Trường Đại học Công nghệ
Khoa CNTT
Bộ môn Khoa học và KTTT

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Mã học phần: INT3102 20
Số của đề thi: 01
Họ và tên SV:
Mã SV:

Năm học: 2022-2023
Ngày thi: 10/6/2023
Thời gian: 90 phút
Hệ: Đại học   Số TC: 03

- *Sinh viên được sử dụng vở ghi chép cá nhân và máy tính cầm tay.*
- *Trong các câu hỏi, ký hiệu "M" là chữ số cuối cùng của Mã SV (Ví dụ MSV là* 20020129 *thì M=9; nếu M=0 thì lấy M=1 để tính toán).*

Câu 1 (2,0 điểm):

Cho phương trình $f(x) = x^3 + 9x + 1 = 0$ (1)

a) Tìm khoảng phân ly nghiệm của phương trình (1).

b) Áp dụng phương pháp lặp đơn, tìm nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) với sai số $\Delta x \le 10^{-4}$.

Câu 2 (3,0 điểm): Cho bảng số

x	1,2	2,1	2,3	3,1
y	2,32	2,3	α	3,4

a) Sử dụng đa thức nội suy Lagrange, tìm α để đa thức nội suy có giá trị của đạo hàm $y'(2,2) \approx 3,2$

b) Với $\alpha = 3,1$: Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất tìm hàm $f(x) = A + B\sin(x) + C\cos(x)$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Câu 3 (2,0 điểm):

Cho bảng số:

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
f(x)	1,3	3,2	2,1	5,6	4,2	5,4	2,1	3,6	4,5

Sử dụng công thức Simpson, hãy tính gần đúng tích phân sau:

$$I = \int_{1,0}^{2,6} \left(2,5x^2 f(x) + 0,5x^2 + M\right) dx$$

Câu 4 (3,0 điểm):

a) Giải phương trình vi phân với điều kiện ban đầu bằng phương pháp Runghe-Kutta bậc 4: $y' = \frac{1-2xy}{1+x^2}$; $x \in [0;1]; y(0) = -2; h = 0,5$

b) Sử dụng kết quả phần a) và công thức nội suy Newton tiến để xây dựng đa thức nội suy bậc 2. Dùng đa thức nhận được ước lượng y(0,3); y(0,7). Sai số thực tế là bao nhiêu biết nghiệm đúng là $y = \frac{x-2}{1+x^2}$

--- Hết ---

ĐÁP ÁN KIỂM TRA CUỐI KỲ
ĐỀ SỐ 01

Câu 1: (2,0 điểm):

Cho phương trình $f(x) = x^3 + 9x + 1 = 0$ (1)

a) Tìm khoảng phân ly nghiệm của phương trình (1).

b) Áp dụng phương pháp lặp đơn, tìm nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) với sai số $\Delta x \le 10^{-4}$.

Giải

a) Ta có $f(x) = x^3 + 9x + 1 = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 9 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác, có:

$f(0) = 1; \quad f(-1) = -9 \Rightarrow f(0) f(-1) < 0$

Vậy phương trình f(x)=0 có 1 khoảng phân ly nghiệm là (-1;0).

(0,5 điểm)

b) Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{x^3+1}{9}$$

Đặt $\varphi(x) = -\frac{x^3+1}{9} \Rightarrow \left|\varphi'(x)\right| = \frac{x^2}{3} \le \frac{1}{3} \approx 0,3334 = q < 1 \quad \forall x \in [-1;0]$

Áp dụng phương pháp lặp đơn, ta có công thức lặp để tính toán như sau:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) = -\frac{x_{n-1}^3 + 1}{9}; \quad n = 1; 2; \ldots$$

Công thức đánh giá sai số: $\Delta x_n = \frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|; \quad n = 1; 2; \ldots$

(0,5 điểm)

Chọn $x_0 = -0.5$

Bảng tính kết quả và sai số:

n	x_n	$\varphi(x_n)$	Δx_n	**So sánh Δx_n với yêu cầu**
0	-0,5	$-0,097222$		
1	$-0,097222$	$-0,111009$	0,201449	$> 10^{-4}$
2	$-0,111009$	$-0,110959$	0,006896	$> 10^{-4}$
3	$-0,110959$		0,000025	$< 10^{-4}$

Kết luận: Nghiệm thực gần đúng cần tìm của phương trình là $x_3 \approx -0,110959$ với $\Delta x_3 = 0,25 * 10^{-4} < 10^{-4}$

(1,0 điểm).

Câu 2 (3,0 điểm):

Cho bảng số

x	1,2	2,1	2,3	3,1
y	**2,32**	**2,3**	α	**3,4**

a) Sử dụng đa thức nội suy Lagrange, tìm α để đa thức nội suy có giá trị của đạo hàm $y^{'}(2,2)\approx 3,2$

b) Với $\alpha = 3,1$: Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất tìm hàm $f(x) = A + B\sin(x) + C\cos(x)$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Giải

a) Đa thức nội suy Lagrange có dạng

$$P_3(x) = 2,32.\frac{(x-2,1)(x-2,3)(x-3,1)}{(1,2-2,1)(1,2-2,3)(1,2-3,1)} + 2,3.\frac{(x-1,2)(x-2,3)(x-3,1)}{(2,1-1,2)(2,1-2,3)(2,1-3,1)} +$$

$$+\alpha.\frac{(x-1,2)(x-2,1)(x-3,1)}{(2,3-1,2)(2,3-2,1)(2,3-3,1)} + 3,4.\frac{(x-1,2)(x-2,1)(x-2,3)}{(3,1-1,2)(3,1-2,1)(3,1-2,3)} = L_0 + L_1 + L_2 + L_3$$

(0,5 điểm)

Với

$$L_0 = 2,32.\frac{(x-2,1)(x-2,3)(x-3,1)}{(1,2-2,1)(1,2-2,3)(1,2-3,1)} \approx -1,2334(x-2,1)(x-2,3)(x-3,1)$$

$$L_1 = 2,3.\frac{(x-1,2)(x-2,3)(x-3,1)}{(2,1-1,2)(2,1-2,3)(2,1-3,1)} \approx 12,7778(x-1,2)(x-2,3)(x-3,1)$$

$$L_2 = \alpha.\frac{(x-1,2)(x-2,1)(x-3,1)}{(2,3-1,2)(2,3-2,1)(2,3-3,1)} \approx \frac{\alpha(x-1,2)(x-2,1)(x-3,1)}{-0,176}$$

$$L_3 = 3,4.\frac{(x-1,2)(x-2,1)(x-2,3)}{(3,1-1,2)(3,1-2,1)(3,1-2,3)} \approx 2,2368(x-1,2)(x-2,1)(x-2,3)$$

Tính đạo hàm cấp 1

$$P_3^{'}(x) \approx L_0^{'}(x) + L_1^{'}(x) + L(x)_2^{'} + L_3^{'}(x)$$

$$L_0^{'}(x) = -1,2334\left[(x-2,1)(x-2,3) + (x-2,3)(x-3,1) + (x-2,1)(x-3,1)\right]$$

$$L_0^{'}(2,2) = -1,2334\left[(2,2-2,1)(2,2-2,3) + (2,2-2,3)(2,2-3,1) + (2,2-2,1)(2,2-3,1)\right] =$$

$$= -1,2334[(0,1)(-0,1) + (-0,1)(-0,9) + (0,1)(-0,9)] \approx 0,0123$$

$$L_1^{'}(x) = 12,7778[(x-1,2)(x-2,3) + (x-1,2)(x-3,1) + (x-2,3)(x-3,1)]$$

$$L_1^{'}(2,2) = 12,7778[(2,2-1,2)(2,2-2,3) + (2,2-1,2)(2,2-3,1) + (2,2-2,3)(2,2-3,1)] \approx -11,6278$$

$$L_2^{'}(x) = -\frac{\alpha}{0,176}[(x-1,2)(x-2,1) + (x-2,1)(x-3,1) + (x-1,2)(x-3,1)]$$

$$L_2^{'}(2,2) = -\frac{\alpha}{0,176}[(2,2-1,2)(2,2-2,1) + (2,2-2,1)(2,2-3,1) + (2,2-1,2)(2,2-3,1)] = 5,0568\alpha$$

$$L_3^{'}(x) = 2,2368[(x-1,2)(x-2,1) + (x-1,2)(x-2,3) + (x-2,1)(x-2,3)]$$

$$L_3^{'}(2,2) = 2,2368[(2,2-1,2)(2,2-2,1) + (2,2-1,2)(2,2-2,3) + (2,2-2,1)(2,2-2,3)] = -0,0224$$

Ta có: $P_3^{'}(2,2) \approx L_0^{'}(2,2) + L_1^{'}(2,2) + L_2^{'}(2,2) + L_3^{'}(2,2) = 0,0123 - 11,6278 + 5,0568\alpha - 0,0224 =$

$= -11,6379 + 5,0568\alpha$

Để $P_3^{'}(2,2) \approx 3,2 \Leftrightarrow -11,6379 + 5,0568\alpha = 3,2 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{11,6379 + 3,2}{5,0568} \approx 2,9342$ **(1,0 điểm)**

b) Ta có bảng số

x	1,2	2,1	2,3	3,1
y	2,32	2,3	3,1	3,4

Chọn hệ hàm số: $\varphi_0(x)=1;\quad \varphi_1(x)=\sin(x);\quad \varphi_2(x)=\cos(x);$

Ta có bảng giá trị:

x_i	y_i	$\varphi_0(x_i)=1$	$\varphi_1(x_i)=\sin(x_i)$	$\varphi_2(x_i)=\cos(x_i)$
1,2	**2,32**	**1**	**0,9320**	**0,3624**
2,1	**2,3**	**1**	**0,8632**	**-0,5048**
2,3	**3,1**	**1**	**0,7457**	**-0,6663**
3,1	**3,4**	**1**	**0,0416**	**-0,9991**

Tọa độ của các vecto

Y=(2,32;2,3;3,1;3,4); $\varphi_0=(1;1;1;1)$

$\varphi_1=(0,9320;0,8632;0,7457;0,0416);\quad \varphi_2=(0,624;-0,5048;-0,6663;-0,9991)$

(0,5 điểm)

$f(x)=A+B\sin(x)+C\cos(x)=A\varphi_0(\mathrm{x})+B\varphi_1(\mathrm{x})+C\varphi_2(\mathrm{x})$

A, B, C là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} <\varphi_0,\varphi_0>A+<\varphi_0,\varphi_1>B+<\varphi_0,\varphi_2>C=<\varphi_0,\mathrm{Y}> \\ <\varphi_1,\varphi_0>A+<\varphi_1,\varphi_1>B+<\varphi_1,\varphi_2>C=<\varphi_1,\mathrm{Y}> \\ <\varphi_2,\varphi_0>A+<\varphi_2,\varphi_1>B+<\varphi_2,\varphi_2>C=<\varphi_2,\mathrm{Y}> \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A+2,5825B-1,5462C=11,12 \\ 2,5825A+2,171537B-0,3926C=6,60071 \\ -1,5462A-0,3926B+2,086356C=-5,17583 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A\approx 3,2426 \\ B\approx -0,8599 \\ C\approx -0,2395 \end{cases}$$

Vậy $f(x)\approx 3,2426-0,8599\sin(x)-0,2395\cos(x)$

(1,0 điểm)

Câu 3 (2,0 điểm):

Cho bảng số:

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
f(x)	1,3	3,2	2,1	5,6	4,2	5,4	2,1	3,6	4,5

Sử dụng công thức Simpson, hãy tính gần đúng tích phân sau:

$$I=\int_{1,0}^{2,6}\left(2,5x^2 f(x)+0,5x^2+M\right)dx$$

Giải

Đặt $g(x)=2,5x^2 f(x)+0,5x^2+M$, ta có:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	**1,0**	**1,2**	**1,4**	**1,6**	**1,8**	**2,0**	**2,2**	**2,4**	**2,6**
$f(x)$	**1,3**	**3,2**	**2,1**	**5,6**	**4,2**	**5,4**	**2,1**	**3,6**	**4,5**
$g(x)$	**3,75+M**	**12,24+M**	**11,27 +M**	**37,12 +M**	**35,64 +M**	**56 +M**	**27,83 +M**	**54,72 +M**	**79,43 +M**

(0,5 điểm)

Ta thấy $h = 0,2$ và $2n = 8 \Rightarrow n = 4$

Áp dụng công thức Simpson:

$$I = \int_{1,0}^{2,6} \left(2,5x^2 f(x) + 0,5x^2 + M\right)dx = \int_{1,0}^{2,6} g(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[\left(g_0 + g_8\right) + 4\left(g_1 + g_3 + g_5 + g_7\right) + 2(g_2 + g_4 + g_6)\right]$$

$$I \approx \frac{0,2}{3}\left[\left(3,75 + 79,43 + 2M\right) + 4\left(12,24 + 37,12 + 56 + 54,72 + 4M\right) + 2(11,27 + 35,64 + 27,83 + 3M)\right]$$

$$I \approx \frac{0,2}{3}\left[\left(83,05 + 2M\right) + 4\left(160,08 + 4M\right) + 2(74.74 + 3M)\right]$$

$$I \approx \frac{0,2}{3}(872,85 + 24M)$$

(1,0 điểm)

Bảng kết quả:

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	**59,79**	**61,39**	**62,99**	**64,59**	**66,19**	**67,79**	**69,39**	**70,99**	**72,59**

(0,5 điểm)

Câu 4 (3,0 điểm):

a) Giải phương trình vi phân với điều kiện ban đầu bằng phương pháp Runghe-Kutta bậc 4: $y' = \frac{1-2xy}{1+x^2}$; $x \in [0;1]; y(0) = -2; h = 0,5$

b) Sử dụng kết quả phần a) và công thức nội suy Newton tiến để xây dựng đa thức nội suy bậc 2. Dùng đa thức nhận được ước lượng y(0,3); y(0,7). Sai số thực tế là bao nhiêu biết nghiệm đúng là $y = \frac{x-2}{1+x^2}$

Giải:

a) Đặt $f(x, y) = \frac{1-2xy}{1+x^2}$

Công thức Runghe-Kutta bậc 4 như sau

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(\mathrm{k}_{1i}+2\,\mathrm{k}_{2i}+2\,\mathrm{k}_{3i}+\mathrm{k}_{4i});\mathrm{i}=0,1,...$$

$$\begin{cases} \mathrm{k}_{1i}=hf(x_i,y_i) \\ \mathrm{k}_{2i}=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_{1i}}{2}) \\ \mathrm{k}_{3i}=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_{2i}}{2}) \\ \mathrm{k}_{4i}=hf(x_i+h,y_i+\mathrm{k}_{3i}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{k}_{1i}=0,5.\frac{1-2x_iy_i}{1+x_i^2} \\ \mathrm{k}_{2i}=0,5.\frac{1-2(x_i+\frac{0,5}{2})(y_i+\frac{k_{1i}}{2})}{1+(x_i+\frac{0,5}{2})^2} \\ \mathrm{k}_{3i}=0,5.\frac{1-2(x_i+\frac{0,5}{2})(y_i+\frac{k_{2i}}{2})}{1+(x_i+\frac{0,5}{2})^2} \\ \mathrm{k}_{4i}=0,5.\frac{1-2(x_i+0,5)(y_i+\mathrm{k}_{3i})}{1+(x_i+0,5)^2} \end{cases}$$

(0,5 điểm)

Ta có bảng tính kết quả:

i	h	x_i	y_i	k_{1i}	k_{2i}	k_{3i}	k_{4i}	$\frac{1}{6}(\mathrm{k}_{1i}+2\,\mathrm{k}_{2i}+2\,\mathrm{k}_{3i}+\mathrm{k}_{4i})$
0	0,5	0	-2	0,5	0,882353	0,83737	0,865052	0,80075
1	0,5	0,5	-1,19925	0,87970	0,684512	0,731357	0,483947	0,699231
2	0,5	1,0	-0,50002	0,50001	0,31708	0,361697	0,217687	-

(1,0 điểm)

b) Công thức đa thức nội suy Newton tiến bậc 2 có dạng

$$P_2(\mathrm{x})=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

- Tính các sai phân, ta có:

$$\Delta y_0=y_1-y_0=-1,19925+2=0,80075;$$

$$\Delta^2 y_0=y_2-y_1=-0,50002+1,19925=0,69923$$

- Suy ra đa thức cần tìm là

$$P_2(\mathrm{x})=-2+\frac{0,80075}{0,5}(x-0)+\frac{0,69923}{2.(0,5)^2}(x-0)(x-0,5)=-2+1,6015\,\mathrm{x}+1,39846\,\mathrm{x}(\mathrm{x}-0,5)=$$
$$=1,39846\,\mathrm{x}^2+0,90227x-2$$

(0,5 điểm)

- Ước lượng giá trị hàm tại các điểm

$$\Rightarrow P_2(0,3)=1,39846.(0,3)^2+0,90227.0,3-2=-1,603458$$

$$P_2(0,7)=1,39846.(0,7)^2+0,90227.0,7-2=-0,683166$$

(0,5 điểm)

- Nghiệm đúng

$$y(0,3) = \frac{0,3-2}{1+(0,3)^2} = -1,55963$$

$$y(0,7) = \frac{0,7-2}{1+(0,7)^2} = -0.87248$$

- Sai số thực tế: $\left|y(0,3) - P_2(0,3)\right| \le 0,043828 < 0,05$

$\left|y(0,7) - P_2(0,7)\right| \le 0,189314 < 0,5$

(0,5 điểm)

- Nhận xét, nếu dùng công thức Newton tiến thì sai số của các giá trị gần cuối bảng cao hơn sai số của các giá trị gần đầu bảng.