CHƯƠNG II
Biểu Diễn Hệ Thống TTBB trong Miền Thời Gian
Bài 2: Biểu diễn hệ thống rời rạc theo thời gian

Lê Vũ Hà

Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN

2014

- Mô hình của một hệ thống rời rạc theo thời gian có thể thiết lập được bằng việc rời rạc hóa một mô hình của hệ thống liên tục theo thời gian tương ứng.
- Phiên bản rời rạc của phương trình vi phân được gọi là *phương trình sai phân*.
  - Ví dụ: một hệ thống liên tục theo thời gian được mô tả bằng phương trình vi phân

$$dy(t)/dt + ay(t) = bx(t)$$

Sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm $\frac{dy(nT)}{dt} \approx \frac{y(nT)-y(nT-T)}{T}$, chúng ta thu được phương trính sai phân sau đây cho hệ thống rời rạc với chu kỳ lấy mẫu T:

$$(1 + aT)y(n) - y(n-1) = bTx(n)$$

- Hệ thống TTBB rời rạc theo thời gian có thể biểu diễn được bằng phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.
- Dạng tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

  trong đó, $x(n)$ là tín hiệu vào và $y(n)$ là tín hiệu ra của hệ thống.
- Bằng việc giải phương trình sai phân nói trên, tín hiệu ra $y(n)$ được xác định khi biết tín hiệu vào $x(n)$.

- *Đáp ứng đầy đủ* của hệ thống TTBB có dạng như sau:

$$y(n) = y_0(n) + y_s(n)$$

$y_0(n)$: *đáp ứng với điều kiện đầu* hay *đáp ứng tự nhiên*, là một nghiệm của *phương trình thuần nhất*:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = 0 \qquad (1)$$

$y_s(n)$: *đáp ứng với tín hiệu vào* hay *đáp ứng bắt buộc*, bao gồm một thành phần là *nghiệm thuần nhất* và một thành phần là *nghiệm riêng* của phương trình với tín hiệu vào $x(n)$.

- $y_0(n)$ là đáp ứng của hệ thống với các điều kiện ở thời điểm khởi đầu ($n = 0$), không tính tới tín hiệu vào $x(n)$.
- Phương trình (1) có một nghiệm dưới dạng z^n ở đó z là một biến phức, thay vào $y(n)$ trong phương trình chúng ta thu được:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i z^{N-i} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình (2) được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ thống.

- Gọi các nghiệm của phương trình (2) là $\{z_k | k = 1..N\}$, nghiệm tổng quát của phương trình (1) có dạng sau đây nếu tất cả $\{z_k\}$ đều là nghiệm đơn:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k z_k^n$$

- Trong trường hợp phương trình (2) có nghiệm bội, dạng tổng quát của nghiệm thuần nhất sẽ là:

$$\sum_{k}\left(c_k z_k^n \sum_{i=0}^{p_k-1} n^i\right)$$

trong đó mỗi z_k là nghiệm bội bậc p_k của phương trình đặc trưng.

- Các hệ số của nghiệm thuần nhất tương ứng với đáp ứng với điều kiện khởi đầu $y_0(n)$ được xác định từ các điều kiện đầu.

- $y_s(n)$ là đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t)$ khi tất cả các điều kiện đầu đều bằng không.
- $y_s(n)$ có hai thành phần: một thành phần là nghiệm thuần nhất và một thành phần là nghiệm riêng của phương trình sai phân với tín hiệu vào $x(n)$.
  - Thành phần nghiệm thuần nhất của $y_s(n)$ có dạng của nghiệm thuần nhất tổng quát đã xác định ở trên, với các hệ số chưa biết và sẽ được xác định sau.
  - Thành phần nghiệm riêng của $y_s(n)$ thường có dạng tương tự với dạng của tín hiệu vào $x(n)$, với các hệ số chưa biết và sẽ được xác định sau.

- Chú ý khi dự đoán dạng của $y_s(n)$: thành phần nghiệm riêng phải độc lập với tất cả các số hạng của thành phần nghiệm thuần nhất.
  Ví dụ, nếu $x(n) = \alpha^n$, chúng ta cần xem xét các trường hợp sau:
  - Nếu α^n không phải là một phần của nghiệm thuần nhất, thành phần nghiệm riêng khi đó có dạng $c\alpha^n$.
  - Nếu α là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2) $\rightarrow$ α^n là một phần của nghiệm thuần nhất $\rightarrow$ thành phần nghiệm riêng có dạng $cn\alpha^n$.
  - Nếu α là một nghiệm bội bậc p của phương trình đặc trưng (2) $\rightarrow$ α^n, $n\alpha^n$,...,$n^{p-1}\alpha^n$ đều là các phần của nghiệm thuần nhất $\rightarrow$ thành phần nghiệm riêng có dạng of $cn^p\alpha^n$.

- Tích chập của hai tín hiệu rời rạc theo thời gian $f(n)$ và $g(n)$, ký hiệu $f(n) * g(n)$, được định nghĩa như sau:

$$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$$

- Hoán vị:

$$f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$$

- Kết hợp:

$$[f(n) * g(n)] * h(n) = f(n) * [g(n) * h(n)]$$

- Phân phối:

$$[f(n) + g(n)] * h(n) = f(n) * h(n) + g(n) * h(n)$$

- Dịch thời gian: nếu $x(n) = f(n) * g(n)$, thì

$$x(n - n_0) = f(n - n_0) * g(n) = f(n) * g(n - n_0)$$

- Tích chập của một tín hiệu với tín hiệu xung đơn vị:

$$f(n) * \delta(n) = f(n)$$

- Tính nhân quả: nếu $f(n)$ và $g(n)$ đều là các tín hiệu nhân quả thì $f(n) * g(n)$ cũng nhân quả.

- Xem xét một hệ thống TTBB $y(n) = \mathbf{T}[x(n)]$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{T}[x(n) * \delta(n)] = \mathbf{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathbf{T}[\delta(n-k)] = x(n) * h(n) \end{aligned}$$

trong đó, $h(n) = \mathbf{T}[\delta(n)]$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống được biểu diễn bởi hàm biến đổi **T**.

- Hệ thống không có bộ nhớ: đáp ứng xung chỉ khác không tại $n = 0$.
- Hệ thống nhân quả: đáp ứng xung là tín hiệu nhân quả.
- Hệ thống ổn định: khi và chỉ khi điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

- Gọi $\{u_1(n), u_2(n) \dots\}$ là các tín hiệu vào, $\{y_1(n), y_2(n) \dots\}$ là các tín hiệu ra, và $\{q_1(n), q_2(n) \dots\}$ là các biến trạng thái của một hệ thống TTBB rời rạc theo thời gian.
- Các phương trình trạng thái của hệ thống có dạng như sau:

$$q_i(n+1) = \sum_j a_{ij} q_j(n) + \sum_k b_{ik} u_k(n) \ (i = 1, 2, \dots)$$

- Tín hiệu ra được tính từ các biến trạng thái và các tín hiệu vào như sau:

$$y_i(n) = \sum_j c_{ij} q_j(n) + \sum_k d_{ik} u_k(n) \ (i = 1, 2, \dots)$$

- Mô hinh biến trạng thái của hệ thống TTBB rời rạc theo thời gian thường được biểu diễn dưới dạng phương trình ma trận như sau:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(n+1) &= \mathbf{Aq}(n) + \mathbf{Bu}(n)\\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{Cq}(n) + \mathbf{Du}(n)\end{aligned}$$

trong đó, $\mathbf{u}(n)$, $\mathbf{y}(n)$ và $\mathbf{q}(n)$ là các vector cột với các thành phần lần lượt là các tín hiệu vào, các tín hiệu ra, và các biến trạng thái của hệ thống; **A**, **B**, **C** và **D** là các ma trận hệ số.

- Mô hình trạng thái của hệ thống rời rạc theo thời gian có thể thiết lập được từ mô hình trạng thái của hệ thống liên tục theo thời gian tương ứng:
  - Cho mô hình trạng thái của hệ thống liên tục theo thời gian như sau:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

  - Rời rạc hóa các phương trình trên với chu kỳ lấy mẫu T và xấp xỉ đạo hàm $\frac{d\mathbf{q}(nT)}{dt} \approx \frac{\mathbf{q}(nT+T)-\mathbf{q}(nT)}{T}$, chúng ta thu được mô hình cho hệ thống rời rạc theo thời gian:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(n+1) &= (T\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{q}(n) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(n)\\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\mathbf{q}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n)\end{aligned}$$

- Các phương trình trạng thái cũng có thể được thiết lập từ các phương trình sai phân của hệ thống TTBB rời rạc theo thời gian dưới đây:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

- Ký hiệu $u_j(n) = x(n-j)$ $(j = 0..M)$ là các tín hiệu vào của hệ thống và viết lại các phương trình trên dưới dạng sau đây:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j u_j(n)$$

- Chọn các biến trạng thái như sau:

$$\begin{aligned} q_1(n) &= y(n-N), q_2(n) = y(n-N+1), \ldots \\ q_N(n) &= y(n-1) \end{aligned}$$

- Chúng ta thu được các phương trình trạng thái sau đây:

$$\begin{aligned} q_1(n+1) &= q_2(n), q_2(n+1) = q_3(n), \ldots \\ q_{N-1}(n+1) &= q_N(n) \\ q_N(n+1) &= \frac{-1}{a_0}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i q_{N-i+1}(n) - \sum_{j=0}^{M} b_j u_j(n)\right] \end{aligned}$$