

Câu 4 (1.5đ). Cho ĐLNN liên tục X có hàm phân bố xác suất:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ a \cdot x \cdot (1+x) & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

a. Tìm hàm mật độ xác suất của ĐLNN X .

b. Tính $P(-1 < X < 0.5)$.

c. Xét ĐLNN $Y = 3X^2 + 2X - 2$. Tính EY .

Giải: a. $F(x)$ liên tục tại $x=0, x=1$. Do đó: $2a = 1 \rightarrow a = 1/2 \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0.5 + x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{trai lại} \end{cases}$

b. $P(-1 < X < 0.5) = P(0 < X < 0.5) = F(0.5) - F(0) = 0.375$.

c. $EY = \int_0^1 (3x^2 + 2x - 2) \cdot (0.5 + x) dx = \frac{5}{12} = 0.41667$.

Câu 5 (1.0đ). Gọi X là ĐLNN chỉ số vụ tai nạn xảy ra trên một đoạn đường trong một ngày, X có phân bố Poisson. Biết rằng xác suất có 2 vụ tai nạn xảy ra gấp 3 lần xác suất có 4 vụ tai nạn xảy ra trên đoạn đường đó trong một ngày. Tính xác suất có ít nhất 5 vụ tai nạn xảy ra trên đoạn đường đó trong hai ngày.

Giải: Ta có: $P(X=2) = 3 \cdot P(X=4) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} = 3 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} \rightarrow \lambda = 2$. Do đó, trong hai ngày trung bình sẽ có 4 vụ tai nạn xảy ra.

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \rightarrow 1 - e^{-4} \sum_{k=0}^4 \frac{4^k}{k!} = 0.37116$.

Câu 6 (1.5đ). Theo khảo sát ở một thành phố ta thấy tỷ lệ người xem chương trình thể thao là 20%, tỷ lệ người xem chương trình ca nhạc là 30%, trong số người xem thể thao thì tỷ lệ xem ca nhạc chiếm 80%. Cần điều tra tối thiểu bao nhiêu người để có ít nhất 1 người “xem ca nhạc và không xem thể thao” với xác suất lớn hơn 90%.

Giải: A: xem chương trình thể thao, B: xem chương trình ca nhạc.

Ta có: $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(B|A) = 0.8$.

$\rightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A) \cdot P(B|A) = 0.14$.

Số người “xem ca nhạc và không xem thể thao” là ĐLNN $X \sim B(n, 0.14)$.

Do đó: $P(X \geq 1) \geq 0.9 \leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0.9 \leftrightarrow (1 - 0.14)^n \leq 0.1 \leftrightarrow n \geq 15.26681$.

Vậy cần điều tra tối thiểu 16 người.

Câu 7 (1.5đ). Thời gian đi từ nhà đến trường của một sinh viên là ĐLNN có phân bố chuẩn. Biết rằng khả năng sinh viên đó đến trường mất hơn 25 phút là 0.65 và khả năng mất hơn 35 phút là 0.1.

a. Tính thời gian trung bình, phương sai của thời gian sinh viên đó đến trường.

b. Nếu sinh viên đó xuất phát từ nhà trước giờ vào học 30 phút thì xác suất để sinh viên đó đến muộn là bao nhiêu?

c. Sinh viên đó cần xuất phát trước giờ vào học bao nhiêu phút để khả năng đi học muộn nhỏ hơn 0.03.

Giải: a. X : thời gian sinh viên đi từ nhà đến trường.

$$P(X > 25) = 0.65 \leftrightarrow 0.5 - \Phi_0\left(\frac{25 - \mu}{\sigma}\right) = 0.65 \leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{\mu - 25}{\sigma}\right) = 0.15 \leftrightarrow \frac{\mu - 25}{\sigma} = 0.38 \quad (1)$$

$$P(X > 35) = 0.1 \leftrightarrow 0.5 - \Phi_0\left(\frac{35 - \mu}{\sigma}\right) = 0.1 \leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{35 - \mu}{\sigma}\right) = 0.4 \leftrightarrow \frac{35 - \mu}{\sigma} = 1.28 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\mu = 27.28916, \sigma = 6.0241$.

$$b. P(X > 30) = 0.5 - \Phi_0\left(\frac{30 - 27.28916}{6.0241}\right) = 0.5 - \Phi_0(0.45) = 0.3264.$$

c. Gọi t là thời gian sinh viên xuất phát trước giờ vào học.

$$P(X > t) < 0.03 \Leftrightarrow 0.5 - \Phi_0\left(\frac{t - 27.28916}{6.0241}\right) < 0.03 \Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{t - 27.28916}{6.0241}\right) > 0.47 = \Phi_0(1.88).$$

$$\rightarrow \frac{t - 27.28916}{6.0241} > 1.88 \rightarrow t > 38.61447.$$

Câu 8 (1.0đ). Số lỗi trên một trang sách là ĐLNN có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4
P	0.15	0.25	a	0.2	0.17

Giả sử số lỗi trên các trang sách độc lập với nhau. Tính xác suất để trung bình có hơn 2 lỗi trên 100 trang sách.

Giải: X_i : số lỗi trên trang sách thứ i , từ bảng phân bố xác suất ta có: $a = 0.23$.

$$\rightarrow EX_i = 1.99, DX_i = 1.7299.$$

Số lỗi trung bình trên 100 trang sách là ĐLNN $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ có phân bố chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$ với

$$\mu = E\bar{X} = 1.99, \sigma^2 = D\bar{X} = 1.7299/100.$$

$$\text{Do đó: } P(\bar{X} > 2) = 0.5 - \Phi_0\left(\frac{2 - 1.99}{\sqrt{1.7299/100}}\right) = 0.5 - \Phi_0(0.07603) = 0.4681.$$

Cho biết: $\Phi_0(0.07603) \approx 0.0319$, $\Phi_0(0.38) \approx 0.15$, $\Phi_0(0.45) \approx 0.1736$, $\Phi_0(1.28) \approx 0.4$.

$$\Phi_0(1.88) \approx 0.47. \text{ Trong đó: } \Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

----- Hết -----

Chú ý: Sinh viên không được sử dụng tài liệu.