng một máy Turing tính được hàm $f(n_1, n_2) = n_1 + n_2$. Cặp (n_1, n_2) được biểu diễn bằng xâu gồm n_1+1 số 1 tiếp sau là một dấu sao, rồi tiếp sau nữa là xâu gồm $n_2 + 1$ số 1. Máy T cần phải nhận xâu này như đầu vào và tạo đầu ra trên băng là xâu gồm $n_1 + n_2 + 1$ con số 1. Có một cách để làm điều này như sau. Máy xuất phát ở số 1 phía trái cùng của xâu đầu vào và thực hiện các bước để xóa số 1 này (máy sẽ dừng nếu $n_1 = 0$ sao cho không còn số 1 nào trước dấu sao nữa) rồi thay dấu sao bằng số 1 trái cùng còn lại và sau đó dừng lại. Ta có thể dùng các bộ năm phần tử sau để làm điều đó: $(s_0, 1, s_1, B, R)$, $(s_1, *, s_2, B, R)$, $(s_1, 1, s_2, B, R)$, $(s_2, 1, s_2, B, R)$, $(s_2, *, s_3, 1, R)$

Nhận xét

- Tính hàm đơn giản nhưng máy Turing đã khá phức tạp
 - Để nhân được hai số cần 31 bộ 5 phần tử và 11 trạng thái
- Với các công việc phức tạp thì sao?
- Dùng đa băng (luôn xây dựng được máy dùng một băng làm được như máy đa băng)
- Dù có thay đổi hay tổ hợp của máy Turing thì cũng không làm tăng giảm sức mạnh của máy

Dựng một máy Turing tính hàm $f(n) = n + 2$ với mọi số nguyên không âm n .

Dựng một máy Turing tính hàm $f(n) = n - 3$ nếu $n \geq 3$ và $f(n) = 0$ nếu $n = 0, 1, 2$ đối với mọi số nguyên không âm n .

Dựng máy Turing tính hàm $f(n) = n \bmod 3$

Dựng máy Turing tính hàm $f(n) = 2n$

Dựng máy Turing tính hàm $f(n_1, n_2) = \min(n_1, n_2)$ với mọi cặp số nguyên không âm n_1 và n_2 .