CHƯƠNG III
Biểu Diễn Tín Hiệu và Hệ Thống TTBB trong Miền Tần Số
Bài 1: Biểu diễn tín hiệu và hệ thống liên tục theo thời gian

Lê Vũ Hà

Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN

2014

- Tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ với chu kỳ T có thể biểu diễn được chính xác bởi chuỗi Fourier sau đây:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

  trong đó, $\omega_0 = 2\pi/T$ là tần số cơ sở của $x(t)$.
- Nói cách khác, mọi tín hiệu tuần hoàn đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin phức có tần số bằng một số nguyên lần tần số cơ sở của tín hiệu được biểu diễn.

- Để sai số giữa $x(t)$ và biểu diễn chuỗi Fourier của nó bằng không, $x(t)$ phải là tín hiệu công suất, nghĩa là:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Điều kiện để biểu diễn chuỗi Fourier của $x(t)$ hội tụ về $x(t)$ tại mọi điểm ở đó $x(t)$ liên tục (điều kiện Dirichlet):
  - $x(t)$ phải bị chặn.
  - Số lượng cực trị của $x(t)$ trong mỗi chu kỳ phải hữu hạn.
  - Số điểm không liên tục của $x(t)$ trong mỗi chu kỳ phải hữu hạn.

- Hai tín hiệu $f(t)$ và $g(t)$ tuần hoàn với cùng chu kỳ T được gọi là trực giao nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\int_0^T f(t)g^*(t)dt = 0$$

- Hai tín hiệu $e^{jk\omega_0 t}$ và $e^{jl\omega_0 t}$, với ω_0 là một tần số cơ sở, trực giao nếu $k \neq l$, nghĩa là:

$$\forall k \neq l \in Z : \int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt = 0$$

- Các hệ số của chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ được tính bằng cách khai thác tính trực giao của tập hợp hàm cơ sở dạng sin phức $\{e^{jk\omega_0 t}\}$ như sau:

$$\begin{aligned}
\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt &= \int_0^T \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{jl\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_0^T e^{jl\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt \\
&= c_k T \\
\rightarrow \quad c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt
\end{aligned}$$

- Đồ thị của c_k theo biến tần số $\omega_k = k\omega_0$ $(k \in Z)$ được gọi là *phổ Fourier* của tín hiệu $x(t)$.
- Đồ thị của $|c_k| = \sqrt{\text{Re}(c_k)^2 + \text{Im}(c_k)^2}$ được gọi là *phổ biên độ* của $x(t)$ trong miền tần số.
- Đồ thị của $\phi(c_k) = \arctan[\text{Im}(c_k)/\text{Re}(c_k)]$ được gọi là *phổ pha* của $x(t)$ trong miền tần số.
- *Chú ý*: các loại phổ của tín hiệu tuần hoàn đều là hàm rời rạc theo tần số.

- Tính tuyến tính:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \text{ and } z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\rightarrow \alpha x(t) + \beta z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha c_k + \beta d_k) e^{jk\omega_0 t}$$

- Dịch thời gian:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\rightarrow x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(c_k e^{-jk\omega_0 t_0}\right) e^{jk\omega_0 t}$$

- Đạo hàm:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jk\omega_0 c_k) e^{jk\omega_0 t}$$

- Tích phân:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t}$$

- Công thức Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Giá trị $|c_k|^2$ được coi như biểu diễn cho phần đóng góp của thành phần $e^{jk\omega_0 t}$ vào công suất tổng cộng của tín hiệu $x(t) \rightarrow$ đồ thị của $|c_k|^2$ theo biến tần số $\omega_k = k\omega_0$ biểu thị phân bố công suất của $x(t)$ theo tần số và được gọi là *phổ công suất* của $x(t)$.

- Tính đối xứng:
  - Phổ biên độ và phổ công suất của $x(t)$ là các hàm chẵn, nghĩa là:

$$\forall k : |c_k| = |c_{-k}| \text{ và } |c_k|^2 = |c_{-k}|^2$$

  - Nếu $x(t)$ là hàm thực thì $\forall k : c_k = c^*_{-k}$.
  - Nếu $x(t)$ là hàm thực và chẵn thì phổ Fourier của $x(t)$ là hàm chẵn, nghĩa là $\forall k : c_k = c_{-k}$.
  - Nếu $x(t)$ là hàm thực và lẻ thì phổ Fourier của $x(t)$ là hàm lẻ, nghĩa là $\forall k : c_k = -c_{-k}$.

- Với tín hiệu không tuần hoàn $x(t)$, bằng việc coi $x(t)$ là một tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ $T \rightarrow \infty$ (hay $\omega_0 \rightarrow 0$), chúng ta có thể biểu diễn $x(t)$ bằng chuỗi Fourier:

$$x(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} c_k &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{+\pi/\omega_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

- Vì $\omega_0 \to 0$, biến tần số $\omega = k\omega_0$ trở nên liên tục, chúng ta có thể viết lại các biểu thức trên dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \lim_{\omega_0 \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\omega)}{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

trong đó, $c(\omega)$ là một hàm liên tục theo tần số và được xác định như sau:

$$c(\omega) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{+\pi/\omega_0} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Cho $X(\omega) = 2\pi c(\omega)/\omega_0$, chúng ta thu được công thức biến đổi Fourier của tín hiệu $x(t)$ (biến đổi thuận):

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

và công thức biến đổi Fourier nghịch:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- Một dạng khác của công thức biến đổi Fourier của $x(t)$ sử dụng biến tần số f thay cho tần số góc ω:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

với công thức biến đổi Fourier nghịch tương ứng:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- Hàm $X(\omega)$ được gọi là *phổ Fourier* của tín hiệu $x(t)$.
- Đại lượng $|X(\omega)| = \sqrt{\text{Re}[X(\omega)]^2 + \text{Im}[X(\omega)]^2}$ được gọi là *phổ biên độ* của tín hiệu $x(t)$ trong miền tần số.
- Hàm $\phi(\omega) = \arctan[\text{Im}[X(\omega)]/\text{Re}[X(\omega)]]$ được gọi là *phổ pha* của tín hiệu $x(t)$ trong miền tần số.
- *Chú ý*: các loại phổ của tín hiệu không tuần hoàn đều là hàm liên tục theo tần số.

- Để các biến đổi Fourier thuận và nghịch của tín hiệu $x(t)$ tồn tại thì $x(t)$ phải là tín hiệu năng lượng, nghĩa là:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Điều kiện để một tín hiệu được khôi phục từ biến đổi Fourier của $x(t)$ hội tụ về chính $x(t)$ tại tất cả các điểm ở đó $x(t)$ liên tục (điều kiện Dirichlet):
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$.
  - Số cực trị của $x(t)$ phải hữu hạn.
  - Số điểm không liên tục của $x(t)$ phải hữu hạn.

- Tính tuyến tính:

$$\mathcal{F}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha X_1(\omega) + \beta X_2(\omega)$$

- Dịch thời gian:

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- Dịch tần số:

$$\mathcal{F}[x(t)e^{j\gamma t}] = X(\omega - \gamma)$$

- Co giãn trục thời gian:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Đạo hàm:

$$\mathcal{F}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j\omega X(\omega)$$

- Tích phân:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

- Tích chập:

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega)G(\omega)$$

- Điều chế:

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$$

- Công thức Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Đại lượng $|X(\omega)|^2$ biểu diễn cho đóng góp của thành phần $e^{j\omega t}$ vào năng lượng tổng cộng của tín hiệu $x(t) \rightarrow$ đồ thị của $|X(\omega)|^2$ theo tần số ω biểu thị mật độ năng lượng của $x(t)$ trong miền tần số và được gọi là *phổ năng lượng* của $x(t)$.

- Tính đối xứng:
  - Phổ biên độ và phổ năng lượng của $x(t)$ là các hàm chẵn, nghĩa là:

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \text{ và } |X(\omega)|^2 = |X(-\omega)|^2$$

  - Nếu $x(t)$ là hàm thực thì $X(\omega) = X^*(-\omega)$.
  - Nếu $x(t)$ là hàm thực và chẵn thì $X(\omega)$ là hàm chẵn, nghĩa là $X(\omega) = X(-\omega)$.
  - Nếu $x(t)$ là hàm thực và lẻ thì $X(\omega)$ là hàm lẻ, nghĩa là $X(\omega) = -X(-\omega)$.
- Tính đối ngẫu giữa miền thời gian và miền tần số: nếu $X(\omega)$ là biến đổi Fourier của $x(t)$ thì

$$\mathcal{F}[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$$

- Xem xét hệ thống TTBB có đáp ứng xung $h(t)$, đáp ứng của hệ thống này với tín hiệu vào $x(t) = e^{j\omega t}$ được tính như sau:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(\omega) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

trong đó, $H(\omega)$ được gọi là *đáp ứng tần số*:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Đáp ứng tần số $H(\omega)$ chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung $h(t) \rightarrow$ để $H(\omega)$ tồn tại $h(t)$ phải là tín hiệu năng lượng, nghĩa là, hệ thống có đáp ứng xung $h(t)$ phải là hệ thống ổn định.
- $H(\omega)$ đặc trưng cho đáp ứng của hệ thống đối với tín hiệu vào dạng sin có tần số ω.

- Tín hiệu ra cũng là một tín hiệu dạng sin có cùng tần số với tín hiệu vào.
- Thay đổi về biên độ và pha của tín hiệu ra so với tín hiệu vào được đặc trưng bởi hai thành phần sau đây của $H(\omega)$:

$$|H(\omega)| = \sqrt{\text{Re}[H(\omega)]^2 + \text{Im}[H(\omega)]^2}$$

được gọi là *đáp ứng biên độ*, và

$$\phi(\omega) = \arctan\frac{\text{Im}[H(\omega)]}{\text{Re}[H(\omega)]}$$

được gọi là *đáp ứng pha* của hệ thống.

- Khi đó, tín hiệu ra có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$y(t) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega t} = |H(\omega)|e^{j[\omega t+\phi(\omega)]}$$

điều đó có nghĩa là, tín hiệu ra có biên độ bằng $|H(\omega)|$ lần biên độ của tín hiệu vào và pha bị dịch một góc bằng $\phi(\omega)$ so với pha của tín hiệu vào.

- Xem xét hệ thống tuyến tính bất biến với đáp ứng tần số $H(\omega)$. Khi tín hiệu vào là một tín hiệu tuần hoàn có biểu diễn chuỗi Fourier là $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$, đáp ứng của hệ thống với mỗi thành phần $e^{jk\omega_0 t}$ là $H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ $\rightarrow$ đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t)$ có dạng:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

chính là biểu diễn chuỗi Fourier của $y(t)$ với các hệ số là $\{c_k H(k\omega_0)\}$.

- Khi tín hiệu vào là một tín hiệu không tuần hoàn $x(t)$ có phổ Fourier là $X(\omega)$, $x(t)$ khi đó có thể biểu diễn dưới dạng sau đây, theo công thức biến đổi Fourier nghịch:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- Đáp ứng của hệ thống với mỗi thành phần $e^{j\omega t}$ là $H(\omega)e^{j\omega t}$ $\rightarrow$ đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t)$ có dạng:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

với phổ Fourier của $y(t)$: $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$.

- *Độ dài hiệu dụng* của tín hiệu $x(t)$ được định nghĩa như sau:

$$T_d = \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}\right]^{1/2}$$

- *Bề rộng phổ* của tín hiệu $x(t)$ được định nghĩa như sau:

$$B_\omega = \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}\right]^{1/2}$$

- Nguyên lý bất định: $T_d B_\omega \geq 1/2$.

- *Tần số cộng hưởng* ω_r của một hệ thống với đáp ứng tần số $H(\omega)$ là tần số tại đó $|H(\omega)|$ đạt giá trị lớn nhất.
  - Để xác định ω_r, giải phương trình $d|H(\omega)|/d\omega = 0$.
  - Giá trị $|H(\omega_r)|$ được gọi là *mức đỉnh cộng hưởng* của hệ thống.
- *Băng thông* của hệ thống là dải tần số sao cho công suất của các thành phần tần số nằm trong dải đó không bị suy giảm quá 50% khi đi qua hệ thống (băng thông 3-dB).