

CHƯƠNG I

Giới Thiệu về Tín Hiệu và Hệ Thống

Bài 1: Tín hiệu

Lê Vũ Hà

Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN

2014

- Đại lượng vật lý *mang thông tin* về một hiện tượng vật lý.
- Hàm của một hay nhiều biến
 - Tín hiệu âm thanh: hàm của thời gian (tín hiệu một chiều).
 - Ảnh động (hình chiếu của một khung cảnh động lên một mặt phẳng ảnh): hàm của ba biến x, y, t .

Tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc

- Tín hiệu theo thời gian liên tục:
 - Được biểu diễn dưới dạng hàm của biến thời gian liên tục.
- Tín hiệu theo thời gian rời rạc:
 - Giá trị chỉ xác định tại những thời điểm rời rạc.
 - Có thể được tạo ra bằng cách *lấy mẫu* tín hiệu liên tục tại những thời điểm rời rạc, thường là với một tốc độ đều đặn.

Tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc theo giá trị

- Tín hiệu liên tục theo giá trị: có thể nhận bất cứ giá trị nào trong một khoảng liên tục (hữu hạn hay vô hạn).
- Tín hiệu rời rạc theo giá trị: chỉ nhận được các giá trị từ một tập giá trị rời rạc (hữu hạn hay vô hạn).

Tín hiệu tương tự và tín hiệu số

- Tín hiệu tương tự: liên tục cả theo thời gian và theo giá trị.
- Tín hiệu số: rời rạc theo thời gian và chỉ nhận các giá trị từ một tập giá trị hữu hạn → giá trị của tín hiệu số đã được *lượng tử hóa*.

- Tín hiệu tuần hoàn: tự lặp lại sau một khoảng thời gian nhất định, nghĩa là,
 $\exists T > 0 : f(t + T) = f(t)$.
 - *Chu kỳ cơ sở* của một tín hiệu tuần hoàn: giá trị nhỏ nhất của T thỏa mãn điều kiện trên.
- Tín hiệu không tuần hoàn: không tồn tại giá trị nào của T thỏa mãn điều kiện trên.

- Tín hiệu nhân quả: $\forall t < 0 : f(t) = 0$.
- Tín hiệu phản nhân quả: $\forall t > 0 : f(t) = 0$.
- Tín hiệu phi nhân quả: có các giá trị khác không trong cả miền âm và miền dương của trục thời gian.

- Tín hiệu chẵn: $f(t) = f(-t)$.
- Tín hiệu lẻ: $f(t) = -f(-t)$.
- Một tín hiệu bất kỳ có thể biểu diễn bằng tổng của một tín hiệu chẵn và một tín hiệu lẻ:

$$f(t) = f_{\text{even}}(t) + f_{\text{odd}}(t)$$

ở đó:

$$f_{\text{even}}(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$

$$f_{\text{odd}}(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

- Tín hiệu xác định: giá trị tại bất cứ thời điểm nào đều xác định được chính xác bởi một công thức toán học hay một bảng tra cứu.
- Tín hiệu ngẫu nhiên: chứa những yếu tố không thể xác định trước thời điểm giá trị của tín hiệu thực sự xuất hiện → không thể xác định chính xác giá trị của tín hiệu tại các thời điểm trong tương lai.

- Tín hiệu đa kênh: được biểu diễn dưới dạng vector với các thành phần là các tín hiệu đơn kênh

$$\mathbf{F}(t) = [f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_N(t)]$$

- Tín hiệu đa chiều: hàm của nhiều biến độc lập

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

- Tín hiệu thuận chiều:

$$\forall t < t_0 < \infty : f(t) = 0$$

- Tín hiệu ngược chiều:

$$\forall t > t_0 > -\infty : f(t) = 0$$

- Tín hiệu có độ dài hữu hạn: miền xác định hữu hạn, nghĩa là, $\exists -\infty < t_1 < t_2 < \infty : f(t) = 0$ nếu $t \notin [t_1, t_2]$.
- Tín hiệu có độ dài vô hạn: miền xác định vô hạn.

- Năng lượng của một tín hiệu liên tục theo thời gian $f(t)$ được định nghĩa như sau:

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

- Năng lượng của một tín hiệu rời rạc theo thời gian $f(t)$ được định nghĩa như sau:

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2$$

- Tín hiệu có năng lượng hữu hạn được gọi là tín hiệu năng lượng.
- Tín hiệu tuần hoàn không phải tín hiệu năng lượng: năng lượng của tín hiệu tuần hoàn luôn vô hạn.
- Tín hiệu xác định có độ dài hữu hạn là tín hiệu năng lượng.

- Công suất của tín hiệu được định nghĩa là năng lượng trung bình của tín hiệu theo thời gian.
- Với tín hiệu liên tục theo thời gian $f(t)$, công suất được xác định như sau:

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

- Với tín hiệu rời rạc theo thời gian $f(n)$, công suất được xác định như sau:

$$P_f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N |f(n)|^2$$

- Công suất của tín hiệu tuần hoàn liên tục theo thời gian $f(t)$ với chu kỳ T bằng năng lượng trung bình trong một chu kỳ:

$$P_f = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

- Công suất của tín hiệu tuần hoàn rời rạc theo thời gian $f(n)$ với chu kỳ N bằng năng lượng trung bình trong một chu kỳ:

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |f(n)|^2$$

- Tín hiệu có công suất khác không và hữu hạn được gọi là tín hiệu công suất.
- Tín hiệu năng lượng không thể là tín hiệu công suất: công suất của tín hiệu năng lượng luôn bằng không.
- Tín hiệu công suất không thể là tín hiệu năng lượng: năng lượng của tín hiệu công suất luôn vô hạn (ví dụ: tín hiệu tuần hoàn).

- Trễ: dịch tín hiệu theo hướng thuận với trục thời gian, nghĩa là, $f(t) \rightarrow f(t - T)$ ($T > 0$).
- Tiến: dịch tín hiệu theo hướng ngược với trục thời gian, nghĩa là, $f(t) \rightarrow f(t + T)$ ($T > 0$).

- Nhân biến thời gian với một giá trị sẽ làm thay đổi *bề rộng* của tín hiệu.
- Co tín hiệu: $f(t) \rightarrow f(at)$ ($a > 1$).
- Giãn tín hiệu: $f(t) \rightarrow f(at)$ ($0 < a < 1$).

- Phép lật tín hiệu thu được bằng cách thay biến thời gian t bằng $-t$, nghĩa là, $f(t) \rightarrow f(-t)$.
- Ảnh lật của một tín hiệu chẵn vẫn là chính tín hiệu đó.
- Ảnh lật của một tín hiệu lẻ là âm bản chính tín hiệu đó.

- Tín hiệu xung đơn vị liên tục theo thời gian, ký hiệu $\delta(t)$, được định nghĩa bởi hàm Dirac:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \neq 0 & (t = 0) \end{cases} \quad \text{và} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Tín hiệu xung đơn vị rời rạc theo thời gian, ký hiệu $\delta(n)$, được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

- Tín hiệu nhảy bậc đơn vị liên tục theo thời gian, ký hiệu $u(t)$, được định nghĩa như sau:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

- Tín hiệu nhảy bậc đơn vị rời rạc theo thời gian, ký hiệu $u(n)$, được định nghĩa như sau:

$$u(n) = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ 1 & (n \geq 0) \end{cases}$$

- Tín hiệu dốc liên tục theo thời gian được định nghĩa như sau:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases}$$

hay $r(t) = tu(t)$.

- Tín hiệu dốc rời rạc theo thời gian được định nghĩa như sau:

$$r(n) = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ n & (n \geq 0) \end{cases}$$

hay $r(n) = nu(n)$.

- Tín hiệu dạng sin thực liên tục theo thời gian có thể biểu diễn được dưới dạng sau:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

trong đó, A là biên độ, ω là tần số góc (rad/s), và ϕ là pha (rad) của tín hiệu. Chu kỳ của tín hiệu tuần hoàn này là $T = 2\pi/\omega$.

- Tín hiệu nói trên còn có thể biểu diễn được dưới dạng hàm của biến tần số $f = 1/T$ (Hz):

$$s(t) = A \cos(2\pi ft + \phi)$$

- Tín hiệu dạng sin thực rời rạc theo thời gian có thể biểu diễn được dưới dạng sau:

$$s(n) = A \cos(\Omega n + \phi)$$

trong đó, Ω là tần số góc (rad/chu kỳ lấy mẫu).

- Tín hiệu rời rạc theo thời gian này có thể tuần hoàn hay không tuần hoàn. Để tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ N , điều kiện sau cần được thỏa mãn: $\Omega N = 2\pi m$ với m là một giá trị nguyên nào đó.

- Tín hiệu hàm mũ thực liên tục theo thời gian có thể biểu diễn được dưới dạng sau:

$$f(t) = Ae^{\alpha t}$$

trong đó, A và α là các giá trị thực.

Nếu $\alpha > 0$, $f(t)$ là một hàm mũ tăng; nếu $\alpha < 0$, $f(t)$ là một hàm mũ suy biến.

- Tín hiệu hàm mũ phức liên tục theo thời gian có thể biểu diễn được dưới dạng sau:

$$f(t) = Ae^{(\sigma+j\omega)t}$$

- Quan hệ giữa tín hiệu dạng sin và tín hiệu hàm mũ phức: sử dụng công thức Euler cho $e^{j\omega t}$, ta thu được dạng biểu diễn sau đây cho tín hiệu hàm mũ phức:

$$f(t) = Ae^{\sigma t}[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

- $f(t)$ là một hàm phức với phần thực và phần ảo được tính như sau (nếu A thực):

$$\operatorname{Re}[f(t)] = Ae^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

$$\operatorname{Im}[f(t)] = Ae^{\sigma t} \sin(\omega t)$$

- $f(t)$ còn được gọi là tín hiệu *dạng sin phức* với *biên độ phức* $Ae^{\sigma t}$ và tần số góc ω .
- Biên độ thực của $f(t)$ là $|A|e^{\sigma t}$ và góc pha là ϕ , trong đó:

$$|A| = \sqrt{\operatorname{Re}(A)^2 + \operatorname{Im}(A)^2} \text{ and } \phi = \arctan \frac{\operatorname{Im}(A)}{\operatorname{Re}(A)}$$