Phần Lý thuyết

1. **Định lý Clapeyron. Định ly Kirchhoff về sự duy nhất nghiệm của bài toán lý thuyết đàn hồi.**

1.4.1. ĐỊNH LÝ CLAPEYRON

Nếu vật thể đàn hồi ở trạng thái cân bằng, thì công của lực ngòai sản ra trên chuyển dịch đàn hồi u có giá trị:

$$L=\iiint_V(\rho K.u)\,dV+\iint_S\sum .udS;$$

hay: $$L=\iiint_V(\rho K_j.u_j)\,dV+\iint_S\sum{}_j u_j dS; \qquad (1.3.1)$$

trong đó, tổng lực trên mặt biên S: $\sum_j=\sigma_{ij}v_i$, do đó:

$$L=\iiint_V(\rho K_j.u_j)\,dV+\iint_S\sigma_{ij}v_iu_jdS; \qquad (1.3.2)$$

Dùng công thức Ostrogradsky về biến đổi tích phân, ta có:

$$\begin{aligned}L&=\iiint_V(\rho K_ju_j)\,dV+\iiint_V(\sigma_{ij}u_j)_{,i}dV\\&=\iiint_V(\rho K_ju_j)\,dV+\iiint_V\sigma_{ij,i}u_jdV+\iiint_V\sigma_{ij}u_{j,i}dV\\&=\iiint_V(\sigma_{ij,i}+\rho K_j)u_jdV+\iiint_V\sigma_{ij}\frac{1}{2}(u_{j,i}+u_{i,j})\,dV\\&=\iiint_V(\sigma_{ij,i}+\rho K_j)u_jdV+\iiint_V\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV\end{aligned}$$

Vì có phương trình cân bằng, nên tích phân thứ nhất trong tổng trên bằng 0, biểu thức dưới dấu tích phân thứ 2 bằng 2 lần thế đàn hồi trên một đơn vị thể tích, do đó:

$$L=2\iiint_V WdV$$

$$\Rightarrow\iiint_V WdV=L\frac{1}{2}$$

Định lý Clapeyron: thế đàn hồi toàn phần (hay công biến dạng) bằng nửa công ngoại lực trên chuyển dịch đàn hồi.

1.4.2. ĐỊNH LÝ KIRCHHOFF VỀ SỰ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

Định lý: Nếu cho trước lực ngòai (lực khối trong V, lực mặt trên phân biên S_1 và chuyển dịch trên mặt biên S_2) thì phương trình cân bằng:

$\sigma_{ij,i} + \rho K_j = 0$ (1.4.1)

có duy nhất nghiệm.

Chú ý rằng trong các bài toán đơn giản, chuyển dịch xác định chính xác đến những số hạng liên quan đến chuyển dịch của vật thể như cố thể. Những số hạng này không có ý nghĩa quan trọng vì nó không liên quan đến biến dạng.

Để chứng minh định lý, ta giả thiết ngược lại: tồn tại hai hệ thống chuyển dịch đàn hồi và ứng suất: $u_j^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ và $u_j^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ thỏa mãn phương trình cân bằng (1.4.1) và điều kiện biên: $\sum_j = \sigma_{ij} v_i$ trên S_1, và $u_j = u_j^b$ trên S_2 (1.4.2)

Nếu ta kí hiệu: $\bar{u}_j = u_j^{(1)} - u_j^{(2)}, \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}$, thì các đại lượng này thỏa mãn phương trình cần bằng và điều kiện biên thuần nhất, tức là: $\bar{\sigma}_{ij,i} = 0$ (1.4.3)

Và: $\bar{\sigma}_{ij} v_i = 0$ trên S_1 (1.4.4)

$\bar{u}_j = 0$ trên S_2

Nhân phương trình (1.4.3) với $\bar{u}_j$ và tích phân trên toàn thể tích của vật thể ta có:

$$\iiint_V \bar{\sigma}_{ij,i} \bar{u}_j dV = 0 \qquad (1.4.5)$$

Hay là: $$\iiint_V \left(\bar{\sigma}_{ij} \bar{u}_j\right)_{,i} dV - \iiint_V \bar{\sigma}_{ij} \bar{u}_{j,i} dV = 0.$$

Dùng công thức Cauchy để biến đổi tích phân thứ hai:

$$\iiint_V \bar{\sigma}_{ij} \bar{u}_{j,i} dV = \iiint_V \bar{\sigma}_{ij} \frac{1}{2}\left(\bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{i,j}\right) dV = \iiint_V \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} dV,$$

Khi đó, phương trình (1.4.5) đưa về dạng: $\iiint_V \left(\bar{\sigma}_{ij} \bar{u}_j\right)_{,i} dV - \iiint_V \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} dV = 0.$

Theo công thức Ostrogradsky về biến đổi thể tích phân và biểu thức của thế đàn hồi trên đơn vị thể tích, ta đưa phương trình này về dạng:

$$\iint_S \bar{\sigma}_{ij} \bar{u}_j v_j dS - 2\iiint_V W dV = 0.$$

Tích phân thứ nhất bằng 0 theo điều kiện (1.4.4), vậy $\iiint_V W dV = 0$

Thế đàn hồi là hàm xác định dương, nó chỉ bằng không khi mọi thành phần biến dạng $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0$. Từ đó suy ra mọi thành phần $\bar{\sigma}_{ij} = 0$. Điều này có nghĩa là vật thể đàn hồi chỉ có chuyển dịch như cố thể. Hai hệ thống chuyển dịch chỉ khác nhau một đại lượng không liên quan đến biến dạng.

Vậy nghiệm của bài toán cân bằng đàn hồi là duy nhất.

2. Định lý về sự tương hỗ của chuyển dịch và công biến dạng tối thiểu.

1.5.1. ĐỊNH LÝ VỀ TƯƠNG HỖ CỦA CHUYỂN DỊCH

Trong trường hợp biến dạng đàn hồi, Betti và Maxwel chứng minh định lý sau đây:

Định lý: Nếu lực khối $K^{(1)}$ và lực mặt $\sum^{(1)}$ gây ra trong vật thể chuyển dịch $u^{(1)}$, còn lực khối $K^{(2)}$ và lực mặt $\sum^{(2)}$ gây ra trong vật thể chuyển dịch $u^{(2)}$, thì công của lực $K^{(1)},\sum^{(1)}$ trên chuyển dịch $u^{(2)}$ bằng công của lực $K^{(2)},\sum^{(2)}$ trên chuyển dịch $u^{(1)}$, trong đó kể cả công của lực quán tính.

Ta thấy rằng định lý này là hệ quả của nguyên lý tổng hợp tuyến tính các ảnh hưởng của lực tác dụng, và cũng là hệ quả toán học của tính chất tuyến tính trong những phương trình cơ sở của lý thuyết đàn hồi.

Trước khi chứng minh định lý, chúng ta giải thích rõ vấn đề này. Giả sử đầu tiên đặt lên vật các lực $K^{(1)},\sum^{(1)}$, các lực này gây ra chuyển dịch $u^{(1)}$ và sinh ra một công L_{11}. Bây giờ lại tác dụng tiếp lên vật thể lực $K^{(2)},\sum^{(2)}$, ta xem các lực này gây ra trong vật thể chuyển dịch $u^{(2)}$ và sản ra một công L_{22}. Lực $K^{(1)},\sum^{(1)}$ sinh ra công trên chuyển dịch $u^{(2)}$ và L_{12}. Vậy tổng công lực ngoài bằng:

$$L = L_{11} + L_{12} + L_{22}.$$

Bây giờ ta thay đổi thứ tự đặt lực và lý luận tương tự như trên, tổng công sẽ là:

$$L' = L_{22} + L_{21} + L_{11}.$$

Vì $L = L'$, do đó $L_{12} = L_{21}$. Kết quả này chỉ tồn tại với biến dạng đàn hồi.

Chứng minh định lý. Công của hệ lực thứ nhất kể cả lực quán tính trên chuyển dịch thứ hai bằng:

$$L_{12} = \iiint_V \rho\left(K^{(1)} - \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}\right)u^{(2)}dV + \iint_S \sum{}^{(1)} u^{(2)} dS$$

Hay là: $$L_{12} = \iiint_V \rho\left(K_j^{(1)} - \frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial t^2}\right)u_j^{(2)}dV + \iint_S \sigma_{ij}^{(1)} v_i u_j^{(2)} dS \qquad (1.5.1)$$

Ta biến đổi tích phân mặt nhờ công thức Ostrogradsky

$$\iint_S \sigma_{ij}^{(1)} v_i u_j^{(2)} dS = \iiint_V \left(\sigma_{ij}^{(1)} u_j^{(2)}\right)_{,i} dV = \iiint_V \sigma_{ij,i}^{(1)} u_j^{(2)} dV + \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} u_{j,i}^{(2)} dV$$

Vì: $$\iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} u_{j,i}^{(2)} dV = \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \frac{1}{2}\left(u_{j,i}^{(2)} + u_{i,j}^{(2)}\right) dV = \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV,$$

Do đó: $$\iint_S \sigma_{ij}^{(1)} v_i u_j^{(2)} dS = \iiint_V \sigma_{ij,i}^{(1)} u_j^{(2)} dV + \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV. \qquad (1.5.2)$$

Thay thế (1.5.2) vào (1.5.1) ta được: $$L_{12} = \iiint_V \left[\sigma_{ij,i}^{(1)} + \rho\left(K_j^{(1)} - \frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial t^2}\right)\right] u_j^{(2)} dV + \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV.$$

Tích phân thứ nhất bằng không, do đó: $$L_{12} = \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV. \qquad (1.5.3)$$

Tương tự như vậy: $$L_{21} = \iiint_V \rho\left(K^{(2)} - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}\right)u^{(1)}dV + \iint_S \sum{}^{(2)} u^{(1)} dS = \iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV. \quad (1.5.4)$$

Theo định luật Hooke: $\sigma_{ij} = C_{ijrs}\varepsilon_{rs}$, ta viết các hệ thức (1.5.3) và (1.5.4) dưới dạng:

$$L_{12} = \iiint\limits_V C_{ijrs}\varepsilon_{rs}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}dV; \quad L_{21} = \iiint\limits_V C_{ijrs}\varepsilon_{rs}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}dV.$$

Vì tenxo C_{ijrs} đối xứng, nên các biểu thức dưới dấu tích phân bằng nhau, kết quả cho ta điều chứng minh: $L_{12} = L_{21}$.

1.5.2. ĐỊNH LÝ VỀ CÔNG BIẾN DẠNG TỐI THIỂU

Xét trường hợp không có lực khối và trên biên cho trước chuyển dịch. Chuyển dịch đàn hồi u_j xuất hiện thực tế trong vật thể thỏa mãn phương trình cân bằng:

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad (1.6.1)$$

Và điều kiện biên: $u_j = u_j^b$ (1.6.2)

Ta tưởng tượng có chuyển dịch đàn hồi khác (chuyển dịch khả dĩ) thỏa mãn điều kiện liên kết của vật thể: $u_j^{(2)} = u_j + \delta u_j$. (1.6.3)

Chuyển dịch này thỏa mãn điều kiện biên (1.6.2) nhưng không thỏa mãn phương trình cân bằng. Từ (1.6.2) và (1.6.3) suy ra trên biên $\delta u_j = 0$. Các biến phân chuyển dịch δu_j không thỏa mãn phương trình cân bằng. Đối với các chuyển dịch thực u_j ta có thế đàn hồi: $U = \iiint\limits_V WdV$, trong đó W là hàm đẳng cấp bậc hai thuần nhất của các thành phần biến dạng ε_{ij}: $W = \frac{1}{2}C^{ijrs}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{rs}$ (1.6.4)

Đối với chuyển dịch khả dĩ $u_j^{(2)}$ ta có các thành phần biến dạng:

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(2)} + u_{j,i}^{(2)}\right) \quad (1.6.5)$$

tương ứng với thế đàn hồi : $W^{(2)} = \frac{1}{2}C^{ijrs}\varepsilon_{ij}^{(2)}\varepsilon_{rs}^{(2)}$ (1.6.6)

Tương tự đối với δu_j: $\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right)$ (1.6.7)

và: $W\left(\delta\varepsilon_{ij}\right) = \frac{1}{2}C^{ijrs}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{rs}$ (1.6.8)

Từ (1.6.3), (1.6.5) và (1.6.7) suy ra: $\varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}$. (1.6.9)

Đặt (1.6.9) vaof (1.6.6) và chú ý đến (1.6.4), (1.6.8) ta nhận được:

$W^{(2)} = W + W\left(\delta\varepsilon_{ij}\right) + C^{ijrs}\delta\varepsilon_{rs}\delta\varepsilon_{ij}$, hay là $W^{(2)} = W + W\left(\delta\varepsilon_{ij}\right) + \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$.

Thế đàn hồi đối với chuyển dịch khả dĩ $u_j^{(2)}$ có dạng:

$$U_2 = \iiint\limits_V W^{(2)}dV = \iiint\limits_V WdV + \iiint\limits_V W\left(\delta\varepsilon_{ij}\right)dV + \iiint\limits_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV. \quad (1.6.10)$$

Xét tích phân thứ ba:

$$\iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV = \iiint_V \sigma_{ij}\delta u_{j,i}dV = \iiint_V \left(\sigma_{ij}\delta u_j\right)_{,i} dV - \iiint_V \sigma_{ij,i}\delta u_j dV$$

Ngoài ra, nhờ công thức biến đổi tích phân khối ra tích phân mặt ta có:

$$\iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV = \iint_S \sigma_{ij}\delta u_j v_i dS - \iiint_V \sigma_{ij,i}\delta u_j dV = 0 \tag{1.6.11}$$

Trong công thức (1.6.11) tích phân mặt bằng không vì trên mặt biên $\delta u_j = 0$, còn tích phân thứ hai bế vế phải bằng không, vì phương trình cân bằng (1.6.1). Hệ thức (1.6.10) có thể viết dưới dạng:

$$U_2 = U + \iiint_V W\left(\delta\varepsilon_{ij}\right)dV \tag{1.6.12}$$

Theo định nghĩa thế đàn hồi xác định dương $W\left(\delta\varepsilon_{ij}\right) > 0$, từ (1.6.12) $\Rightarrow U_2 > U$

Định lý: Trong trường hợp không có lực khối và cho trước chuyển dịch trên toàn biên, công biến dạng (thế đàn hồi) có giá trị nhỏ nhất ứng với trạng thái cân bằng thực của vật thể.

3. Liên hệ qua lại giữa ứng suất, biến dạng và chuyển vị trong vật thể đàn hồi tuyến tính.

Hooke:

$$\gamma_{xx} = 2\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \gamma_{yy} = 2\frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{zz} = 2\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

Cauchy:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

4. Các dạng khác nhau của định luật Hooke cho lý thuyết đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng (liên hệ giữa các hằng số đàn hồi).

a) Trong tọa độ Decac

Trong vật rắn biến dạng đàn hồi, quan hệ biến dạng - ứng suất tuân theo định luật Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}.\varepsilon_{ij}, \left(\left(i, j, k, l\right) = \left(\overline{1.3}\right)\right) \tag{2.5}$$

trong đó C_{ijkl} là tenxo các hằng số đàn hồi và là tenxo hạng bốn

Nếu vật liệu là đẳng hướng, tenxo các hằng số đàn hồi chỉ có hai thành phần độc lập λ, μ gọi là hằng số Lame, khi đó:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \text{ (i, j} = 1, 2, 3) \qquad (2.6)$$

$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}$ gọi là biến dạng thể tích tỉ đối, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ kí hiệu Kronecker

Hay viết dưới dạng khai triển:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}; \;\; \sigma_{12} = \mu\gamma_{12}; \\ &\sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22}, \;\; \sigma_{23} = \mu\gamma_{23}; \\ &\sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33}, \;\; \sigma_{13} = \mu\gamma_{13}; \end{aligned} \qquad (2.6')$$

$\lambda = \dfrac{vE}{(1+v)(1-2v)}; \quad \mu = G = \dfrac{E}{2(1+v)}$, trong đó E – môđun đàn hồi; v hệ số Poatxong; G môđun trượt.

Từ (2.6) ta có thể tính được các thành phần biến dạng:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{v}{1+v}\sigma\delta_{ij}\right); \; \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}. \qquad (2.7)$$

(2.7) biểu thị mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng (**Định luật Hooke ngược**)

Hay viết dưới dạng khai triển:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - v\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right); \;\; 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G}; \\ &\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - v\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right)\right); \;\; 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G}; \\ &\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{33} - v\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right); \;\; 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G}; \end{aligned}$$

b) Trong tọa độ trụ

Định luật Hooke viết trong tọa độ trụ có dạng:

$$\begin{aligned} &\sigma_r = \lambda\theta_e + 2\mu\varepsilon_r, \; \sigma_\theta = \lambda\theta_e + 2\mu\varepsilon_\theta, \sigma_z = \lambda\theta_e + 2\mu\varepsilon_z, \\ &\tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \tau_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z} = 2\mu\varepsilon_{\theta z}, \tau_{zr} = \mu\gamma_{zr} = 2\mu\varepsilon_{zr}, \end{aligned}$$

Trong đó: $\theta_e = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_r}{\partial z};$

các thành phần vật lý của tenxo biến dạng ký hiệu qua $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}$, các thành phần của tenxo quay $\omega_z, \omega_r, \omega_\theta$. Với:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r};\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r};\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \gamma_{\theta z} = \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right), \gamma_{zr} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right), \omega_r = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right), \omega_\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right),$$

c) Trong tọa độ cầu

Định luật Hooke viết trong tọa độ cầu có dạng:

$$\sigma_r = \lambda\theta_e + 2\mu\varepsilon_r,\ \sigma_\theta = \lambda\theta_e + 2\mu\varepsilon_\theta, \sigma_\varphi = \lambda\theta_e + 2\mu\varepsilon_\varphi,$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \tau_{\theta\varphi} = \mu\gamma_{\theta\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\theta\varphi}, \tau_{\varphi r} = \mu\gamma_{\varphi r} = 2\mu\varepsilon_{\varphi r},$$

Trong đó: $\theta_e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r\,tg\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$; các thành phần vật lý của tenxo biến dạng ký hiệu qua $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta\varphi}, \gamma_{\varphi r}$, các thành phần của tenxo quay $\omega_\varphi, \omega_r, \omega_\theta$. Khi đó:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r};\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\varphi}{r\,tg\varphi};\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r};$$

$$\gamma_{r\theta} = \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \gamma_{\theta\varphi} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta}{r\,tg\varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\right),$$

$$\gamma_{\varphi r} = \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right), \omega_r = \frac{1}{2r\sin\varphi}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(u_\theta \sin\varphi)\right),$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\varphi)\right), \omega_\varphi = \frac{1}{2r\sin\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta \sin\varphi) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right).$$

5. Cách đặt bài toán thuận ngược của lý thuyết đàn hồi. Nguyên lý Saint – Venant.

2.4.1. Bài toán thuận

Bài toán thuận của lý thuyết đàn hồi tìm cách xác định ứng suất và biến dạng xuất hiện trong vật thể có hình dáng cho trước, chịu tác dụng của lực ngoài cho trước. Bài toán này dẫn đến việc tích phân phương trình vi phân cân bằng hay chuyển động với điều kiện biên và điều kiện ban đầu.

2.4.2. Bài toán ngược

Bài toán ngược được thiết lập như sau: cho biết trước biến dạng hoặc ứng suất, cần phải xác định lực ngoài đã tác dụng lên vật thể để sinh ra biến dạng đó. Tổng quát hơn còn yêu cầu xác định hình dáng và kích thước của vật thể, thích ứng với biến dạng và ứng suất đã cho. Các đại lượng sau thỏa mãn phương trình cân bằng hay chuyển động và phương trình tương thích.

2.4.3. Nguyên lý Saint – Venant

Bài toán thuận thường gặp trong thực tế. Khả năng dùng phương pháp chính xác để giải các bài toán có nhiều hạn chế, vì vậy ngày càng phát triển phương pháp gần đúng và phương pháp số.

Một số bài toán có nhiều ý nghĩa thực tiễn giải bằng phương pháp nửa ngược của Saint – Venant. Trong phương pháp này, người ta cho biết một phần các thành phần chuyển dịch hoặc ứng suất, phần còn lại xác định từ tích phân phương trình cân bằng hoặc chuyển động với điều kiện biên, điều kiện ban đầu và điều kiện tương thích. Ta thường dùng phương pháp này trong sức bền vật liệu.

Nguyên lý: đối với các vật thể có một trong những kích thước đặc trưng nhỏ hơn hiều lần so với kích thước kia (bản, vỏ) hoặc có hai kích thước nhỏ hơn kích thước thứ ba (thanh, dầm) người ta thường dùng nguyên lý Saint – Venant trong khi giải bài toán. Nguyên lý này được thiết lập như sau:

- Nếu tại miền nào đấy bên trong hoặc trên biên vật thể không lớn lắm so với các kích thước chính của vật chịu tác dụng của lực ngoài (lực khối hoặc lực mặt) và vật thể có cân bằng, thì tại các miền xa miền đặt lực đó, trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng được xác định chủ yếu bằng vecto chính và momen chính của các lực đó và không phụ thuộc vào đặc trưng chi tiết của sự phân bố các lực đó. Ảnh hưởng về sự phân bố cụ thể các lực chỉ thể hiện ở ngay lân cận miền đặt lực.
- Nguyên lý Saint – Venant suy ra từ tính chất tổng quát của nghiệm bài toán đàn hồi. Nếu tại miền S nào đấy nhỏ hơn kích thước của toàn vật thể ta đặt hệ lực cân bằng tĩnh học, thì ứng suất và biến dạng sinh ra trong vật thể sẽ giảm rất nhanh tại các điểm cách xa miền đặt lực S.
- Dựa vào nguyên lý này, Saint – Venant đã giải được các bài toán cân bằng bản, vỏ, dầm…; các điều kiện biên cho thỏa mãn gần đúng (không cho thỏa mãn cụ thể tại từng điểm biên theo các lực đặt vào đó, mà chỉ cho thỏa mãn lực tổng và momen tổng của các lực này trên cả miền đạt lực). Cũng vì vậy, đôi khi người ta còn gọi là phương pháp làm giảm nhẹ điều kiện biên. Nhờ đó đã giải quyết được gần đúng nhiều bài toán đàn hồi và sức bên vật liệu. Nhiều số liệu thực nghiệm khẳng định nguyên lý này.

6. Trạng thái biến dạng phẳng

❖ Giả sử trạng thái biến dạng của vật thể như thế nào đấy để cho

- mọi điểm của nó chuyển dịch song song với một mặt phẳng cố định, mọi điểm nằm trên cùng một đường thẳng bất kỳ trực giao với mặt phẳng cố định sẽ có chuyển dịch như nhau

  ⇨ Khi đó ta có trường hợp biến dạng phẳng.
- Nếu chọn trục z thẳng góc với mặt phẳng cố định thì thành phần chuyển dịch u,v chỉ là hàm số phụ thuộc vào x,y, còn w=0 khắp nơi.

❖ Từ định nghĩa ta thấy vật thể thực hiện biến dạng phẳng có thể là

- Trụ thẳng có đáy song song với mặt phẳng cố định dưới tác dụng của các lực song song với mặt phẳng đó.
- Còn ở trạng thái gần biến dạng phẳng có thể là đập nước, hầm tàu điện ngầm, hầm mỏ, ống dẫn, nền móng dài, răng của bánh xe răng khế, chiều dài của răng lớn so với chiều rộng và chiều dày hoặc một số phần tử kết cấu khác.
- Ngòai ra, người ta tính toán nòng sung cũng theo phương pháp biến dạng phẳng, mặc dầu khi bắn nòng sung không hòan toàn thỏa mãn điều kiện biến dạng phẳng.

7. Trạng thái ứng suất phẳng. Trạng thái ứng suất phẳng suy rộng. Phương trình Levy

Ứng suất phẳng

❖ Nếu trạng thái ứng suất trong một vật thể như thế nào đấy, sao cho :

- Tại các tiết diện song song với một mặt phẳng cố định ứng suất bằng không, còn tại các tiết diện khác ứng suất không phụ thuộc vào khoảng cách từ điểm đang xét tới mặt phẳng cố định, thì ta có trạng thái ứng suất phẳng.

- Nếu chọn trục z thẳng góc với mặt phẳng cố định, thì $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ khắp nơi, còn $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ là hàm của x,y. Bản mỏng chịu tải ngoài tác dụng theo hướng song song với mặt phẳng của bản và không thay đổi theo độ dày (tức là không gây ra uốn bản) cho ta trạng thái gần với ứng suất phẳng.

Ứng suất phẳng suy rộng

- ❖ Trong thực tế có trường hợp ứng suất gần với ứng suất phẳng. Chẳng hạn bản mỏng chịu tải theo chu tuyến với các lực mặt nằm trong mặt phẳng của bản và lực khối K_x, K_y. Ta gọi trạng thái tương tự như vậy là trạng thái ứng suất phẳng suy rộng.

  Xét bản mỏng có độ dày h, trục Ox, Oy nằm trên mặt giữa. Giả sử lực khối và lực mặt tác dụng song song và đối xứng với mặt giữa (x,y), còn mặt bản $z = \pm h/2$ không chịu lực ngòai. Do đó:

$$\sum_x = \tau_{xz} = 0, \sum_y = \tau_{yz} = 0, \sum_z = \sigma_z = 0, \text{ với } \quad z = \pm h/2 \qquad (3.2.1)$$

Mặt bên của bản chịu tải theo điều kiện: $\sum_x, \sum_y$, là hàm của x,y,z còn $\sum_z = 0$, .

Trạng thái ứng suất với $\sigma_z = 0$ ở mọi nơi, còn $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ tại $z = \pm h/2$ gọi là trạng thái ứng suất phẳng suy rộng.

Các thành phần của tenxo biến dạng:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \varepsilon_{ij} \text{ là các hàm số phụ thuộc vào x,y}$$

Phương trình vi phân cân bằng:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \end{cases}$$

Phương trình tương thích biến dạng:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Định luật Hooke tổng quát

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_x - v\sigma_y\right), \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_y - v\sigma_x\right), \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = \dfrac{2(1+v)}{E}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z = \dfrac{-v}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right). \end{cases}$$

Phương trình vi phân cân bằng biểu diễn qua ứng suất:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-\left(1+v\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Phương trình vi phân cân bằng biểu diễn qua chuyển vị:

$$\begin{cases} G\Delta u+G\dfrac{1+v}{1-v}.\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+X=0,\\ G\Delta v+G\dfrac{1+v}{1-v}.\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+Y=0.\end{cases},\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z.$$

8. Hàm ứng suất Airy.

•) xét TH lực khối = 0, ptcb (.) TH bdạng phẳng có dạng

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0\end{cases}$$

⇒ ∃ hàm khả vi liên tục 2 A(x,y) và B(x,y) sao cho

$$\left\|\begin{array}{l}\sigma_{xx}=\dfrac{\partial A}{\partial y}\ ;\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial A}{\partial x}\\ \sigma_{yy}=-\dfrac{\partial B}{\partial x}\ ;\ \tau_{xy}=\dfrac{\partial B}{\partial y}\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{-\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial y}}$$

⇒ ∃ hàm khả vi liên tục U(x,y) sao cho: $A=\dfrac{\partial U}{\partial y}$; $B=-\dfrac{\partial U}{\partial x}$

⊕ Biểu diễn các tp ứng suất qua hàm U(x,y) ta có:

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\ ;\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\ ;\ \sigma_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

⊕ ĐK của hàm ứng suất Airy - tìm ph Max-well

$$\boxed{\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+2.\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0}$$

Phần bài tập

☺ Bài toán xoắn thanh tròn

Một thanh hình trụ có tiết diện tròn bán kính b chịu lực ngoài tác dụng ở hai đáy, các lực ngoài chỉ gây ra ứng suất tiếp và tương đương với ngẫu lực nằm trong mặt phẳng đáy, mô-men của ngẫu lực đó là mô-men xoắn M.

Dùng giả thiết tiết diện phẳng và bán kính phẳng. Tại mỗi điểm của tiết diện có ứng suất tiếp T_s thẳng góc với bán kính véc-tơ của điểm.

Gọi β là góc quay giữa hai mặt cắt cách nhau một đơn vị, khi đó biến dạng trượt xác định bởi công thức: $\gamma=\beta r$.

Do đó, thành phần ứng suất tiếp: $T_s=G\gamma=\beta Gr$,

Trạng thái ứng suất có dạng:

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0,$$
$$\tau_{zx}=-T_s\frac{y}{r}=-G\beta y,$$
$$\tau_{yz}=+T_s\frac{x}{r}=+G\beta x.$$

Từ đây có thể thấy rằng ứng suất tiếp đạt cực đại ở biên ngoài của thanh.

Trạng thái ứng suất trên phải thỏa mãn phương trình tương thích Beltrami, do đó: $K_x=K_y=K_z=0$, nghĩa là nếu không có lực khối thì trạng thái ứng suất trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bây giờ xem nó có thỏa mãn điều kiện biên của bài toán hay không.

Ta có, tại mặt bên, tương ứng với các thành phần cosin chỉ phương: $n=0,m=\dfrac{y}{r},l=\dfrac{x}{r}$, thay những giá trị này và biểu thức của ứng suất, sau đó thay vào hệ phương trình điều kiện biên cho kết quả $\Sigma_x=\Sigma_y=\Sigma_z=0$, nghĩa là nó thỏa mãn điều kiện mặt bên không có lực tác dụng.

Trên hai mặt đáy: $n=\pm1,m=l=0$, cho ta: $\Sigma_x=\tau_{xz}=-G\beta y$, $\Sigma_y=\tau_{yz}=G\beta x$, $\Sigma_z=0$, kết quả phù hợp với giả thiết, vì từ đây ta thấy chỉ có lực tiếp tuyến tác dụng.

Hợp lực của chúng chiếu lên các trục bằng không:

$$\iint_S \tau_{xz} dS = -\iint_S G\beta y dS = 0, \iint_S \tau_{yz} dS = \iint_S G\beta x dS = 0,$$

Tức là lực ngoài thu về một ngẫu lực, thỏa mãn bài toán xoắn thanh.

Momen xoắn đối với trục z sẽ là:

$$M = \iint_S (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dS = G\beta \iint_S (x^2 + y^2) dS = G\beta J_p,$$

$$J_p = \frac{\pi b^4}{2},$$

với J_p là momen quán tính cực của mặt tiết diện S.

Công thức này cho phép xác định góc xoắn β khi biết momen ngoài M:

$$\beta = \frac{M}{GJ_p}$$, trong đó GJ_p gọi là độ cứng khi xoắn.

Để tìm chuyển dịch, ta thay các giá trị ứng suất vào định luật Hooke và dùng phương trình Cauchy, kết quả thu được:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \beta x, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\beta y,$$

Tích phân hệ phương trình này ta được:

$$u = -\beta yz + C_1 y - C_2 z + C_3,$$
$$v = \beta xz - C_1 x + C_4 z + C_5,$$
$$w = C_2 x - C_4 y + C_6.$$

☺ Bài toán ống quay nhanh với tốc độ không đổi xung quanh trục

Giả sử gốc tọa độ tại tâm của tiết diện ống, trục *Ox*, *Oy* quay cùng với ống, khi đó thành phần của lực khối sẽ là: $K_x = \omega^2 x, K_y = \omega^2 y$. Giả thiết ống dài, nên có thể bỏ qua những hiện tượng xảy ra ở hai đầu. Với giả thiết như vậy và điều kiện đặt lực nêu trên, có thể xét bài toán này như bài toán phẳng. Phương trình cân bằng theo chuyển dịch có dạng:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta_e}{\partial x} + \mu\Delta_1 u + \rho\omega^2 x = 0,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta_e}{\partial y} + \mu\Delta_1 v + \rho\omega^2 y = 0,$$
$$\theta_e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \ \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Tìm nghiệm phương trình cân bằng dưới dạng:

$$u = x\varphi(r), \ v = y\varphi(r), r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

trong đó $\varphi(r)$ sẽ thỏa mãn phương trình:

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right) + \rho\omega^2 = 0.$$

Tích phân phương trình này cho ta:

$$\varphi = A + \frac{B}{r^2} + Cr^2, C = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)}.$$

Chuyển dịch theo bán kính xác định bởi công thức:

$$u_r = u\frac{x}{R} + v\frac{y}{r} = r\varphi(r) = Ar + \frac{B}{r} + Cr^3.$$

Theo định luật Hooke, các thành phần ứng suất tương ứng:

$$\sigma_x = \lambda\theta_e + 2\mu\left(\varphi + \frac{d\varphi}{dr}\frac{x^2}{r}\right), \sigma_y = \lambda\theta_e + 2\mu\left(\varphi + \frac{d\varphi}{dr}\frac{y^2}{r}\right), \tau_{xy} = \frac{2\mu xy}{r}\frac{d\varphi}{dr},$$

với $\theta_e = 2\varphi + r\dfrac{d\varphi}{dr}$.

Pháp tuyến với mặt biên của hình trụ có các thành phần: $l = \pm\dfrac{x}{r}, m = \pm\dfrac{y}{r}$, $n = 0$, với dấu "+" ứng với mặt ngoài, dấu "-" ứng với mặt trong.

Bây giờ điều kiện biên bên trong và bên ngoài có thể viết:

$$\begin{cases} X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m = \pm\left[\lambda\theta_1 + 2\mu\left(\varphi + r\dfrac{d\varphi}{dr}\right)\right]\dfrac{x}{r} = \Sigma_x, \\ Y_v = \tau_{xy} l + \sigma_y m = \pm\left[\lambda\theta_1 + 2\mu\left(\varphi + r\dfrac{d\varphi}{dr}\right)\right]\dfrac{y}{r} = \Sigma_y, \end{cases}$$

trong đó nếu ống chịu áp suất đều p_1, p_2 thì Σ_x, Σ_y có dạng:

+) $\Sigma_x = -p_1\dfrac{x}{r}, \Sigma_y = -p_1\dfrac{y}{r}$ với $r = a$ tại mặt trong,

+) $\Sigma_x = p_2\dfrac{x}{r}, \Sigma_y = p_2\dfrac{y}{r}$ với $r = b$ tại mặt ngoài.

Các điều kiện này cho phép xác định hai thừa số tích phân *A* và *B*, kết quả đem thay vào biểu thức của thành phần ứng suất ban đầu sẽ nhận được nghiệm của bài toán.

Ta cũng có thể cho thỏa mãn điều kiện biên bằng cách khác để xác định *A* và *B*. Quả vậy, tính ứng suất tại tiết diện thẳng góc với bán kính véc-tơ *r*:

$$\sigma_r = X_v\frac{x}{r} + Y_v\frac{y}{r},$$

Thay biểu thức của Σ_x, Σ_y và φ vào, thu được:

$$\sigma_r = 2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu B}{r^2} + 2(2\lambda + 3\mu)Cr^2.$$

Nếu mặt biên trong và ngoài không tác dụng lực ngoài, thì điều kiện biên có dạng: $\sigma_r = 0$ với $r = a$, và $r = b$.

Từ đây ta xác định hai hằng số A và B, kết quả thu được:

$$A = \frac{(2\lambda+3\mu)(a^2+b^2)\rho\omega^2}{8(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}, B = \frac{(2\lambda+3\mu)a^2b^2\rho\omega^2}{8\mu(\lambda+2\mu)}.$$

☺ Bài toán đĩa quay

Trong thực tế, bài toán xác định ứng suất trong đĩa quay có ý nghĩa quan trọng. Ứng suất do lực li tâm của đĩa quay gây ra có trị số khá lớn.

Ở đây lực khối là lực li tâm: $R = \rho\omega^2 r$,

với: ρ - khối lượng riêng của vật liệu đĩa; ω - vận tốc góc; r - bán kính điểm đang xét đến tâm đĩa.

Ứng suất trong đĩa có giá trị như sau:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 - r^2\right)\\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2\end{aligned}\right\}$$

với: b – bán kính của đĩa đặc; ν - hệ số Poisson.

Ứng suất trên có trị số lớn nhất tại tâm đĩa:

$$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2.$$

Ứng suất hướng theo bán kính có giá trị lớn nhất tại điểm $r = \sqrt{ab}$:

$$\sigma_{r\max} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b-a\right)^2.$$

Rõ ràng $\sigma_{\theta\max} > \sigma_{r\max}$, dẫn đến giá trị gấp đôi ứng suất tại tâm của đĩa đặc. Như vậy việc khoét lỗ tròn ở đĩa quay làm tăng hai lần giá trị lớn nhất của ứng suất. Đó cũng là hiện tượng tập trung ứng suất tại mép lỗ.

Ngoài các bài toán trên, đối với bài toán phẳng trong hệ tọa độ cực cũng bao gồm bài toán thuận và bài toán ngược. Xét một vài ví dụ sau:

☺ Bài toán viên đạn bay

Xét phân tố của hình trụ rỗng (hình 3.24) tách ra từ viên đạn. Phương trình cân bằng có kể đến lực quán tính:

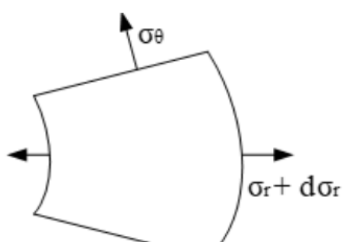
$$\sigma_\theta - \sigma_r = r\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\gamma}{g}w^2 r^2, \qquad (a)$$

$$\sigma_r\big|_{r=a} = 0, \sigma_r\big|_{r=b} = 0, \qquad (b)$$

Sử dụng các quan hệ sau:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r),$$



Kết hợp với (a), ta được phương trình cân bằng viết theo chuyển vị:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{\gamma}{g}w^2 r^2,$$

Nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$u = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\gamma w^2 r^2}{8g} + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

Từ đó, ta có biểu thức ứng suất:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) - \frac{C_2(1-\nu)}{r^2}\right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)r^2,$$

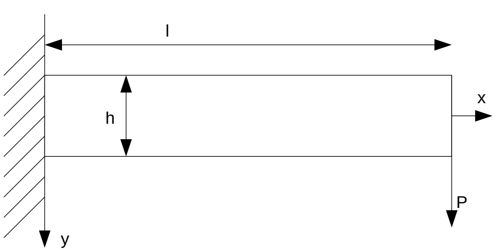
Sử dụng điều kiện (b), ta xác định được C_1, C_2 sau đó đem thay vào (c), ta được:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right).$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{\theta(r=a)} = 4.9\left(MN/m^2\right)$$

☺ Bài toán uốn dầm phẳng Công – xôn



Điều kiện biên:

$$(0,0): \qquad u = v = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

$$y = \pm\frac{h}{2}: \qquad \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0;$$

$$x = l: \qquad \sigma_x = 0, \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\delta dy = -P$$

Xem trạng thái ứng suất phẳng, độ dày $\delta << h$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Đặt

$$\sigma_{xx} = C_0 y + C_1 x$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{C_0 y^3}{6} + \frac{C_1 x y^2}{2} + y f_1(x) + f_2(x)$$

Từ phương trình $\Delta(\Delta F) = 0 \Rightarrow y\frac{d^4 f_1(x)}{dx^4} + \frac{d^4 f_2(x)}{dx^4} = 0$

$$\Rightarrow f_1(x) = C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5; \qquad f_2(x) = C_6 x^3 + C_7 x^2 + C_8 x + C_9$$

$$\Rightarrow \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6(C_2 y + C_6)x + 2(C_3 y + C_7); \quad \tau_{xy} = \frac{-C_1 y^2}{2} - 3C_2 x^2 - 2C_3 x - C_4$$

Thay điều kiện biên vào, ta sẽ tìm được các hằng số C_i, thay các hằng số vào ta sẽ thu được

$$\Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{-P(l-x)}{J} y, \quad J = \frac{h^3 \delta}{12}$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{-P}{2J}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

chuyển dịch

$$u = -\frac{P}{EJ}\left(lxy - \frac{x^2 y}{2}\right) + \frac{P}{EJ} f_3(y)$$

$$v = \frac{\nu P}{EJ}\left(\frac{l y^2}{2} - \frac{x^2 y}{2}\right) + \frac{P}{EJ} f_4(y)$$

với $f_3(y), f_4(y)$ là các hàm tùy ý

Áp dụng định luật Hooke và điều kiện biên tại gốc tọa độ, ta thu được kết quả cuối cùng

$$u = \frac{P}{EJ}\left[-\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{(2+\nu)y^3}{6} + \frac{(1+\nu)h^2 y}{4}\right]$$

$$v = \frac{P}{EJ}\left[\frac{\nu(l-x)y^2}{2} + \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]$$