Chương 2. **GIỚI HẠN** (Phần 2.1.)

2.1. Giới hạn của dãy số thực

Tự đọc {[1]. Chương 1 (1.3.)}

2.1.1. Dãy số hội tụ, các tính chất của dãy hội tụ

Một dãy số thực (hay dãy số) là một ánh xạ f: **N***→**R**. Ký hiệu $\{x_n\}$ với $n\in$**N*** là dãy số, khi đó $x_n = f(n)$ với $n\in$**N***.

Một dãy số có thể được cho bằng một trong hai cách: (1) Dưới dạng tường minh $x_n = f(n)$; (2) Dưới dạng truy hồi $x_{n+1} = f(x_n)$.

Ví dụ **2.1.1.1.** Các dãy số sau đây được cho dưới dạng tường minh

+ $\{x_n\}$: $x_n = f(n) = \frac{1}{n}$, tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = f(1) = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = f(2) = \frac{1}{2}$, $x_3 = f(3) = \frac{1}{3}$, …

+ $\{x_n\}$: $x_n = f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = f(1) = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$, $x_2 = f(2) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = f(3) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$, …

+ $\{x_n\}$: $x_n = f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, n = 2k-1 \\ \frac{n}{n+2}, n = 2k \end{cases}$ với $k\in$**N*** tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = f(1) = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = f(2) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$, $x_3 = f(3) = \frac{1}{3}$, $x_4 = f(4) = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$, …

Ví dụ **2.1.1.2.** Các dãy số sau đây được cho dưới dạng truy hồi

+ $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = f(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}} (n\geq 2) \end{cases}$ tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = 2$, $x_2 = f(x_1) = f(2) = \frac{2^2+2}{2.2} = \frac{3}{2}$,

$$x_3 = f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}{2.\frac{3}{2}} = \frac{17}{12}, \ldots$$

+$\{x_n\}$: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \\ x_n = \sqrt{ax_{n-1}} (n\geq 2) \end{cases}$ với a > 0, tức là $\{x_n\}$ có $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{ax_1} = \sqrt{a\sqrt{a}}$,

$$x_3 = \sqrt{ax_2} = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}, \ldots, x_n = \sqrt{ax_{n-1}} = \underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}_{n} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2^2}}\ldots a^{\frac{1}{2^n}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

Định nghĩa. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy số hội tụ, nếu $\exists a\in$**R** sao cho với $\forall\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in$**N*** sao cho với $\forall n \geq n_0$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$.

Khi đó ta nói dãy số $\{x_n\}$ hội tụ đến a, hoặc a là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ và viết $x_n \to a$ khi $n\to\infty$ hoặc $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Vì $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, nên ta còn có thể phát biểu khái niệm dãy số hội tụ như sau: Dãy số $\{x_n\}$ hội tụ đến a nếu $\forall\varepsilon$ - lân cận của a đều chứa mọi phần tử của dãy số, trừ một số hữu hạn phần tử đầu dãy.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là phân kỳ nếu nó không hội tụ.

Ví dụ **2.1.1.3.** Dùng định nghĩa để chứng minh dãy số $\{x_n\}$: $x_n = f(n) = \frac{1}{n}$ hội tụ đến a = 0

Ta có $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|$. Giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, khi đó $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ và do đó nếu ta lấy $n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ thì với $\forall n \geq n_0$ ta có $|x_n - 0| < \varepsilon$, điều này có nghĩa là $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (đpcm).

2.1.2. Các tính chất của dãy số hội tụ

(1) Nếu một dãy số hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất

(2) Nếu một dãy số hội tụ thì nó giới nội, tức là tồn tại một khoảng (b,c) chứa mọi phần tử của dãy số.

(3) Giả sử hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy số hội tụ, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Khi đó

(3.1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y$

(3.2) $\lim_{n\to\infty}(Cx_n) = C\lim_{n\to\infty} x_n = Cx$ với C là hằng số

(3.3) $\lim_{n\to\infty}(C + x_n) = C + \lim_{n\to\infty} x_n = C + x$ với C là hằng số

(3.4) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = xy$

(3.5) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{1}{y}$ với $y_n \neq 0$ và $y \neq 0$

(3.6) $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{x}{y}$ với $y_n \neq 0$ và $y \neq 0$

(4) Giả sử hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy số hội tụ, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Khi đó, nếu $x_n \geq y_n$ với $\forall n$ thì $a \geq b$.

(5) Nguyên lý kẹp. Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$. Khi đó nếu hai dãy số $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ hội tụ đến cùng một giới hạn a, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$ và $x_n \leq y_n \leq z_n$ với $\forall n$ thì dãy số $\{y_n\}$ cũng hội tụ đến giới hạn a, tức là $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Chứng minh

(1) Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ và giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước. Khi đó, theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbf{N^*}$ và $\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbf{N^*}$ sao cho, với $\forall n \geq n_1$ thì $|x_n - a| < \varepsilon/2$ và với $\forall n \geq n_2$ thì $|x_n - b| < \varepsilon/2$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$, với $n \geq n_0$ thì cả hai bất đẳng thức trên đồng thời thỏa mãn, do đó $|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| = |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Bất đẳng thức này đúng với mọi ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước nên $|a - b| = 0 \Rightarrow a = b$ (đpcm).

(2) Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, khi đó $\exists n_0 \in \mathbf{N^*}$ sao cho với $\forall n \geq n_0$ thì $|x_n - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x_n < a + 1$. Nếu đặt $b = \min\{a - 1, x_1, x_2, ..., x_{n_0 - 1}, a + 1\}$, $c = \max\{a - 1, x_1, x_2, ..., x_{n_0 - 1}, a + 1\} \Rightarrow b < x_n < c$ (đpcm).

(3) Giả sử hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy số hội tụ, tức là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

(3.1) Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)\in$ **N*** và $\exists n_2 = n_2(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho, với $\forall n \ge n_1$ thì $|x_n - x| < \varepsilon/2$ và với $\forall n \ge n_2$ thì $|x_n - y| < \varepsilon/2$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1,n_2)$, với $\forall n \ge n_0$ thì cả hai bất đẳng thức trên đồng thời thỏa mãn, do đó $|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ (đpcm).

(3.2) Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho, với $\forall n \ge n_0$ thì $|x_n - x| < \varepsilon/|C|$.

Do đó $|Cx_n - Cx| = |C(x_n - x)| = |C||x_n - x| < |C|\frac{\varepsilon}{|C|} = \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} Cx_n = Cx$ (đpcm).

(3.3)Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho, với $\forall n \ge n_0$ thì $|x_n - x| < \varepsilon$.

Do đó $|(C + x_n) - (C + x)| = |C + x_n - C - x| = |x_n - x| < \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim_{n\to\infty}(C + x_n) = C + x$ (đpcm).

(3.4) Theo tính chất (1), các dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ hội tụ nên chúng giới nội, do đó $\exists M > 0$ sao cho $|x_n| \le M$, $|y_n| \le M$ với $\forall n \Rightarrow |x| \le M$

Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)\in$ **N*** và $\exists n_2 = n_2(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho, với $\forall n \ge n_1$ thì $|x_n - x| < \varepsilon/2M$ và với $\forall n \ge n_2$ thì $|y_n - y| < \varepsilon/2M$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1,n_2)$, với $\forall n \ge n_0$ thì cả hai bất đẳng thức trên đồng thời thỏa mãn, do đó

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - xy_n + xy_n - xy| = |(x_n y_n - xy_n) + (xy_n - xy)| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \le$$

$|(x_n - x)y_n| + |x(y_n - y)| = |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| \le \frac{\varepsilon}{2M}M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$ (đpcm).

(3.5) Vì $\lim_{n\to\infty} y_n = y \ne 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|y_n| = |y| > 0$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước $\exists n_1 = n_1(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho với $\forall n \ge n_1$ thì $|y_n| > |y|/2 \Rightarrow \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y_n y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n||y|} < \frac{2|y_n - y|}{y^2}$. Đồng thời $\exists n_2 = n_2(\varepsilon)\in$ **N*** sao cho với $\forall n \ge n_2$ thì $|y_n - y| < \frac{\varepsilon y^2}{2}$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1,n_2)$, với $\forall n \ge n_0$ thì cả hai bất đẳng thức trên đồng thời thỏa mãn, do đó $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| < \frac{2|y_n - y|}{y^2} < \frac{2}{y^2}.\frac{\varepsilon y^2}{2} = \varepsilon$ với $\forall n \ge n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$ (đpcm).

(3.6) Tính chất này là hệ quả của các tính chất (3.4) và (3.5). Thật vậy, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n.\frac{1}{y_n}(3.4) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}(3.5) = x.\frac{1}{y} = \frac{x}{y}$ (đpcm).

(4) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại a < b, khi đó ∃r sao cho a < r < b. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ và a < r nên $\exists n_1 \in$ **N*** sao cho với $\forall n \geq n_1$ thì $x_n < r$, cũng vì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ và r < b nên $\exists n_2 \in$ **N*** sao cho với $\forall n \geq n_2$ thì $r < y_n$. Do đó nếu đặt $n_0 = \max(n_1,n_2)$ thì với $\forall n \geq n_0$ ta được $x_n < r < y_n$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_n \geq y_n$. Như vậy, với các giả thiết đã cho thì suy ra a ≥ b (đpcm).

(5) Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$. Khi đó nếu hai dãy số $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ hội tụ đến cùng một giới hạn a, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ và $x_n \leq y_n \leq z_n$ với ∀n thì dãy số $\{y_n\}$ cũng hội tụ đến giới hạn a, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ nên giả sử ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước, thì theo định nghĩa dãy số hội tụ, $\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in$ **N*** và $\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in$ **N*** sao cho, với $\forall n \geq n_1$ thì $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon - a < x_n < \varepsilon + a$ và với $\forall n \geq n_2$ thì $|z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon - a < z_n < \varepsilon + a$.

Nếu đặt $n_0 = \max(n_1,n_2)$, với $\forall n \geq n_0$ thì các bất đẳng thức $\varepsilon - a < x_n < \varepsilon + a$, $\varepsilon - a < z_n < \varepsilon + a$ đồng thời thỏa mãn, do đó $\varepsilon - a < x_n \leq y_n \leq z_n < \varepsilon + a$ với $\forall n \geq n_0 \Leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ (đpcm).

2.1.3. Sự hội tụ của dãy đơn điệu

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là tăng nếu $x_n \leq x_{n+1}$ với ∀n, là giảm nếu $x_n \geq x_{n+1}$ với ∀n. Dãy số tăng hay dãy số giảm được gọi là dãy số đơn điệu.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu ∃c∈**R** mà $x_n \leq c$ với ∀n, bị chặn dưới nếu ∃d∈**R** mà $x_n \geq d$ với ∀n. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn nếu nó là dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

Nhận xét: Dãy số tăng bị chặn dưới bởi phần tử thứ nhất của nó và dãy số giảm bị chặn trên bởi phần tử thứ nhất của nó.

Ví dụ **2.1.3.1.**

(a) Dãy số $\{x_n\}$ với $x_n = 1/n$ (n∈**N***) là dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi số 0 và bị chặn trên bởi số 1.

(b) Dãy số $\{x_n\}$ với $x_n = (-1)^n$ (n∈**N**) là dãy không đơn điệu, bị chặn dưới bởi số -1 và bị chặn trên bởi số 1.

(c) Dãy số $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$ (n∈**N**) là dãy đơn điệu tăng, bị chặn dưới bởi số 0 và không bị chặn trên.

Định lý (*Sự hội tụ của dãy đơn điệu*). Dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ. Nói cách khác (1) Dãy số đơn điệu tăng và bị chặn trên thì hội tụ; (2) Dãy số đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Chứng minh

(1) Giả sử dãy số $\{x_n\}$ là dãy số tăng và bị chặn trên, ta chứng minh nó hội tụ. Thật vậy, vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên, nên theo tiên đề về cận trên đúng thì $\exists l = \sup\{x_n, n \in$ **N***$\}$, tức là $x_n \leq l$ với ∀n. Khi đó với ε > 0 là một số bé tùy ý cho trước thì l - ε không phải là cận trên đúng của $\{x_n\}$, do đó $\exists n_0 \in$ **N*** sao cho $x_{n_0} > l - \varepsilon$. Mặt khác, vì $\{x_n\}$ là dãy số tăng nên $x_{n_0} \leq x_n$ với $\forall n \geq n_0$. Từ ba bất đẳng thức trên ta được $1 - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l \Rightarrow 1 - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - l| < \varepsilon$ với $\forall n \geq n_0$, nên theo định nghĩa dãy số hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ tức là dãy số $\{x_n\}$ hội tụ (đpcm).

(2) Chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ **2.1.3.2.** Chứng minh dãy số $\{x_n\}$: $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ hội tụ.

Ta có $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3} + ... +$

$$+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.\frac{1}{n^k} + ... + \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{n!}.\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + ... +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Tương tự $x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + ... +$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

So sánh x_n và x_{n+1} trong hai khai triển trên ta thấy khai triển của x_{n+1} nhiều hơn khai triển của x_n một số hạng, đồng thời từ số hạng thứ ba của mỗi khai triển trở đi thì $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}$ nên các số hạng của x_n nhỏ hơn số hạng tương ứng của x_{n+1}, do đó $x_{n+1} > x_n$ với $\forall n$, suy ra dãy số $\{x_n\}$ là dãy số đơn điệu tăng và bị chặn dưới bởi $x_1 = 2$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh dãy số này bị chặn trên bởi số 3. Thật vậy, ở trên đã có khai triển

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + ... +$$

$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ và nếu đặt $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$ thì dễ thấy rằng $x_n < y_n$, hơn nữa ta thấy $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} < \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{n!} = \frac{1}{2.3...n} < \frac{1}{2.2...2} = \frac{1}{2^{n-1}}$ nên suy ra

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 2 + 1 = 3 \Rightarrow x_n < 3.$$

Vậy dãy số $\{x_n\}$: $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ là dãy số tăng và bị chặn trên, nên nó hội tụ, nếu ký hiệu e là giới hạn của dãy số này thì ta có thể viết $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Ví dụ **2.1.3.3.** Cho a > 0, chứng minh dãy số $\begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \\ x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} \, (n \geq 2) \end{cases}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Dễ thấy rằng dãy số đã cho là dãy số tăng và bị chặn dưới bởi $x_1 = \sqrt{a} > 0$

Ta sẽ chứng minh dãy số đã cho là bị chặn bằng phương pháp quy nạp toán học.

- Khi n = 1 ta có $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1$
- Khi n = 2 ta có $x_2 = \sqrt{a + x_1} = \sqrt{a + \sqrt{a}} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + 1\right)^2} = \sqrt{a} + 1$
- Giả sử $x_n < \sqrt{a} + 1$ là đúng
- Ta phải chứng minh $x_{n+1} < \sqrt{a} + 1$, thật vậy $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{a} + 1\right)^2} = \sqrt{a} + 1$ (đpcm).

Như vậy, theo định lý về sự hội tụ của dãy đơn điệu, dãy số đã cho hội tụ, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ nào đấy mà $0 < x < \sqrt{a} + 1$.

Để tìm giá trị x ta xét đẳng thức

$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a + x_n} = \sqrt{a + \lim\limits_{n\to\infty} x_n}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{a + x} \Leftrightarrow x^2 = a + x \Leftrightarrow x^2 - x - a = 0$, phương trình bậc hai này có hai nghiệm phân biệt là $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$, vì x > 0 nên giới hạn cần tìm là $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Ví dụ **2.1.3.4.** Tìm giới hạn của dãy số $x_n = \dfrac{[nx]}{n}$ với $n \in$ **N***, trong đó $[\alpha]$ là hàm phần nguyên.

Ta đã biết $0 \le \{\alpha\} < 1$ hay $0 \le \alpha - [\alpha] < 1 \Leftrightarrow -1 < [\alpha] - \alpha \le 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 < [\alpha] \le \alpha$, do đó

$nx - 1 < [nx] \le nx \Rightarrow \dfrac{nx - 1}{n} < \dfrac{[nx]}{n} \le \dfrac{nx}{n} \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{n} < \dfrac{[nx]}{n} \le x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(x - \dfrac{1}{n}\right) < \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[nx]}{n} \le x$,

vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x - \dfrac{1}{n}\right) = x - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = x - 0 = x$ do $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[nx]}{n} = x$.

Ví dụ **2.1.3.5.** Tìm giới hạn của các dãy số sau

$x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$, $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ và $z_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$

và $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$

Mặt khác

$y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = x_n$

và $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = z_n$

Suy ra $x_n < y_n < z_n$ với $\forall n$, và vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

2.1.4. Giới thiệu tiêu chuẩn Cauchy, giới hạn vô hạn

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy nếu với $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in$ **N*** sao cho khi với $m \ge n_0$ và $n \ge n_0$ thì $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Định lý (*Tiêu chuẩn Cauchy*). Dãy số $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là vô cùng bé (VCB) nếu với $\forall\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N^*}$ sao cho khi $n \geq n_0$ thì $|x_n| < \varepsilon$ và viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) nếu với $\forall A > 0$ lớn tùy ý cho trước, $\exists n_0=n_0(A)\in\mathbf{N^*}$ sao cho khi $n \geq n_0$ thì $|x_n| > A$ và viết $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = +\infty$, khi đó ta nói dãy $\{x_n\}$ có *giới hạn vô hạn*.

Nhận xét:

- Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ thì dãy $\{x_n - 1\}$ là một VCB.
- Nghịch đảo của một VCB là một VCL và ngược lại, nghịch đảo của một VCL là một VCB.

Chú ý. Ta công nhận một số giới hạn sau, để sử dụng:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$ với $a > 1$ (khi $n\to\infty$, a^n tăng nhanh hơn n^k)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$ với $a > 0$ (khi $n\to\infty$, $n!$ tăng nhanh hơn a^n)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$ (khi $n\to\infty$, n^n tăng nhanh hơn $n!$)

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n} = 0$ với $a > 1$ (khi $n\to\infty$, n tăng nhanh hơn $\log_a n$)

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ với $|q| < 1$

Bài tập

2.1. Chứng minh rằng, dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

2.2. Dùng định nghĩa giới hạn của dãy số để chứng minh các dãy số sau, hội tụ đến giới hạn tương ứng

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+2} = 2$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!} = 0$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ với $|q| < 1$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$

HD: (b) Để ý rằng $\dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{1.2.3...n} \leq \dfrac{1}{1.2.2...2} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. (c) Biểu diễn $\dfrac{1}{|q|^n} = \left(1 + \dfrac{1-|q|}{|q|}\right)^n$ và khai triển vế phải theo Nhị thức Newton. (d) Biểu diễn $n = \left[1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right]^n$ và khai triển vế phải theo Nhị thức Newton. (e) Xét 3 trường hợp ($a = 1$, $a > 1$ và $0 < a < 1$); đối với trường hợp $a > 1$, biểu diễn $a = \left[1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right]^n$ và khai triển vế phải theo Nhị thức Newton; đối với trường hợp $0 < a < 1$, để ý rằng $\dfrac{1}{a} > 1$ và áp dụng kết quả của trường hợp $a > 1$.

2.3. Tìm giới hạn của các dãy số sau

(a) $x_n = \sqrt{n^2 - n} - n$; (b) $x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$; (c) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$;

(d) $\begin{cases} x_1 = \sqrt{a}, (a > 0) \\ x_n = \sqrt{ax_{n-1}}, (n \geq 2) \end{cases}$; (e) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}}, (n \geq 2) \end{cases}$; (f) $x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} a^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} b^k}, (|a| < 1, |b| < 1)$;

(g) $x_n = \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[k^2 x\right]$ trong đó $[\alpha]$ là hàm phần nguyên

HD: (d) Cách 1. Để ý rằng $x_n = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}$, cách 2. Xét 3 trường hợp 0 < a < 1 (chứng minh $\{x_n\}$ là dãy số giảm), a = 1, a > 1 (chứng minh $\{x_n\}$ là dãy số tăng) và sử dụng định lý về "Sự hội tụ của dãy đơn điệu"; (e) Chứng minh $\{x_n\}$ là dãy số giảm và bị chặn dưới ; (g) Đầu tiên hãy chứng minh $\alpha - 1 < [\alpha] \le \alpha$ và sử dụng tổng đã biết $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.4. Tìm các giới hạn

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} S_n^{(m)}$ ($m\in$**N***) với $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)...(k+m-1)$ là tổng đã tính ở Ví dụ 0.3.6.

(b) $\lim_{n\to\infty} S_n^{(m)}$ ($m\in$**N***) với $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)...(k+m)}$ là tổng đã tính ở Bài tập 0.12.

2.5. Tìm các giới hạn $\lim_{n\to\infty} P_n$ với

(a) $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$; (b) $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$; (c) $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i}\right)$; (d) $P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

HD: (a) Đặt $u_k = 1-\frac{1}{(k+1)^2}$ và để ý rằng $u_k = \frac{k}{k+1}.\frac{k+2}{k+1}$, (b) Đặt $u_k = 1-\frac{1}{k^2}$ và để ý rằng $u_k = \frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$, (c) Đặt $u_k = 1-\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} i}$ và để ý rằng $u_k = \frac{k-1}{k}.\frac{k+2}{k+1}$, (d) Đặt $u_k = \frac{k^3-1}{k^3+1}$ và để ý rằng $u_k = \frac{k-1}{k+1}.\frac{k^2+k+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}$

2.6. Tìm các giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n$ với

(a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{2k^2}$

(b) $S_n(a_1, d) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ trong đó $\{a_n\}$ là cấp số cộng có $a_1 \neq 0$ và công sai $d \neq 0$

(c) $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^{\left[\frac{k}{2}\right]} y^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}$ với $|xy| < 1$

HD: (a) Tổng đã tính ở Bài tập 0.11.(a); (b) Tổng đã tính ở Bài tập 0.14.; (c) Trước hết, hãy chứng minh $\left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right]$ khi k chẵn và $\left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ khi k lẻ.

2.7. (a) Tính tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} kq^{k-1}$ với $\forall q\in$**R,** (b) Tìm $\lim_{n\to\infty} S_n$ với $|q| < 1$.

HD: (a) Tính $S_n - qS_n$, (b) Sử dụng giới hạn $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$ với $|q| < 1$.