CHƯƠNG III
Biểu Diễn Tín Hiệu và Hệ Thống TTBB trong Miền Tần Số
Bài 3: Biến đổi Fourier rời rạc

Lê Vũ Hà

Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN

2014

- Phổ Fourier $X(\Omega)$ của một tín hiệu rời rạc là hàm tuần hoàn có chu kỳ bằng $2\pi \rightarrow$ chúng ta chỉ cần lấy mẫu phổ trong một chu kỳ như sau:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

  trong đó, N là số lượng mẫu trong khoảng $[0, 2\pi] \rightarrow$ chu kỳ lấy mẫu là $2\pi/N$.
- Kể từ đây, chúng ta sử dụng $X(k)$ thay vì $X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$ để biểu diễn phổ Fourier rời rạc của $x(n)$.

- Biến đổi công thức trong trang trước như sau:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(n-lN) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-lN)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$

trong đó:

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(n-lN)$$

- $x_p(n)$ là một tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ bằng $N \rightarrow x_p(n)$ có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier sau đây:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Các hệ số $\{c_k | k = 0..N-1\}$ được tính như sau:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \rightarrow c_k = \frac{1}{N}X(k)$$

- Từ phổ Fourier rời rạc của tín hiệu $x(n)$, chúng ta khôi phục được tín hiệu tuần hoàn $x_p(n)$ như sau:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- Có thể khôi phục tín hiệu $x(n)$ từ $X(k)$ hay không?
  - Câu trả lời là "có thể": nếu độ dài của $x(n)$ không lớn hơn N và tất cả các giá trị khác không của nó đều nằm trong khoảng $[0, N-1]$, khi đó:

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Tín hiệu rời rạc tuần hoàn $x(n)$ có năng lượng bằng vô cùng $\rightarrow$ biến đổi Fourier (liên tục) của $x(n)$ không tồn tại.
- Định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc của $x(n)$ dựa trên biểu diễn chuỗi Fourier của một tín hiệu rời rạc tuần hoàn.

- Biến đổi Fourier rời rạc của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ bằng N được định nghĩa như sau:

$$DFT[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

  $X(k)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ đúng bằng N.

- Biến đổi nghịch của DFT (IDFT) được định nghĩa như sau:

$$x(n) = DFT^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$$

- Dịch thời gian:

$$DFT[x(n-n_0)] = X(k)e^{-j2\pi kn_0/N}$$

- Tích chập tuần hoàn của hai tín hiệu tuần hoàn có cùng chu kỳ bằng N:
  Định nghĩa:

$$x_1(n) *_N x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k)$$

Khi đó:

$$DFT[x_1(n) *_N x_2(n)] = X_1(k)X_2(k)$$

- Tương quan của hai tín hiệu tuần hoàn có cùng chu kỳ bằng *N*:
  Định nghĩa:

$$r_{x_1x_2}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(k-n)$$

Khi đó:

$$R_{x_1x_2}(k) = X_1^*(k)X_2(k) = X_1(k)X_2^*(k)$$

- Xem xét một tín hiệu rời rạc $x(n)$ có độ dài L hữu hạn, tín hiệu tuần hoàn $x_p(n)$ với chu kỳ $N \geq L$ được sinh ra từ tín hiệu $x(n)$ theo cách như sau:

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(n - lN)$$

- Biến đổi Fourier rời rạc độ dài N của tín hiệu $x(n)$ được định nghĩa là DFT của tín hiệu tuần hoàn $x_p(n)$:

$$DFT_N[x(n)] = DFT[x_p(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

- Dịch vòng:

$$DFT_N[x(n-n_0)_N] = DFT_N[x(n)]e^{-j2\pi kn_0/N}$$

- Tích chập vòng của hai tín hiệu độ dài hữu hạn:
Định nghĩa:

$$x_1(n) \circledast_N x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k)_N$$

Khi đó:

$$DFT_N[x_1(n) \circledast_N x_2(n)] = DFT_N[x_1(n)]DFT_N[x_2(n)]$$

- Xem xét một tín hiệu năng lượng liên tục $x(t) \rightarrow$ phổ của tín hiệu (có miền xác định) hữu hạn $\rightarrow$ tồn tại một tần số lớn nhất ω_a trong tín hiệu, nghĩa là, $\forall |\omega| > |\omega_a| : X(\omega) = 0$.
- Lấy mẫu $x(t)$ với tốc độ lấy mẫu bằng ω_s để thu được tín hiệu rời rạc $x(n)$. Nếu $\omega_s = 2\omega_a$, tín hiệu liên tục $x(t)$ có thể được khôi phục một cách chính xác từ tín hiệu rời rạc $x(n)$ bằng công thức sau đây:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{\sin(\omega_a t - n\pi)}{\omega_a t - n\pi}$$

- Một tín hiệu có phổ hữu hạn với các thành phần tần số có giá trị không vượt quá ω_a có thể được khôi phục một cách chính xác từ tín hiệu lấy mẫu của nó nếu tốc độ lấy mẫu thỏa mãn điều kiện $\omega_s \geq 2\omega_a$.
- Tốc độ lấy mẫu $\omega_a = 2\omega_a$ được gọi là *tốc độ Nyquist*.

- If $\omega_s = 2\omega_a$: $x(n)$ có phổ tuần hoàn với chu kỳ bằng 2π và dạng của phổ trong khoảng $[-\pi, +\pi]$ tương tự với dạng của phổ của tín hiệu $x(t)$ trong khoảng $[-\omega_a, +\omega_a]$
- Nếu $\omega_s > 2\omega_a$: $x(n)$ có phổ tuần hoàn với chu kỳ bằng 2π và dạng của phổ của tín hiệu $x(t)$ trong khoảng $[-\omega_a, +\omega_a]$ được bảo toàn bên trong khoảng $[-\pi, +\pi]$ trong phổ của tín hiệu $x(n)$.

- Nếu $\omega_s < 2\omega_a$: chồng phổ (aliasing) và gập phổ (folding) xuất hiện $\rightarrow$ $x(n)$ có phổ tuần hoàn với chu kỳ bằng 2π và dạng của phổ trong khoảng $[-\pi, +\pi]$ được tạo ra từ việc gập phổ của tín hiệu $x(t)$ trong khoảng $[-\omega_a, +\omega_a]$ quanh *tần số gập phổ* (còn gọi là *tần số Nyquist*, có giá trị bằng một nửa tốc độ lấy mẫu) $\rightarrow$ việc khôi phục chính xác tín hiệu $x(t)$ từ $x(n)$ là không thể vì phổ đã bị biến dạng.
  - Chồng phổ: các tần số khác nhau trong tín hiệu $x(t)$ xuất hiện ở cùng vị trí trong phổ của tín hiệu $x(n)$.
  - Gập phổ: hiện tượng chồng phổ gây ra bởi các tần số bị gập vào vị trí của các tần số khác trong phổ của tín hiệu $x(n)$.