

Kiểm định giả thuyết P-Value

PGS.TS. Lê Sỹ Vinh
Khoa CNTT – Đại học Công Nghệ

Các loại giả thuyết

- Giả thuyết không (H_0)
 - Là một phát biểu về tham số của tổng thể
 - Thường là một tuyên bố bị nghi ngờ
 - Được cho là đúng cho đến khi nó được chứng minh là sai
- Giả thuyết thay thế (H_a)
 - Nhà nghiên cứu mong muốn ủng hộ và chứng minh là đúng
 - Là phát biểu ngược với H_0
 - Được cho là đúng nếu H_0 bị bác bỏ
- **Kiểm định giả thuyết nhằm mục đích bác bỏ hoặc không bác bỏ H_0 . Không nên kết luận là chấp nhận H_0 .**

Xây dựng giả thuyết về trung bình tổng thể

- Giả thuyết “có thay đổi”:
 - $H_0: \mu = \mu_0$
 - $H_a: \mu \neq \mu_0$
- Giả thuyết “thay đổi lớn hơn”:
 - $H_0: \mu \leq \mu_0$
 - $H_a: \mu > \mu_0$
 - Lưu ý: Chúng ta phải bác bỏ H_0 để giả thuyết H_a đúng
- Giả thuyết “thay đổi nhỏ hơn”:
 - $H_0: \mu \geq \mu_0$
 - $H_a: \mu < \mu_0$
 - Lưu ý: Chúng ta phải bác bỏ H_0 để giả thuyết H_a đúng
- Trong đó μ_0 là giá trị cho trước.

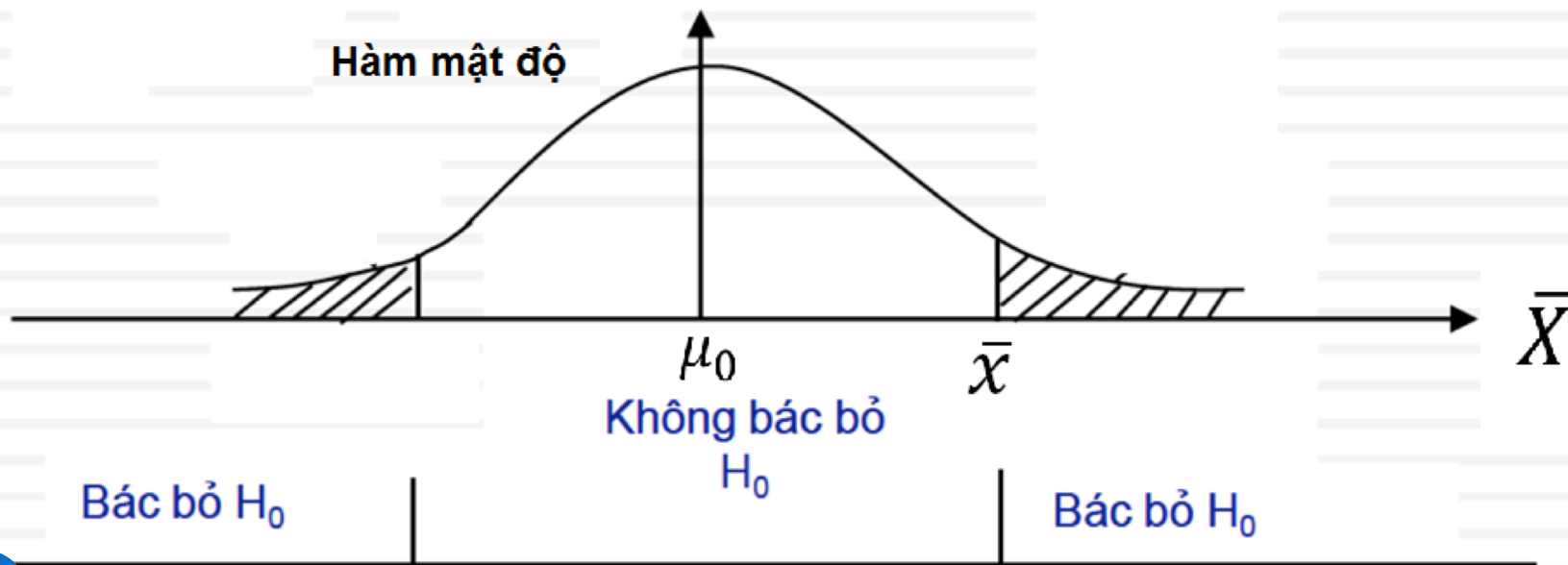
Trường hợp cỡ mẫu lớn

Kiểm định giả thuyết “có thay đổi”

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

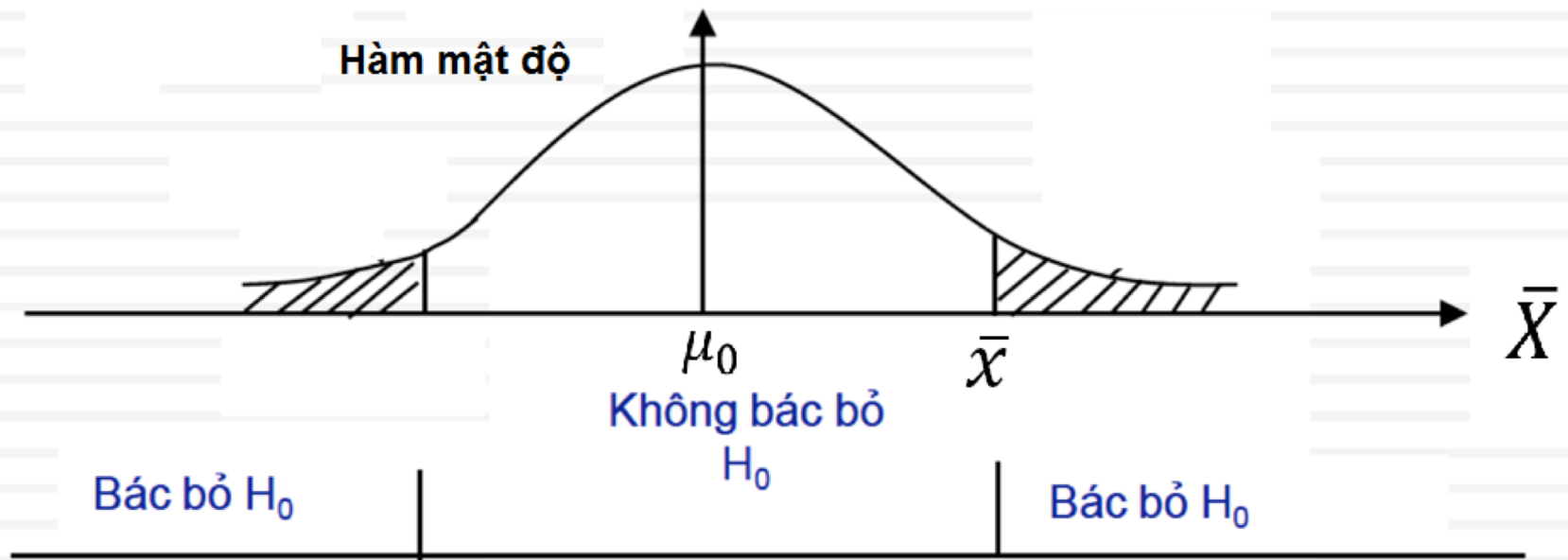
- P-value là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà vẫn có thể bác bỏ được H_0 .



Kiểm định giả thuyết “có thay đổi”

$$H_0: \mu = \mu_0$$

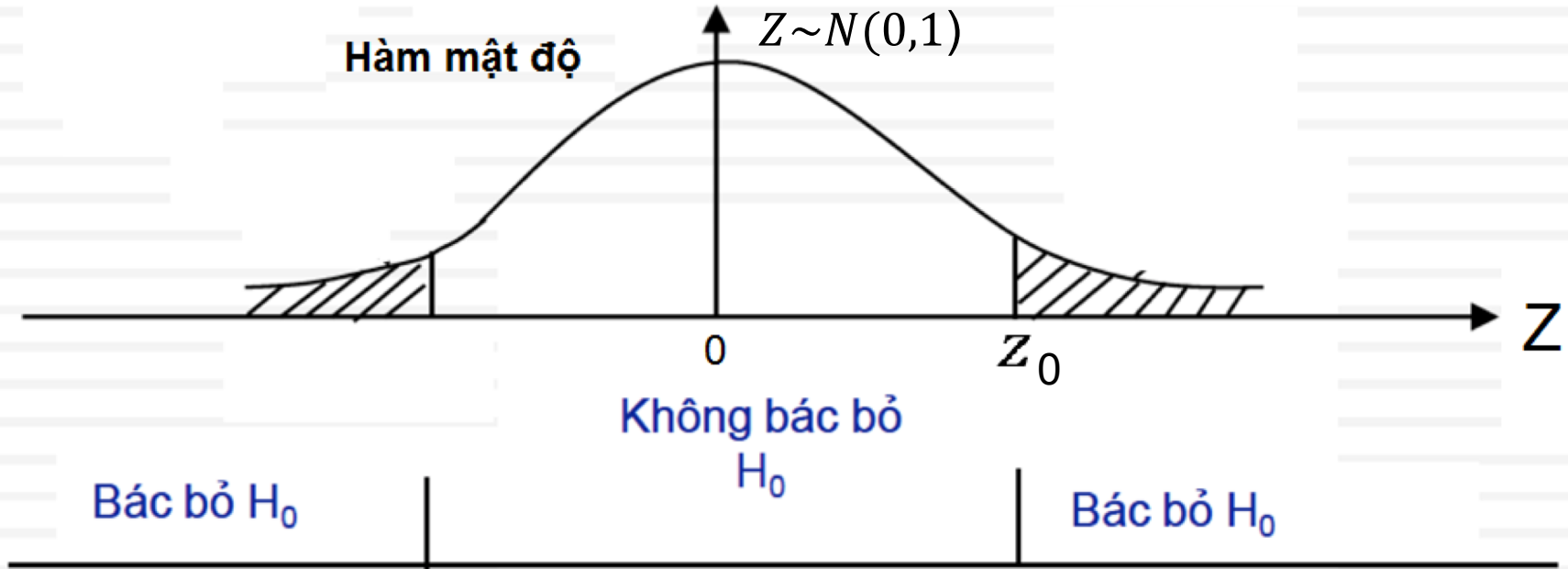
$$H_a: \mu \neq \mu_0$$



$$P - value = 2P(\bar{X} \leq \bar{x}) \text{ nếu } \bar{x} < \mu_0$$

$$P - value = 2P(\bar{X} \geq \bar{x}) \text{ nếu } \bar{x} > \mu_0$$

Kiểm định giả thuyết “có thay đổi”

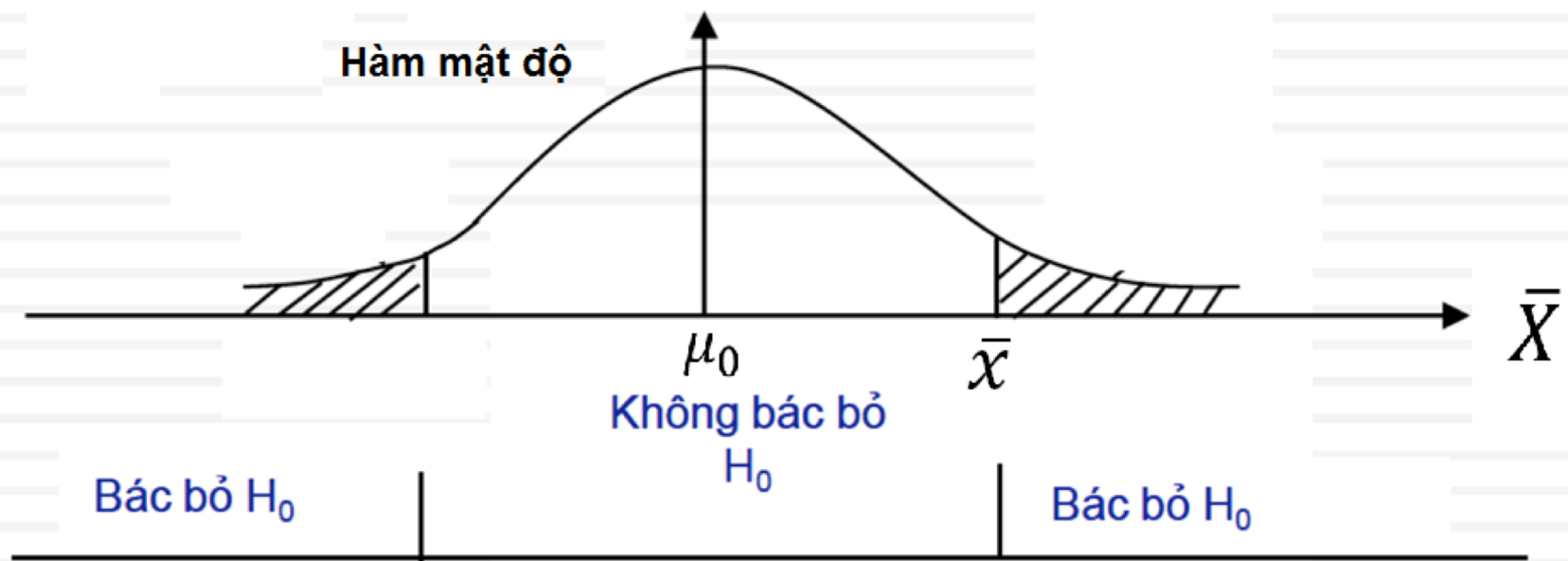


Tính giá trị: $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$P - value = P(Z < -|z_0|) + P(Z > |z_0|) = 2 \times P(Z > |z_0|)$$

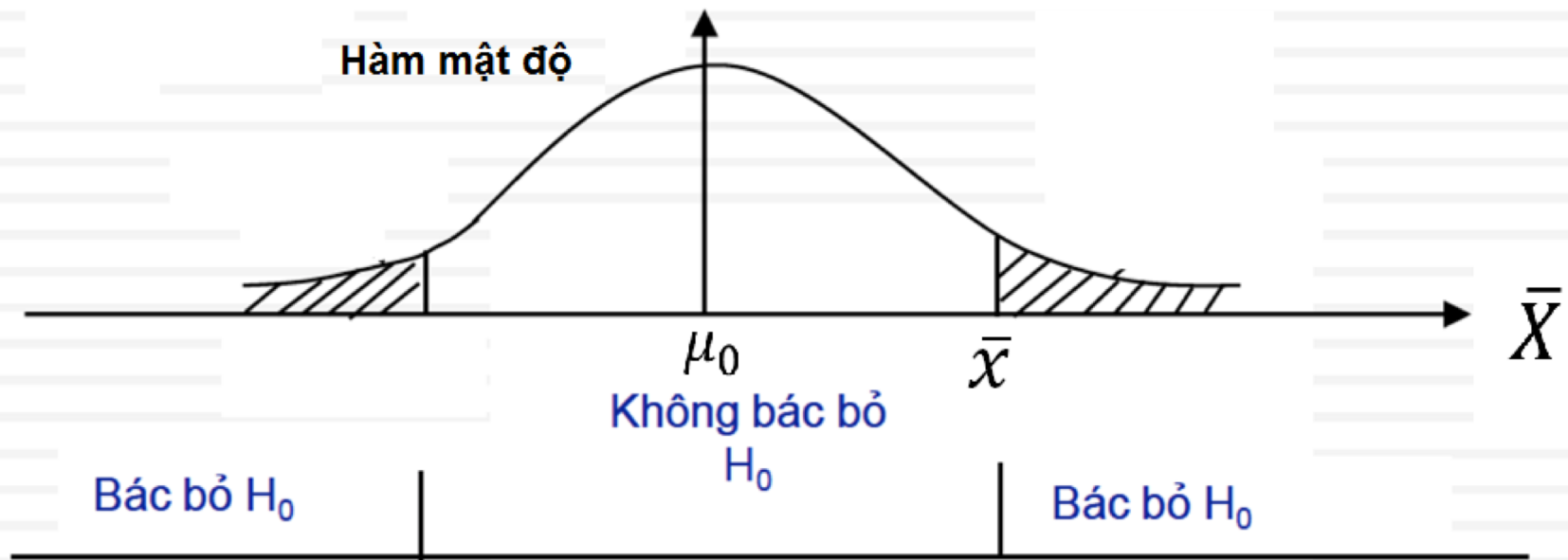
Bài tập 1

Một người nông dân sử dụng 1 loại phân bón mới cho 1 vườn táo và thu được 1400kg trên 50 cây. Biết rằng mức trung bình khi chưa sử dụng loại phân bón mới này là 26kg/1 cây với độ lệch chuẩn là 10 kg. Hãy tìm giá trị p-value của giả thuyết loại phân bón mới làm thay đổi năng suất.



Bài tập 2

Sau khi thay đổi giám đốc, nhà máy sản xuất thép ghi nhận sản lượng trong 30 ngày, có trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu lần lượt là 180 tấn và 20 tấn. Hãy tìm giá trị p-value của giả thuyết rằng sản lượng bình quân hàng ngày của nhà máy hiện nay khác với mức sản lượng trung bình 200 tấn/ngày đã được ghi nhận cách đây 1 năm.



Bài tập 3

Một nhà máy sản xuất sắm lốp ô tô tuyên bố rằng tuổi thọ trung bình một chiếc lốp ô tô của họ là 20000 dặm. Cơ quan giám định nghi ngờ lời tuyên bố này đã kiểm tra 50 chiếc lốp và tìm được trung bình mẫu là $\bar{x} = 19000$ dặm với độ lệch tiêu chuẩn là 5000 dặm.

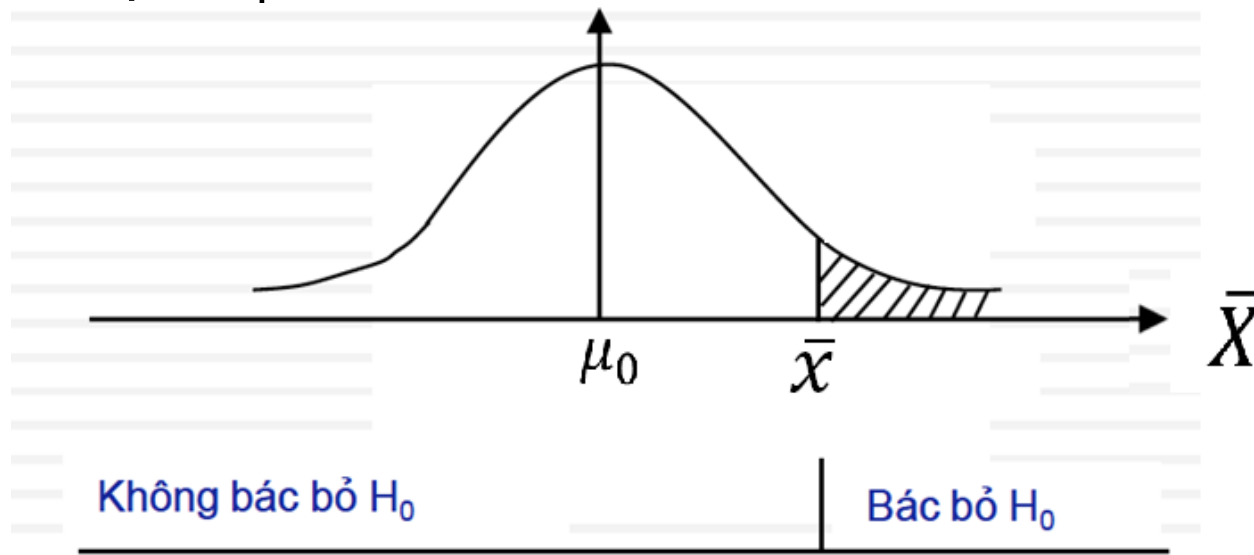
- a) Sử dụng phương pháp P-giá trị, hãy kết luận xem cơ quan giám định có bác bỏ được lời quảng cáo của nhà máy nói trên không? Mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
- b) Cũng với câu hỏi trên nhưng với mức ý nghĩa được chọn là $\alpha = 0.02$.

Kiểm định giả thuyết “thay đổi lớn hơn”

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

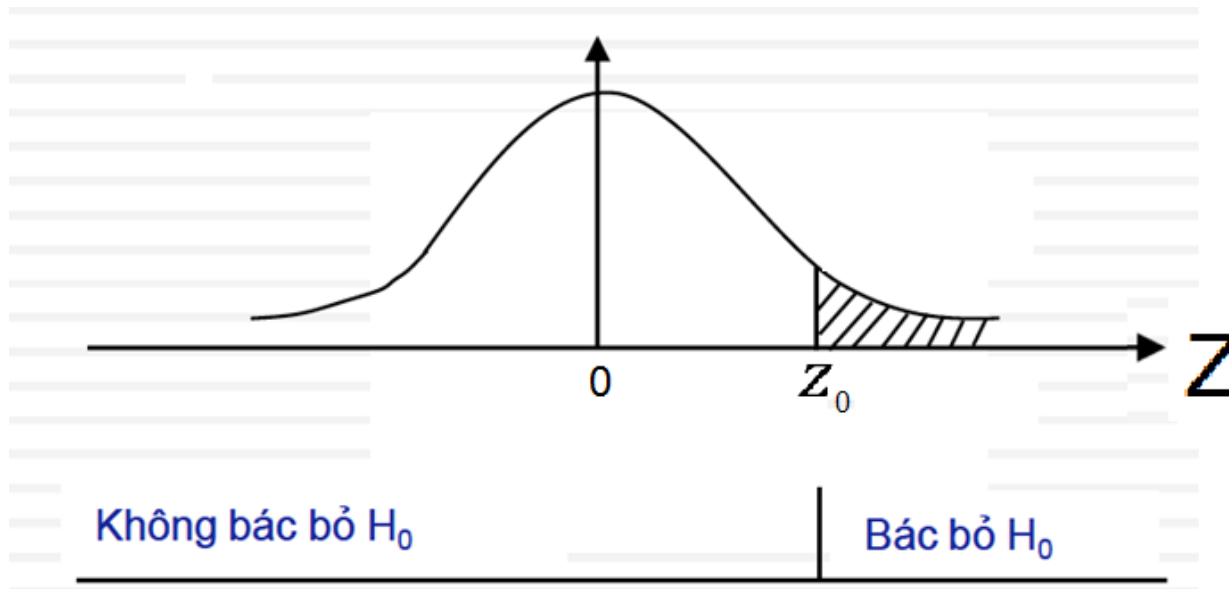
$$H_a: \mu > \mu_0$$

- P-value là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà vẫn có thể bác bỏ được H_0 .
- Kiểm định 1 phía



$$P - value = P(\bar{X} \geq \bar{x})$$

Kiểm định giả thuyết “thay đổi lớn hơn”



Tính giá trị:
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$P - value = P(Z > z_0)$$

Bài tập 4

- a. Một người nông dân sử dụng 1 loại phân bón mới cho 1 vườn táo và thu được 880kg trên một 30 cây. Biết rằng mức trung bình khi chưa sử dụng loại phân bón mới này là 26kg/1 cây với độ lệch chuẩn là 9 kg. Hãy tính p-value của giả thuyết sản lượng của cây táo tăng lên bởi loại phân bón này.

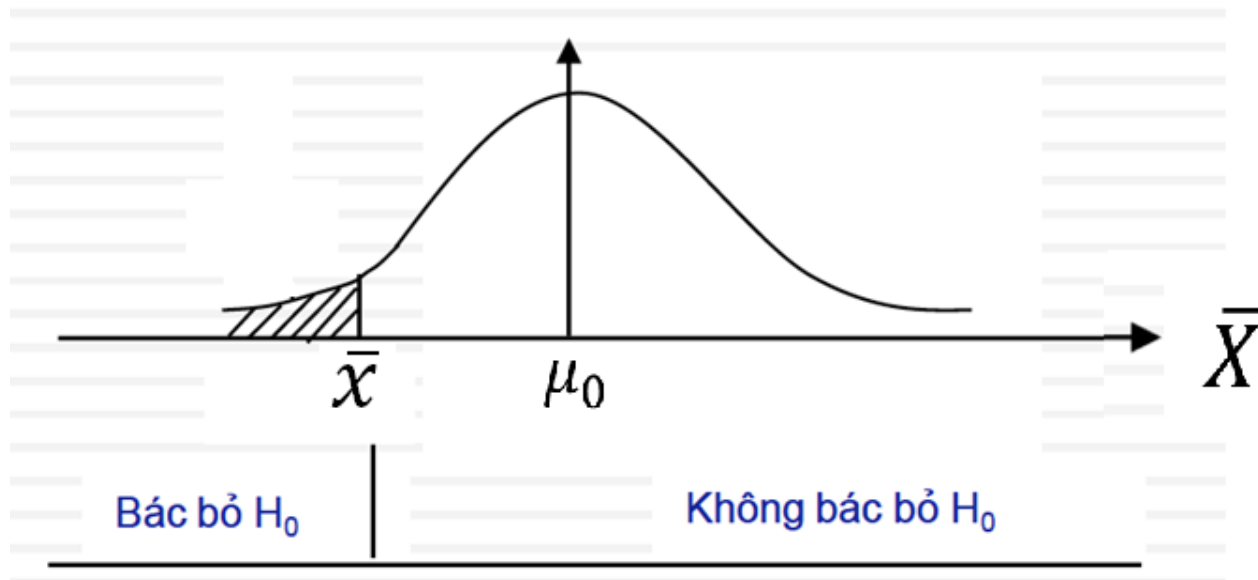
- b. Sau khi thay đổi giám đốc mới, nhà máy sản xuất thép ghi nhận sản lượng trong 50 ngày, có trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu lần lượt là 200 tấn và 40 tấn. Hãy tính p-value của giả thuyết rằng sản lượng bình quân hàng ngày của nhà máy hiện tăng hơn so với mức sản lượng trung bình 180 tấn/ngày đã được ghi nhận cách đây 1 năm.

Kiểm định giả thuyết “thay đổi nhỏ hơn”

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

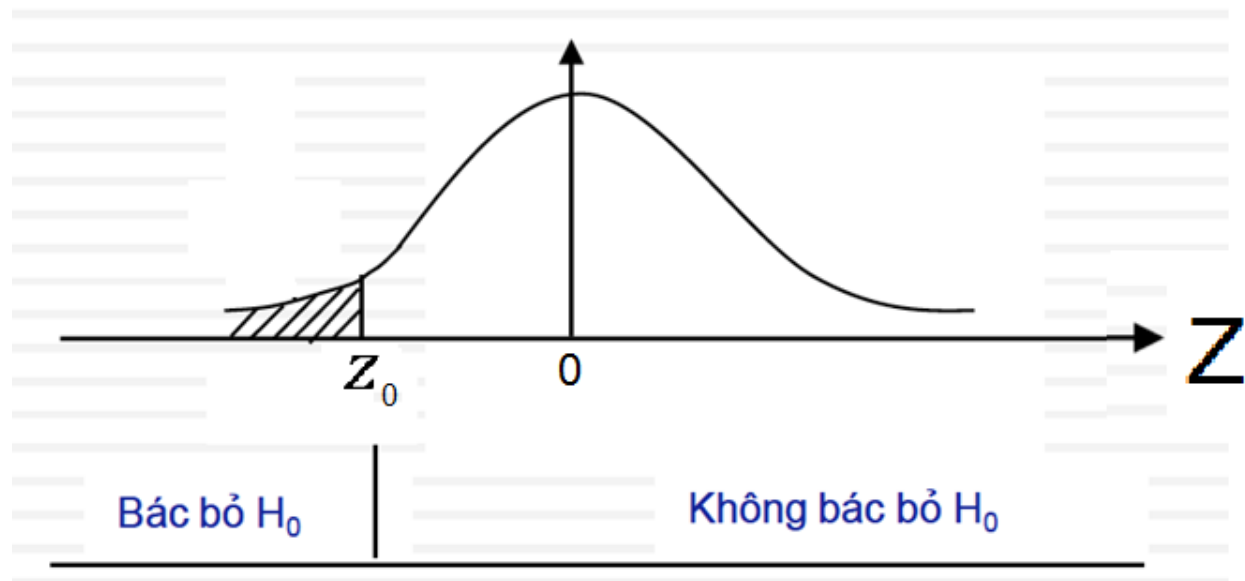
$$H_a: \mu < \mu_0$$

- P-value là mức ý nghĩa nhỏ nhất mà vẫn có thể bác bỏ được H_0 .
- Kiểm định 1 phía



$$P - value = P(\bar{X} \leq \bar{x})$$

Kiểm định giả thuyết “thay đổi nhỏ hơn”



Tính giá trị: $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$P - value = P(Z < z_0)$

Bài tập 5

- a. Một người nông dân sử dụng 1 loại phân bón mới cho 1 vườn táo và thu được 2356kg trên một 100 cây. Biết rằng mức trung bình khi chưa sử dụng loại phân bón mới này là 26kg/1 cây với độ lệch chuẩn là 8 kg. Tính p-value của giả thuyết sản lượng của cây táo bị giảm đi do loại phân bón này.

- b. Sau khi thay đổi giám đốc mới, nhà máy sản xuất thép ghi nhận sản lượng trong 30 ngày, có trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu lần lượt là 120 tấn và 15 tấn. Tính p-value của giả thuyết rằng sản lượng bình quân hàng ngày của nhà máy hiện tại giảm đi so với mức sản lượng trung bình 140 tấn/ngày đã được ghi nhận cách đây 1 năm.

Trường hợp cỡ mẫu nhỏ hoặc chưa biết phương sai tổng thể

Phương sai chưa biết

- Nếu tập mẫu có kích thước lớn ($n \geq 30$), phương sai của quần thể có thể được ước lượng bằng phương sai mẫu.
- Nếu tập mẫu nhỏ ($n < 30$)
 - Trung bình mẫu:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$$

- Phương sai mẫu:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

- $\bar{X}$ có phân bố Student với $(n-1)$ bậc tự do; kì vọng μ và phương sai $\sigma^2_{\bar{x}} = s^2/n$.

Bài tập 7

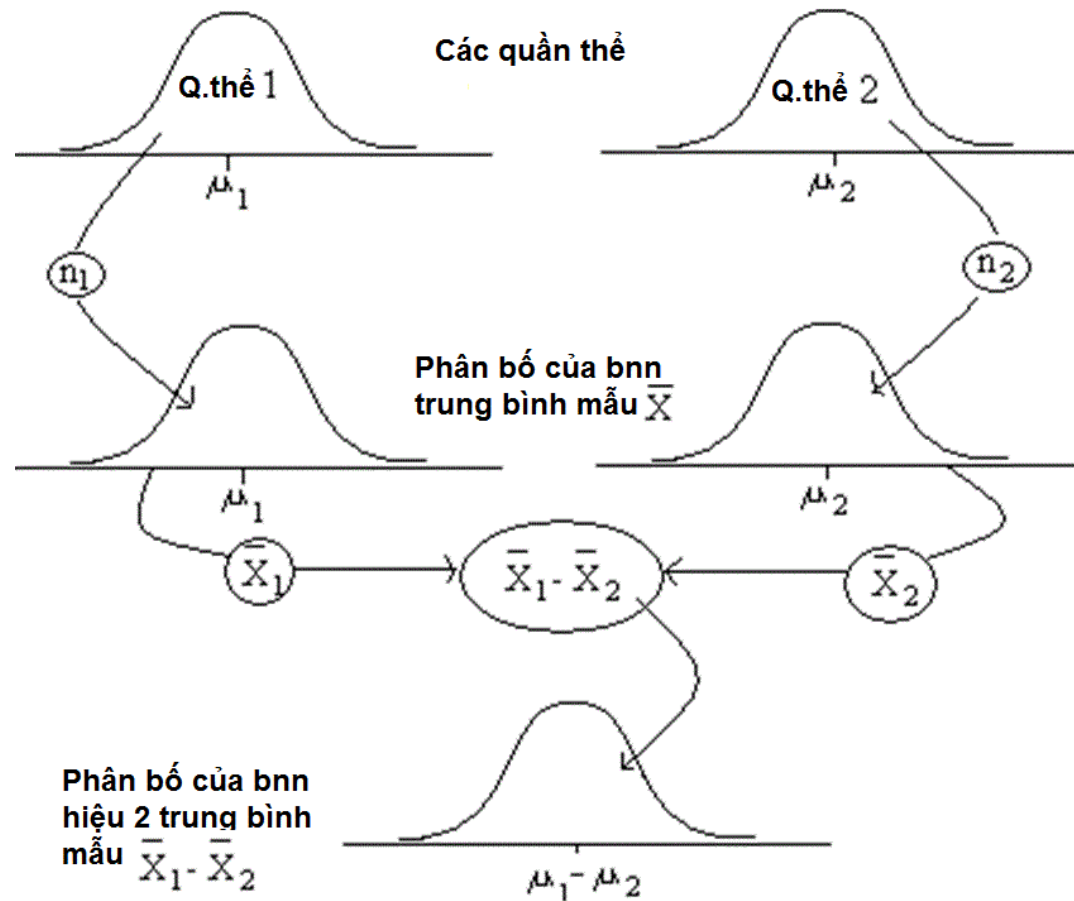
- a. Một nhóm nghiên cứu công bố rằng trung bình một người vào siêu thị A tiêu hết 140 ngàn đồng. Chọn một mẫu ngẫu nhiên gồm 50 người mua hàng, ta tính được số tiền trung bình họ tiêu là 154 nghìn với độ lệch tiêu chuẩn là 62 nghìn. Sử dụng phương pháp p-giá trị hãy kiểm tra xem công bố của nhóm nghiên cứu có đúng hay không? Mức ý nghĩa 0.02.
- b. Một công ty có hệ thống máy tính có thể xử lý 1200 hóa đơn trong một giờ. Công ty mới nhập một hệ thống máy tính mới. Hệ thống này khi chạy kiểm tra trong 40 giờ cho thấy số hóa đơn được xử lý trung bình trong 1 giờ là 1260 với độ lệch tiêu chuẩn là 215. Sử dụng phương pháp p-giá trị hãy nhận định xem hệ thống mới có tốt hơn hệ thống cũ hay không? Mức ý nghĩa 0.05.

Kiểm định giả thuyết với 2 tập mẫu

So sánh sự khác biệt giữa hai quần thể.

- So sánh hai giá trị trung bình
 - Kiểm định xem có sự khác biệt về điểm thi môn xác suất thống kê giữa sinh viên nữ và sinh viên nam?
 - Kiểm định xem có sự khác biệt về tuổi thọ trung bình của 2 loại pin do công ty A và công ty B sản xuất?
- So sánh hai tỉ lệ
 - Kiểm định xem có sự khác biệt về tỉ lệ cử tri nam và tỉ lệ cử tri nữ bầu cho ứng viên A hay không?
 - Kiểm định xem công thức mới đưa vào có làm tăng tỉ lệ người yêu thích Coca-Cola hay không?

So sánh hai giá trị trung bình



So sánh hai giá trị trung bình

Biến ngẫu nhiên về khác biệt giữa mẫu 1 và mẫu 2 sẽ có phân bố chuẩn với

□ Kỳ vọng: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2}$

□ Phương sai: $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}$$

- n_1 , và n_2 là kích thước của mẫu từ quần thể 1 và quần thể 2
- σ_1 và σ_2 là độ lệch chuẩn của quần thể 1 và quần thể 2.
- Lưu ý: σ_1 và σ_2 có thể được ước lượng từ độ lệch chuẩn của mẫu lấy từ quần thể 1 và quần thể 2 nếu kích thước mẫu ≥ 30 .

Kiểm định giả thuyết trung bình của hai quần thể khác nhau

- Kiểm định giả thuyết trung bình của quần thể 1 và quần thể 2 khác nhau:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

- Tính giá trị kiểm định z:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

Kiểm định giả thuyết trung bình của hai quần thể khác nhau

Kiểm định giả thuyết có sự khác biệt giữa điểm của các bạn nam và các bạn nữ.

Quần thể	Điểm	Độ lệch chuẩn	Kích thước mẫu
Nam	6.5	0.5	50
Nữ	6.0	0.7	30

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

Kiểm định giả thuyết trung bình của hai quần thể

Kiểm định giả thuyết lương công ty A hơn lương công ty B

Quần thể	Lương	Độ lệch chuẩn	Kích thước mẫu
Công ty A	12t	1.5	100
Công ty B	10.5t	1.2	64

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}$$

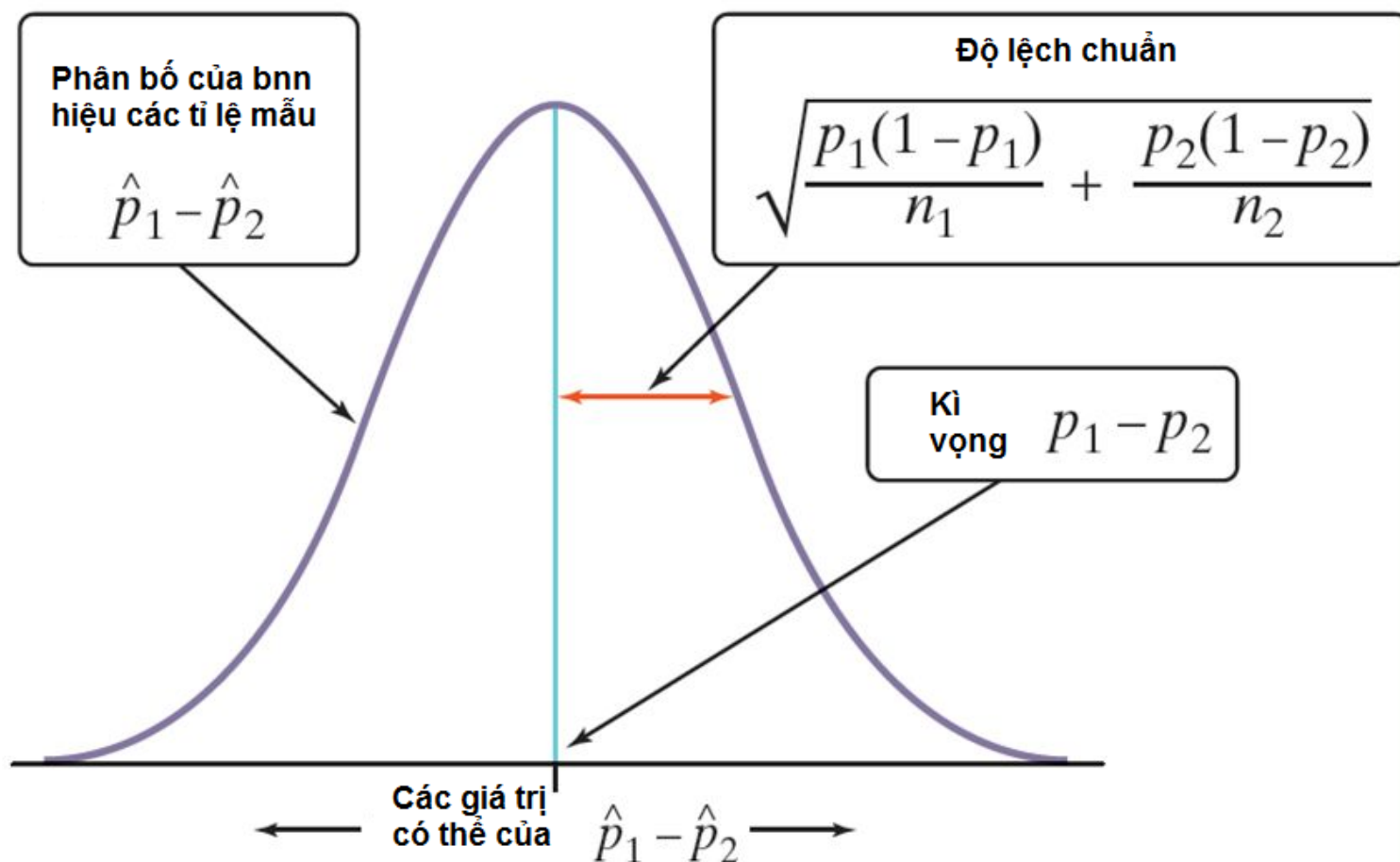
$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

So sánh hai tỉ lệ

$\hat{p}_1$: tỉ lệ mẫu từ quần thể 1

$\hat{p}_2$: tỉ lệ mẫu từ quần thể 2



Kiểm định giả thuyết tỉ lệ của hai quần thể khác nhau

- Kiểm định giả thuyết trung bình của quần thể 1 và quần thể 2 khác nhau:

$$H_0: p_1 = p_2$$

$$H_a: p_1 \neq p_2$$

- Tính giá trị kiểm định z:

$$Z = \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) - (p_1 - p_2)_{H_0}}{\sigma(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)} = \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)}{\sqrt{\widehat{p}(1 - \widehat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- $\widehat{p}$ ước lượng từ 2 tập mẫu

Bài tập

Công ty Coca-Cola đang nghiên cứu cải tiến công thức. Công thức cũ khi cho 500 người dùng thử có 130 người thích. Công thức mới khi cho 1000 người dùng thử có 300 người thích. Hãy kiểm định xem công thức mới có làm tăng tỉ lệ người ưa thích Coca-Cola hay không? Mức ý nghĩa là 1%.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2) - (p_1 - p_2)_{H_0}}{\sigma_{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)}} \\ &= \frac{(\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2)}{\sqrt{\widehat{p}(1 - \widehat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \end{aligned}$$