CHƯƠNG IV
Biến Đổi Laplace và Áp dụng cho Biểu Diễn và Phân Tích Hệ Thống Liên Tục

Lê Vũ Hà

Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN

2014

- Biến đổi Laplace của một tín hiệu liên tục $x(t)$ được định nghĩa như sau:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

trong đó, s là một biến phức: $s = \sigma + j\omega$.

- Biến đổi Laplace nghịch:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

- Miền hội tụ (ROC) của biến đổi Laplace là một vùng trong mặt phẳng s sao cho với bất kỳ giá trị nào của s thuộc vùng này biến đổi Laplace luôn hội tụ.
  Example:
  - Miền hội tụ của biến đổi Laplace của tín hiệu $u(t)$ là nửa bên phải của mặt phẳng s.
  - Miền hội tụ của biến đổi Laplace của tín hiệu $-u(-t)$ là nửa bên trái của mặt phẳng s.
- Hai tín hiệu khác nhau có thể có cùng biểu diễn qua biến đổi Laplace, nhưng miền hội tụ của hai biến đổi Laplace khi đó phải khác nhau.

- Miền hội tụ của biến đổi Laplace chỉ phụ thuộc vào phần thực của s.
- Miền hội tụ của biến đổi Laplace không được chứa các trị cực của biến đổi.
- Nếu một tín hiệu có độ dài hữu hạn và tồn tại ít nhất một giá trị của s để biến đổi Laplace hội tụ, thì miền hội tụ của biến đổi Laplace sẽ là toàn bộ mặt phẳng s.

- Nếu một tín hiệu thuận chiều có miền hội tụ của biến đổi Laplace chứa đường $\sigma = \sigma_0$, thì miền hội tụ đó sẽ chứa toàn bộ phần bên phải của đường σ_0 trong mặt phẳng *s*.
- Nếu một tín hiệu ngược chiều có miền hội tụ của biến đổi Laplace chứa đường $\sigma = \sigma_0$, thì miền hội tụ đó sẽ chứa toàn bộ phần bên trái của đường σ_0 trong mặt phẳng *s*.

- Tuyến tính:

$$\mathcal{L}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha\mathcal{L}[x_1(t)] + \beta\mathcal{L}[x_2(t)]$$

  với ROC chứa $ROC[X_1(s)] \bigcap ROC[X_2(s)]$.

- Dịch thời gian:

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)] = e^{-st_0}X(s)$$

  với ROC là $ROC[X(s)]$.

- Dịch trong mặt phẳng s:

$$\mathcal{L}[e^{s_0 t}x(t)] = X(s - s_0)$$

  với ROC là $ROC[X(s)]$ bị dịch đi s_0.

- Co giãn thời gian:

$$\mathcal{L}[x(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

  với ROC là $ROC[X(s)]$ nhân với hệ số α.
- Đạo hàm:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s)$$

  với ROC chứa $ROC[X(s)]$.

- Tích phân:

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s)$$

với ROC chứa $ROC[X(s)] \bigcap \{\sigma > 0\}$.

- Tích chập:

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s)X_2(s)$$

với ROC chứa $ROC[X_1(s)] \bigcap ROC[X_2(s)]$.

- Định lý giá trị đầu: nếu $x(t)$ là một tín hiệu nhân quả và liên tục tại $t = 0$, thì:

$$x(0) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

- Định lý giá trị cuối: nếu $x(t)$ là một tín hiệu nhân quả và liên tục tại $t = 0$, thì:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Phương pháp khai triển phân thức tối giản (1)

- Không mất tổng quát, giả thiết rằng $X(s)$ được biểu diễn dưới dạng một phân thức hữu tỉ $N(s)/D(s)$ ($N(s)$ và $D(s)$ là các đa thức và bậc của $N(s)$ nhỏ hơn bậc của $D(s)$).
- Gọi $\{s_{p_k}\}$ là các trị cực của $X(s)$: $\{s_{p_k}\}$ là các nghiệm của phương trình $D(s) = 0$.

Phương pháp khai triển phân thức tối giản (2)

- Nếu tất cả $\{s_{p_k}\}$ đều là trị cực đơn, $X(s)$ sẽ được khai triển như sau:

$$X(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_{p_k}}$$

trong đó, các hệ số $\{A_k\}$ được tính bởi công thức:

$$A_k = (s - s_{p_k})X(s)|_{s=s_{p_k}}$$

Phương pháp khai triển phân thức tối giản (3)

- Trong trường hợp $X(s)$ có các trị cực bội, gọi m_k là giá trị bội của trị cực s_{p_k}, chúng ta có khai triển sau đây cho $X(s)$:

$$X(s) = \sum_k \sum_{m=1}^{m_k} \frac{A_{k_m}}{(s - s_{p_k})^m}$$

trong đó, các hệ số $\{A_{k_m}\}$ được tính như sau:

$$A_{k_m} = \frac{1}{(m_k - m)!} \frac{d^{m_k - m}(s - s_{p_k})^{m_k} X(s)}{ds^{m_k - m}} \Bigg|_{s=s_{p_k}}$$

Biến đổi Laplace nghịch của các phân thức tối giản

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right] = \begin{cases} e^{\alpha t}u(t) & (\sigma > \alpha) \\ -e^{\alpha t}u(-t) & (\sigma < \alpha) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^n}\right] = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}u(t) & (\sigma > \alpha) \\ -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}u(-t) & (\sigma < \alpha) \end{cases}$$

- Xem xét một hệ thống TTBB liên tục với đáp ứng xung $h(t)$, nghĩa là:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

- Thực hiện biến đổi Laplace cho cả hai vế của phương trình trên và áp dụng tính chất của biến đổi Laplace của tích chập:

$$Y(s) = H(s)X(s) \;\rightarrow\; H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- $H(s)$ được gọi là *hàm chuyển* của hệ thống.

- Đáp ứng xung của hệ thống có thể xác định được bằng cách lấy biến đổi Laplace nghịch của hàm chuyển:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Y(s)}{X(s)}\right]$$

- Một hệ thống TTBB liên tục thường được biểu diễn dưới dạng một phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng, có dạng như sau:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- Thực hiện biến đổi Laplace cho cả hai vế của phương trình trên:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i Y(s) = \sum_{j=0}^{M} b_j s^j X(s)$$

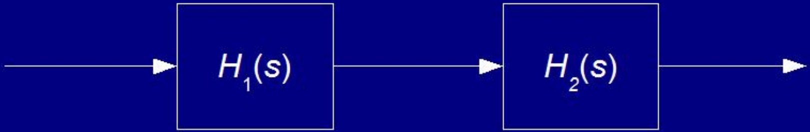
- Hàm chuyển của hệ thống khi đó được xác định theo công thức:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

- Hàm chuyển xác định hệ thống, dựa trên việc giải phương trình vi phân biểu diễn hệ thống TTBB bằng biến đổi Laplace và biến đổi Laplace nghịch:

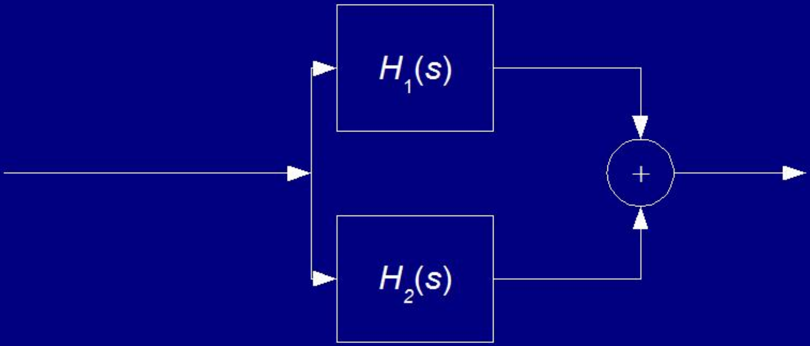
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)X(s)]$$

- Sơ đồ nối tiếp:



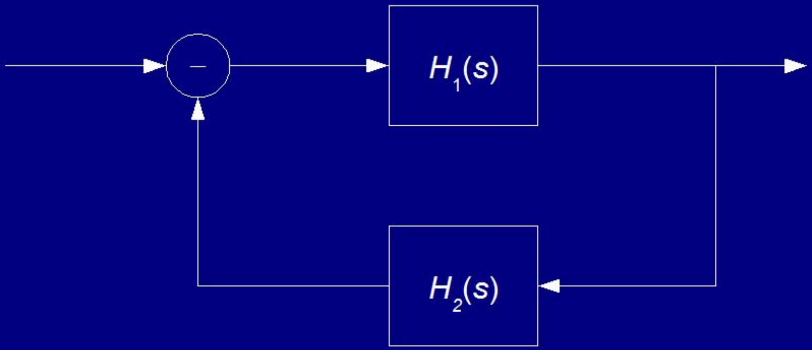
Hàm chuyển tổng hợp $H(s) = H_1(s)H_2(s)$

- Sơ đồ song song:



Hàm chuyển tổng hợp $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$

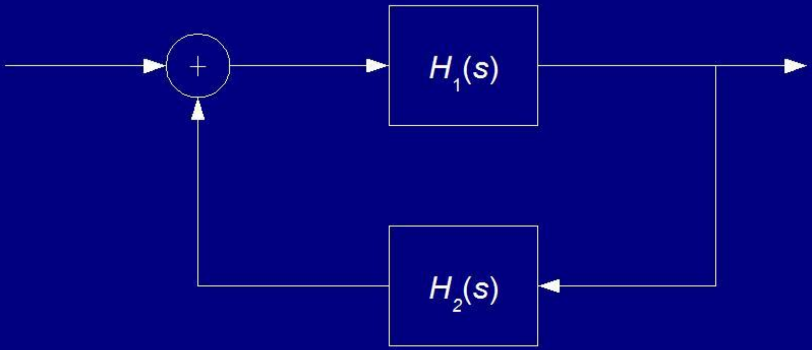
- Hệ thống với phản hồi âm:



Hàm chuyển tổng hợp

$$H(s) = H_1(s)/[1 + H_1(s)H_2(s)]$$

- Hệ thống với phản hồi dương:



Hàm chuyển tổng hợp

$$H(s) = H_1(s)/[1 - H_1(s)H_2(s)]$$

- Biến đổi Laplace một phía của tín hiệu $x(t)$ được định nghĩa như sau:

$$X^1(s) = \mathcal{L}^1[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

- Nếu $x(t)$ nhân quả: biến đổi Laplace một phía và hai phía của $x(t)$ là đồng nhất.

- Hầu hết các tính chất của biến đổi Laplace một phía cũng tương tự của biến đổi hai phía. Có một sự khác biệt trong tính chất của biến đổi Laplace của đạo hàm như sau:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^1\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= sX^1(s) - x(0) \\
\mathcal{L}^1\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] &= s^2X^1(s) - sx(0) - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}
\end{aligned}
$$

- Ứng dụng: giải phương trình vi phân có điều kiện đầu $\rightarrow$ áp dụng cho hệ thống nhân quả.

- Cho một hệ thống TTBB được biểu diễn bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- Thực hiệ biến đổi Laplace một phía cho cả hai vế của phương trình, we obtain:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i Y^1(s) - I(s) = \sum_{j=0}^{M} b_j s^j X^1(s)$$

trong đó, $I(s)$ chứa tất các các thành phần của điều kiện đầu tại $t = 0$.

- Nhớ rằng đáp ứng $y(t)$ của hệ thống bao gồn hai thành phần: đáp ứng với điều kiện đầu và đáp ứng với tín hiệu vào, được biểu diễn như sau:

$$y(t) = y_0(t) + y_s(t)$$

hay:

$$Y^1(s) = Y_0^1(s) + Y_s^1(s)$$

- Đáp ứng của hệ thống với một tín hiệu vào nhân quả (nghĩa là, $X^1(s) = X(s)$):

$$y_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)X(s)]$$

- Đáp ứng với điều kiện đầu:

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{I(s)}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}\right]$$

- Một hệ thống TTBB có hàm chuyển $H(s)$ với các trị cực $\{s_{p_k}\} \rightarrow H(s)$ có thể biểu diễn được dưới dạng sau đây (nếu tất cả trị cực đều là trị cực đơn):

$$H(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_{p_k}}$$

  - Nếu hệ thống nhân quả, đáp ứng xung của nó sẽ có dạng:

$$h(t) = \sum_k A_k e^{s_{p_k} t} u(t)$$

  - Nếu hệ thống phản nhân quả, đáp ứng xung của nó sẽ có dạng:

$$h(t) = -\sum_k A_k e^{s_{p_k} t} u(-t)$$

- Xem xét tính ổn định của hệ thống trên đây:
  - Nếu hệ thống nhân quả, điều kiện để hệ thống ổn định là:

    $$\forall s_{p_k} : \lim_{t \to +\infty} e^{s_{p_k} t} = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{Re}(s_{p_k}) < 0$$

    nghĩa là, tất cả các trị cực của $H(s)$ phải nằm trong nửa bên trái của mặt phẳng s.
  - Nếu hệ thống phản nhân quả, điều kiện để hệ thống ổn định là:

    $$\forall s_{p_k} : \lim_{t \to -\infty} e^{s_{p_k} t} = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{Re}(s_{p_k}) > 0$$

    nghĩa là, tất cả các trị cực của $H(s)$ phải nằm trong nửa bên phải của mặt phẳng s.

- Một phương pháp khác để phân tích tính ổn định của hệ thống nhân quả biểu diễn bởi hàm chuyển: sử dụng điều kiện Routh-Hurwitz, được mô tả tóm tắt như sau:
  - Không cần giải phương trình đặc trưng để xác định các trị cực của hệ thống.
  - Một bảng Routh-Hurwitz được lập ra từ các hệ số của đa thức đặc trưng. Bảng này sẽ được sử dụng để khảo sát tính ổn định của hệ thống (xem chi tiết trong tài liệu tham khảo).