# Chương 2:

# Các khái niệm cơ bản của xác suất

Nguyễn Linh Trung
Trần Thị Thúy Quỳnh

Đại học Công nghệ, ĐHQGHN

# Nội dung

- 2.1. Thực nghiệm ngẫu nhiên
- **2.2 Các định lý của xác suất**
- 2.3 Xác suất có điều kiện
- 2.4 Chuỗi các thực nghiệm

# Các định lý của xác suất

- Xác suất là số được gán cho mỗn biến cố để biểu diễn khả năng xuất hiện của sự kiện.
- **Quy luật xác suất** là quy luật gán một số $P(A)$ cho biến cố $A$.
- $P(A)$ được gọi là xác suất của $A$ và phải thỏa mãn các định lý sau:

1. $P[A] \geq 0$
2. $P[S] = 1$
3. Let $B \in \mathcal{F}$ such that $A \cap B = \emptyset$, then

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

3*. Let $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ such that $A_i \cap A_j = \emptyset$ for all $i \neq j$, then

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k]$$

Định lý 3* là tổng quát hóa của Định luật 3.

# Các hệ quả của xác suất

1. $P[A^c] = 1 - P[A]$
2. $P[A] \leq 1$
3. $P[\emptyset] = 0$
4. Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là loại trừ nhau, thì

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right] = \sum_{k=1}^{n} P[A_k]$$

5. $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
6. Nếu $A \subset B$ thì $P[A] \leq P[B]$.

# Xác suất ban đầu I

- Sử dụng các định lý, các phép toán/tính chất tập hợp tạo ra một tập các quy luật tính toán tất cả các xác suất.
- Tuy nhiên, chúng ta các phải xác định **xác suất ban đầu** đối với một số tập biến cố cơ bản và các xác suất còn lại được tính từ xác suất ban đầu này.
- Xác suất ban đầu phải thỏa mãn các định lý của xác suất.

# Xác suất ban đầu II

Đối với không gian mẫu rời rạc:

- $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- Chỉ định (gán) xác suất ban đầu: $P[\{a_k\}]$ đối với $k = 1, \ldots, n$ (chỉ gán xác suất đối với các biến cố cơ sở)
- Nếu $\{a_k\}$ có **khả năng xuất hiện như nhau**, thì xác suất ban đầu sẽ là:
  $P[\{a_1\}] = P[\{a_2\}] = \ldots = P[\{a_n\}] = 1/n$
- Nếu $\{a_k\}$ có khả năng xuất hiện như nhau và $A \in \mathcal{F}$, thì $P[A] =$ (số kết quả trong $A)/n$

# Xác suất ban đầu III

**Bài tập**

- $S_3 = \{\text{HHH,HHT,HTH,THH,TTH,THT,HTT,TTT}\}$
- Giả thiết các kết quả có khả năng xuất hiện như nhau.
- Xác suất ban đầu: xác suất xuất hiện một trong số các kết quả trong không gian mẫu $S_3$ bằng $1/8$.
- Tính các xác suất khác:

$$\begin{aligned}
&P[\text{2 mặt ngửa xuất hiện trong 3 lần tung}]\\
&\quad = P[\{\text{HHT,HTH,THH}\}]\\
&\quad = P[\{\text{HHT}\}] + P[\{\text{HTH}\}] + P[\{\text{THH}\}] = 3/8
\end{aligned}$$

# Xác suất ban đầu IV

Đối với không gian mẫu liên tục:

- $\mathcal{F}$ **không** phải là tập **tất cả** các tập con của $S$ do các điểm đơn lẻ trong $S$ không phải là các biến cố cơ sở (không thể gán xác suất cho chúng)
- Nhiệm vụ đầu tiên: xác định quy luật (luật xác suất) để chỉ định các số đối với các khoảng (các vùng).
- Nếu $S = \mathbb{R}$ thì xác định quy luật đối với các khoảng trong $\mathbb{R}$.

# Xác suất ban đầu V

**Bài tập**

- $S_7 = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$
- Giả thiết tất cả các kết quả có khả năng xuất hiện như nhau.
- Gán xác suất ban đầu đối với mỗi khoảng $[a, b]$:

$$P\left[[a, b]\right] = (b - a), \quad \text{for } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

- Câu hỏi: Kiểm chứng rằng $P\left[[a, b]\right]$ thỏa mãn các định lý xác suất.

# Xác suất ban đầu VI

**Kết quả**

- $P\left[[a,b]\right] = (b-a) \geq 0$ do $b \geq a \geq 0$
- $S = [0,1] \Rightarrow P[S] = (b-a) = (1-0) = 1$
- Giả sử $b \geq c \geq a$ thì
  $P\left[[a,c] \cup [c,b]\right] = P\left[[a,b]\right] = (b-a)$
  $P\left[[a,c]\right] = (c-a)$; $P\left[[c,b]\right] = (b-c)$
  $\Rightarrow P\left[[a,c] \cup [c,b]\right] = P\left[[a,c]\right] + P\left[[c,b]\right]$

thỏa mãn các định lý của xác suất.

# Xác suất có điều kiện I

- Là xác suất xảy ra biến cố $A$ khi biến cố $B$ đã xuất hiện
- Xác suất có điều kiện $P[A|B]$, được gọi là xác suất xuất hiện $A$ với điều kiện $B$, được tính bởi:

$$\boxed{P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, \quad \text{với } P[B] > 0}$$

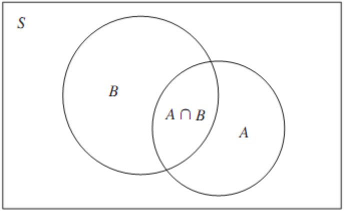



**FIGURE 2.9**
If $B$ is known to have occurred, then $A$ can occur only if $A \cap B$ occurs.

- Việc biết $B$ ngụ ý rằng kết quả thuộc $B$
- $A$ xuất hiện trong không gian mẫu bị giảm của $B$ (vùng $A \cap B$)
- $P[A|B]$ được coi đơn giản là việc chuẩn hóa biến cố giao với $B$.

# Xác suất có điều kiện II

- $P[A \cap B] = P[A|B]P[B] = P[B|A]P[A]$.
- Câu hỏi: $P[A|B] =?$ nếu
  - $A = B$
  - $A \cap B = \emptyset$
  - $A \subset B$
  - $B \subset A$

# Xác suất có điều kiện III

**Kết quả:**

- Nếu $A = B$ thì $P[A \cap B] = P[B] \Rightarrow P[A|B] = 1$
- Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $P[A \cap B] = 0 \Rightarrow P[A|B] = 0$
- Nếu $A \subset B$ thì $P[A \cap B] < P[B] \Rightarrow P[A|B] < 1$
- Nếu $B \subset A$ thì $P[A \cap B] = P[B] \Rightarrow P[A|B] = 1$

# Xác suất có điều kiện IV



**Bài tập:**

- Thực nghiệm: Bình có chứa 2 quả bóng đen đánh số 1 và 2 và 2 quả bóng trắng đánh số 3 và 4. Chọn một bóng và ghi lại số và màu sắc của bóng được chọn.
- Không gian mẫu: $S = \{(1, b), (2, b), (3, w), (4, w)\}$
- Biến cố quan tâm:
  $A = \{(1, b), (2, b)\}$; bóng đen được chọn
  $B = \{(2, b), (4, w)\}$; bóng đánh số chẵn được chọn
  $C = \{(3, w), (4, w)\}$; số bóng lớn hơn 2
- Câu hỏi: Tính $P[A|B]$, $P[A|C]$.
- Giải thiết các kết quả có khả năng xảy ra như nhau.

# Xác suất có điều kiện V

**Kết quả:**

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[\{(2,b)\}]}{P[B]} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

$$P[A|C] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[\emptyset]}{P[B]} = \frac{0}{0.5} = 0$$

# Xác suất có điều kiện VI



**Bài tập:**

- Thực nghiệm: Hệ truyền tin nhị phân phát bit 0 và bit 1 $(i = 0, 1)$. Gọi $A_i$ là biến cố nơi phát phát bit $i$, và $B_j$ là biến cố nơi nhận quyết định là bit $j$, trong đó $j = 0, 1$. Biết rằng khả năng phát bit 0 và bit 1 là như nhau. Xác suất quyết định sai là $\epsilon$. Tính các xác suất $P[A_i \cap B_j]$.

# Xác suất có điều kiện VII

**Kết quả:**

$P[A_i \cap B_j] = P[B_j \cap A_i] = P[B_j|A_i]P[A_i]$

$P[A_i] = 1/2$; $P[B_0|A_0] = P[B_1|A_1] = 1 - \epsilon$;

$P[B_0|A_1] = P[B_1|A_0] = \epsilon$

$\Rightarrow P[A_0 \cap B_0] = P[A_1 \cap B_1] = \frac{1}{2}\epsilon$;

$P[A_1 \cap B_0] = P[A_0 \cap B_1] = \frac{1}{2}(1 - \epsilon)$

# Định lý tổng xác suất

- Phân chia $S$ thành các mảng $\{B_1, \ldots, B_n\}$ sao cho $B_1 \cup \cdots \cup B_n = S$ và $B_i \cap B_j = \emptyset$ đối với tất cả $i \neq j$.
- Do $A = A \cap B = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$ và các $(A \cap B_k)$ không chồng lên nhau.
  $\Rightarrow P[A] = P[A \cap B_1] + \cdots + P[A \cap B_n]$

Định lý tổng xác suất sẽ là:

$$\boxed{P[A] = \sum_{k=1}^{n} P[A|B_k]P[B_k]}$$

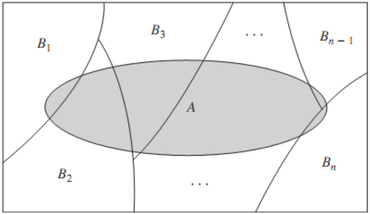



**FIGURE 2.12**
A partition of $S$ into $n$ disjoint sets.

# Quy tắc Bayes

- Cho $B_1, \ldots, B_n$ là các mảng (các biến cố) hợp thành không gian mẫu $S$. Giả thiết biến cố $A$ đã xuất hiện.
- Quy tắc Bayes:

$$\boxed{P[B_j|A] = \frac{P[A|B_j]P[B_j]}{P[A]} = \frac{P[A|B_j]P[B_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[A|B_k]P[B_k]}}$$

- $P[B_j]$: xác suất **tiền nghiệm - priori**: xác suất của các biết cố trước khi thực nghiệm diễn ra.
- $P[B_j|A]$: xác suất **hậu nghiệm - posteriori**: xác suất của các biến cố sau thi thực nghiệm diễn ra và chúng ta thu được $A$.
- Cách để ghi nhớ quy tắc Bayes: dự đoán lối vào dựa trên lối ra.

$$P[\mathsf{In}|\mathsf{Out}] = \frac{P[\mathsf{Out}|\mathsf{In}]P[\mathsf{In}]}{P[\mathsf{Out}]}$$

# Tính độc lập của biến cố

- Nếu biết được sự xuất hiện của biến cố $B$ không ảnh hưởng gì đến biến cố $A$, thì biến cố $A$ được coi là độc lập với biến cố $B$:

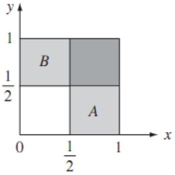
$$\boxed{P[A \cap B] = P[A]P[B]}$$

- $A$ và $B$ là độc lập thì $P[A|B] = P[A]$ và $P[B|A] = P[B]$.
- Nếu ít nhất $P[A] = 0$, $P[B] = 0$, và $A \cap B = \emptyset$, thì $A$ và $B$ là độc lập.
- Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là độc lập nếu

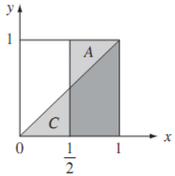
$$P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] = P[A_1]P[A_2]\cdots P[A_n]$$

# Bài tập

- Thực nghiệm: Nhặt $x$ và $y$ trong khoảng $[0, 1]$
- Các biến cố: $A = \{x > 0.5\}$, $B = \{y > 0.5\}$, $C = \{x > y\}$
- Câu hỏi: Tính $P[A|B]$ và $P[A|C]$. $A$ và $B$ có độc lập không? $A$ và $C$ có độc lập không?




(a) Events $A$ and $B$ are independent.




(b) Events $A$ and $C$ are not independent.

**FIGURE 2.13**
Examples of independent and nonindependent events.

# Kết quả

$P[A] = P[B] = P[C] = 1/2.$

**Cách 1:**

- $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P[A]$, vì vậy $A$ và $B$ là độc lập.
- $P[A|C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4} \neq P[A]$ vì vậy $A$ và $C$ là không độc lập.

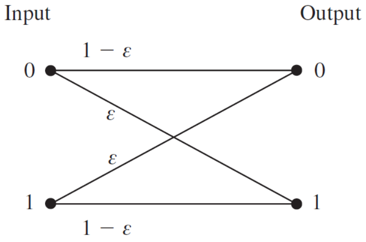
**Cách 2:**

- $P[A \cap B] = 0.25$, $P[A]P[B] = 0.5 \times 0.5 = 0.25$, do đó $P[A \cap B] = P[A]P[B]$, vì vậy $A$ và $B$ là độc lập.
- $P[A \cap C] = \frac{3}{8} \neq P[A]P[C]\frac{1}{4}$ vì vậy $A$ và $C$ là không độc lập.

# Bài tập: Hệ truyền tin nhị phân I



- Mô hình của hệ truyền tin nhị phân như sau:




  Máy phát có phát bit 0 hoặc 1 qua kênh. Bộ thu quyết định lối vào là bit nào.

- Biến cố: Biến cố $A_i$ ứng với "lối vào là $i$" và biến cố $B_j$ ứng với "bộ thu quyết định là $j$", với $i, j = 0, 1$.
- Câu hỏi: $P[A_i \cap B_j]$?
- Giả thiết $P[A_1] = p$ và vẽ đồ thị cây

# Bài tập: Hệ truyền tin nhị phân II

- **Kết quả:**

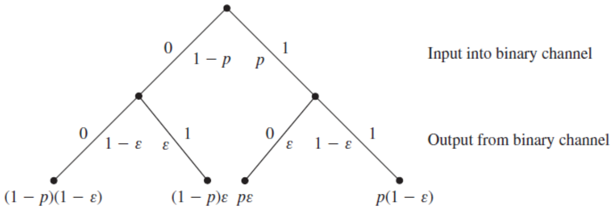



**FIGURE 2.11**
Probabilities of input-output pairs in a binary transmission system.

- $P[A_0 \cap B_0] = P[B_0|A_0]P[A_0] = (1-\epsilon)(1-p)$
  $P[A_0 \cap B_1] = P[B_1|A_0]P[A_0] = \epsilon(1-p)$
  $P[A_1 \cap B_0] = P[B_0|A_1]P[A_1] = \epsilon p$
  $P[A_1 \cap B_1] = P[B_1|A_1]P[A_1] = (1-\epsilon)p$

# Bài tập: Hệ truyền tin nhị phân III

# Bài tập



- Câu hỏi: Cho $p = 0.5$ và $\epsilon = 0.3$, Lối vào nào (0 hay 1) có khả năng xuất hiện nhiều hơn khi bộ thu quyết định là 1?
- Biến cố: $B_1$ "bộ thu quyết định là bit 1. Chúng ta cần tính$P[A_0|B_1]$ and $P[A_1|B_1]$.

# Bài tập

- Câu hỏi: Cho $p = 0.5$ và $\epsilon = 0.3$, Lối vào nào (0 hay 1) có khả năng xuất hiện nhiều hơn khi bộ thu quyết định là 1?
- Biến cố: $B_1$ "bộ thu quyết định là bit 1. Chúng ta cần tính$P[A_0|B_1]$ and $P[A_1|B_1]$.
- Theo định lý xác suất tổng cộng: $P[B_1] = P[B_1|A_0]P[A_0] + P[B_1|A_1]P[A_1] = 0.5\epsilon + 0.5(1-\epsilon) = 0.5$
- Theo quy luật Bayes:

$$P[A_0|B_1] = \frac{P[B_1|A_0]P[A_0]}{P[B_1]} = \frac{\epsilon \times 0.5}{0.5} = \epsilon = 0.3$$

$$P[A_1|B_1] = \frac{P[B_1|A_1]P[A_1]}{P[B_1]} = \frac{(1-\epsilon) \times 0.5}{0.5} = 1-\epsilon = 0.7$$

- Do, $P[A_1|B_1] > P[A_0|B_1]$
- Nên, khả năng lối vào là 1 cao hơn.

# Chuỗi các thực nghiệm độc lập



- Một thực nghiệm ngẫu nhiên gồm tuần tự các thực nghiệm con $E_1, E_2, \ldots, E_n$.
- Giả thiết rằng các thực nghiệm con này độc lập.
- Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố ứng với $E_1, E_2, \ldots, E_n$
- Do các thực nghiệm con là độc lập nên

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] = P[A_1]P[A_2]\cdots P[A_n]$$

- **Phép thử Bernoulli**: thực hiện thực nghiệm và ghi lại sự kiện $A$ xảy ra hay không. Kết quả là "thành công -success" nếu $A$ xuất hiện và "không thành công - failure" nếu $A$ không xuất hiện.
- Có 2 vấn đề cần quan tâm:
  1. Đếm số $k$ **lần thành công trong** $n$ lần lặp lại phép thử Bernoulli một cách độc lập.
  2. Lặp lại phép thử Bernoulli một cách độc lập cho đến **lần thành công đầu tiên**.

# Luật xác suất nhị thức - Binomial probability law



- Thực nghiệm tuần tự: Đếm số $k$ lần thành công trong $n$ lần lặp lại độc lập của phép thử Bernoulli.
- Gọi $p$ là xác suất thành công của một phép thử Bernoulli.
- Xác suất để $k$ lần thành công theo định luật xác suất **nhị thức** như sau:

$$\boxed{p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{với } k = 0, \ldots, n}$$

$$\text{và } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

[Yêu cầu đọc: Ví dụ 2.37, 2.40]

# Luật xác suất hình học - Geometric probability law

- Thực nghiệm tuần tự: Lặp lại một cách độc lập phép thử Bernoulli cho đến lần thành công đầu tiên.
- Gọi $p$ là xác suất thành công của một phép thử Bernoulli.
- Xác suất lần thành công đầu tiên ở lần thử thứ $m$th theo luật xác suất **hình học** như sau:

$$p(m) = (1-p)^{m-1}p, \quad \text{for } m = 1, 2, \ldots$$

[Yêu cầu đọc: Ví dụ 2.43/Leon-Garcia]

# Chuỗi các thực nghiệm phụ thuộc

- Thực nghiệm tuần tự: kết quả của một thực nghiệm con nào đó xác định thực nghiệm con tiếp theo.
- Với các kết quả của một chuỗi các thực nghiệm con trong quá khứ $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$, kết quả $s_n$ của thực nghiệm con tiếp theo chỉ phụ thuộc vào thực nghiệm con $s_{n-1}$, và

$$P[\{s_n\} \mid \{s_0\} \cap \{s_1\} \cap \cdots \cap \{s_{n-1}\}] = P[\{s_n\} \mid \{s_{n-1}\}]$$

- Do đó, chuỗi $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n$ được gọi là **chuỗi Markov**, và có xác suất:

$$P[s_0, s_1, \ldots, s_n] = P[s_n|s_{n-1}]P[s_{n-1}|s_{n-2}] \cdots P[s_0]$$

[Yêu cầu đọc: Ví dụ 2.45]