

Đề thi Kết thúc môn học, Học kỳ 1 năm học 2022-2023

Môn: Đại số tuyến tính

Lớp học phần MAT1093 10,11,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay và các thiết bị điện tử. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Bài 1. (2 điểm) Với α là ngày sinh, β là tháng sinh của thí sinh, hãy viết lại hệ phương trình với tham số thực λ , các ẩn x_1, x_2, x_3 sau đây và tìm tất cả các giá trị của λ sao cho hệ này có nhiều hơn một nghiệm.

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x_1 - 2x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda - 1)x_2 + \beta x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

Lưu ý: Thí sinh cần ghi rõ ngày tháng năm sinh của mình vào giấy thi.

Bài 2. (2 điểm) Cho hai ma trận với tham số thực m

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & m & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & m \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 - m \end{bmatrix}.$$

- (a) Tính tích AB .
- (b) Với những giá trị nào của m thì tích AB là ma trận khả nghịch?

Bài 3. (2 điểm) Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, phụ thuộc tham số m xác định bởi

$$T((x, y, z)) := (x + y + 2z, mx + 2y + 3z, y + z) \text{ với mọi } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- (a) Tìm ma trận của T đối với cơ sở chuẩn tắc (chính tắc) của \mathbb{R}^3 .
- (b) Tìm một cơ sở của $\text{Ker}(T)$ khi $m = 1$.
- (c) Tìm tất cả các giá trị của m để T là một đẳng cấu.
- (d) Xác định ánh xạ ngược (ánh xạ nghịch đảo) T^{-1} khi $m = 2$.

Bài 4. (2 điểm) Đặt $W = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1, 1), u_3 = (1, 2, 0, 1).$$

- (a) Dùng phương pháp Gram-Schmidt để đưa tập hợp các vectơ trên về một tập trực chuẩn.
- (b) Ta định nghĩa một vectơ trong \mathbb{R}^n là vectơ nguyên nếu tất cả các tọa độ của nó đối với cơ sở chuẩn tắc (chính tắc) của \mathbb{R}^n là các số nguyên. Với $v = (a, a, b, b) \in \mathbb{R}^4$, chứng minh rằng hình chiếu $\text{proj}_W v$ là một vectơ nguyên khi và chỉ khi v là một vectơ nguyên.

Bài 5. (2 điểm) Xét ma trận A với tham số thực a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Với những giá trị nào của a thì tất cả các nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận A đều là các số thực và ma trận A chéo hóa được?
- (b) Với những giá trị nào của a thì $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ là một vectơ riêng của A ?