Chương 2. **GIỚI HẠN** (Phần 2.2.)

2.2. Giới hạn của hàm số một biến

2.2.1. Định nghĩa giới hạn hàm số, các tính chất của giới hạn

Tự đọc {[1]. Chương 3 (3.1., 3.2.)}

Xét hàm số thực y = f(x) với D(f)∈**R** và R(f)∈**R** tức là ánh xạ f: D(f)→R(f), trong trường hợp tổng quát nhất thì D(f) = R(f) = **R**, tương ứng với ánh xạ f: **R**→**R**, khi đó đối số x và giá trị hàm số f(x) tương ứng có thể nhận các giá trị {-∞, <một số hữu hạn>, +∞}. Như vậy, có nhiều nhất 9 định nghĩa về giới hạn của hàm số f(x) tương ứng với 9 trường hợp sau đây:

x \ f(x)	-∞	L (hữu hạn)	+∞
-∞	1	2	3
x_0 (hữu hạn)	4	**5**	6
+∞	7	8	9

Một cách tự nhiên, trường hợp 5 được xét đầu tiên.

Định nghĩa. (Trường hợp 5) Cho hàm số f(x) với D(f) = (a,b) (a, b là các số hữu hạn), số hữu hạn L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) tại x_o (x_0∈[a,b] là một số hữu hạn) và viết là $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, nếu với ∀ε > 0 cho trước bé tùy ý, mà tìm được số δ = δ(ε) > 0 sao cho khi $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ví dụ **2.2.1.1.**

(a) Cho hàm số f(x) = x (f: **R**→**R**). Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$ với x_0 là một số hữu hạn.

Ta thấy D(f) = **R** nên x_0∈D(f). Giả sử cho trước ε > 0 bé tùy ý, nếu chọn δ = δ(ε) = ε thì $|x - x_0| < \delta$ đồng thời với $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$ suy ra theo định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$.

(b) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

Ta thấy D(f) = **R**\{2} tức là điểm x_0 = 2∉D(f). Giả sử cho trước số ε > 0 bé tùy ý, ta phải tìm số δ = δ(ε) > 0 sao cho khi $|x - 2| < \delta$ thì $\left|\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon$. Thật vậy, ta có $\left|\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} - 5\right| = \left|\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}\right| = \left|\dfrac{(x-2)^2}{x - 2}\right| = |x - 2| < \varepsilon$, khi đó ta lấy δ = δ(ε) = ε thì $|x - 2| < \delta$. Theo định nghĩa thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$.

(c) Cho hàm số $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Ta thấy D(f) = **R**\{0} tức là điểm x_0 = 0∉D(f). Giả sử cho trước số ε > 0 bé tùy ý, ta phải tìm số δ = δ(ε) > 0 sao cho khi $|x - 0| < \delta$ thì $|f(x) - 0| = \left|x\sin\dfrac{1}{x} - 0\right| = \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Thật vậy, ta có $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x|.1 = |x|$ vì $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1$ với ∀x∈D(f). Từ đó, nếu |x - 0| = |x| < δ ≤ ε thì suy ra

$\left|f(x)-0\right| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, nghĩa là ta có thể lấy δ = δ(ε) < ε. Theo định nghĩa thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Định nghĩa. (Trường hợp 2) Cho hàm số f(x) với D(f) = (-∞,b) (b có thể là số hữu hạn hoặc là +∞), số hữu hạn L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) tại điểm âm vô cùng (-∞) và viết là $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$, nếu với ∀ε > 0 cho trước bé tùy ý, mà tìm được số N < 0 có |N| đủ lớn sao cho khi x < N thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Định nghĩa. (Trường hợp 8) Cho hàm số f(x) với D(f) = (a,+∞) (a có thể là -∞ hoặc là số hữu hạn), số hữu hạn L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) tại điểm dương vô cùng (+∞) và viết là $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$, nếu với ∀ε > 0 cho trước bé tùy ý, mà tìm được số N > 0 đủ lớn sao cho khi x > N thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nhận xét. Hai định nghĩa trên có thể viết chung như sau: Cho hàm số f(x) với D(f) = (a,b) (a có thể là -∞ hoặc là số hữu hạn, b có thể là số hữu hạn hoặc là có thể là +∞, a và b không đồng thời hữu hạn), số hữu hạn L được gọi là giới hạn của hàm số f(x) tại điểm vô cùng (∞) và viết là $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$, nếu với ∀ε > 0 cho trước bé tùy ý, mà tìm được số N > 0 đủ lớn sao cho khi |x| > N thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ví dụ **2.2.1.2.** Cho hàm số $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

Ta thấy D(f) = **R**\{0}. Giả sử cho trước ε > 0 bé tùy ý, ta thấy $\left|f(x)-2\right| = \left|\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$ nên nếu ta lấy N < 0 mà |N| đủ lớn thì $\left|f(x)-2\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Muốn vậy, ta chỉ cần lấy N sao cho $|N| > \frac{1}{\varepsilon}$ là được. Khi đó, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$. Tương tự, ta chỉ cần lấy N sao cho $N > \frac{1}{\varepsilon}$ thì chứng minh được $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

Coi như bài tập, sinh viên tự định nghĩa 6 trường hợp còn lại.

Các tính chất của giới hạn

Từ đây trở đi, khi viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ nếu không viết gì thêm thì ta hiểu rằng L là một số hữu hạn, còn a có thể là số hữu hạn hoặc ±∞.

Cho $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_2$. Khi đó

(1) $\lim\limits_{x\to a} Cf_1(x) = C\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = CL_1$ với C là hằng số

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_1 + L_2$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)f_2(x)\right] = \left[\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\right] = L_1L_2$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ với $L_2 \neq 0$

(5) Giả sử ba hàm số f(x), g(x), h(x) thỏa mãn f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) với x∈(a,b). Khi đó với x_0∈[a,b] mà $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.

(6) Cho f(x) là hàm số tăng (giảm) trên **R**; khi đó, nếu f(x) bị chặn trên (chặn dưới) nghĩa là ∃M sao cho f(x) ≤ M (∃N sao cho f(x) ≥ N) với ∀x∈**R** thì ∃ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L\right)$.

Chứng minh tương tự như chứng minh các tính chất của dãy hội tụ.

Ví dụ **2.2.1.3.** Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ và $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

- Chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Thật vậy, với ∀x > 0 bao giờ cũng ∃n∈**N** sao cho n ≤ x < n+1, suy ra $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$. Vì $1+\frac{1}{n+1} > 1, 1+\frac{1}{x} > 1, 1+\frac{1}{n} > 1$ và n ≤ x < n+1 nên $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Mặt khác, khi x→+∞ thì n → +∞ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} < \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}} = \dfrac{e}{1+0} = e \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n . \left(1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right) = e(1+0) = e \end{cases}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (đpcm).

- *Việc chứng minh* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ *và* $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ *coi như bài tập.*

Nếu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ (L là số hữu hạn) thì viết ghép $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. Chẳng hạn, ta viết $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ chung cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Ví dụ **2.2.1.4.** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2}\right)$

Đặt t = x^2 suy ra khi x→±∞ thì t→+∞, do đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2}\right) =$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}} - \sqrt{t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}} - \sqrt{t}\right)\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}} + \sqrt{t}\right)}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}} + \sqrt{t}} =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}} + \sqrt{t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}} + 1} = \frac{\sqrt{1+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{1+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{1+\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}}} + 1} =$$

$$\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0.\sqrt{1+0}}+1}=\frac{1}{2} \text{ vì } \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}=0.$$

2.2.2. Giới hạn một phía, giới hạn vô cùng

Khi $x\to x_0$ có hai khả năng: Hoặc $x\to x_0$ từ phía trái x_0, được viết là $x\to x_0-0$, hoặc $x\to x_0$ từ phía phải x_0, được viết là $x\to x_0+0$. Khi đó, nếu tồn tại các giới hạn $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ thì ta nói rằng đó là các *giới hạn một phía*, giới hạn trái (nếu $\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x)$) và giới hạn phải (nếu $\exists \lim_{x\to x_0+0} f(x)$)

Người ta đã chứng minh được rằng $\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=L$ (L là số hữu hạn).

Nếu $f(x)\to-\infty$ hoặc $f(x)\to+\infty$ khi $x\to x_0$ (x_0 có thể hữu hạn, hoặc là $-\infty$, hoặc là $+\infty$) thì ta nói hàm f(x) có *giới hạn vô cùng* (sáu trường hợp còn lại: 1, 3, 4, 6, 7, 9) và viết là $f(x)\to\infty$ khi $x\to x_0$ $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\right)$.

Ví dụ **2.2.2.1.** Tìm các giới hạn trái và phải của hàm $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$ khi $x\to3$. Có tồn tại giới hạn $\lim_{x\to3} f(x)$ không?

- Nếu $x\to3-0$ thì $\dfrac{1}{x-3}\to-\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-3}}\to0$ do đó $\lim_{x\to3-0}\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\dfrac{1}{3+0}=\dfrac{1}{3}$

- Nếu $x\to3+0$ thì $\dfrac{1}{x-3}\to+\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-3}}\to+\infty$ do đó $\lim_{x\to3+0}\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\dfrac{1}{3+\infty}=0$

- Không tồn tại giới hạn $\lim_{x\to3} f(x)$ vì $\lim_{x\to3-0} f(x)\neq \lim_{x\to3+0} f(x)$.

2.2.3. Khái niệm vô cùng bé và vô cùng lớn

Hàm số f(x) được gọi là một *vô cùng bé* (VCB) khi $x\to x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, hàm số f(x) được gọi là một *vô cùng lớn* (VCL) khi $x\to x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ với x_0 có thể hữu hạn, hoặc là $-\infty$, hoặc là $+\infty$).

Nhận xét:

- Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ thì hàm số f(x) – L là một VCB khi $x\to x_0$.

- Nghịch đảo của một VCB là một VCL và ngược lại, nghịch đảo của một VCL là một VCB, tức là, nếu f(x) là một VCB khi $x\to x_0$ thì $\dfrac{1}{f(x)}$ là một VCL khi $x\to x_0$ và ngược lại, nếu f(x) là một VCL khi $x\to x_0$ thì $\dfrac{1}{f(x)}$ là một VCB khi $x\to x_0$.

2.2.4. Các dạng vô định

Các tính chất của giới hạn của hàm số ở trên chỉ đúng khi giới hạn L_1, L_2 tương ứng của các hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$ là hữu hạn, tuy nhiên, trong thực tế, các hàm này có thể là VCB hoặc VCL, do đó ta cần phải nghiên cứu chi tiết các trường hợp này.

Từ tính chất (2) - phép cộng hai biểu thức, mỗi biểu thức có thể nhận các giá trị ($-\infty$, 0, $+\infty$), được viết theo cột thứ nhất và hàng thứ nhất, ta được

+	-∞	0	+∞	
-∞	-∞	-∞	?	$\Rightarrow$ dạng vô định $\infty - \infty$
0	-∞	0	+∞	
+∞	?	+∞	+∞	

Từ tính chất (3) - phép nhân hai biểu thức, mỗi biểu thức có thể nhận các giá trị (-∞, 0, +∞), được viết theo cột thứ nhất và hàng thứ nhất, ta được

×	-∞	0	+∞	
-∞	+∞	?	-∞	$\Rightarrow$ dạng vô định $0.\infty$
0	?	0	?	
+∞	-∞	?	+∞	

Từ tính chất (4) - phép chia hai biểu thức, mỗi biểu thức có thể nhận các giá trị (-∞, 0, +∞) được viết theo cột thứ nhất và hàng thứ nhất, ta được

/	-∞	0	+∞	
-∞	?	?	?	$\Rightarrow$ hai dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$
0	?	?	?	
+∞	?	?	?	

Chú ý **2.2.1.** Các bài toán tìm giới hạn chủ yếu là việc khử các dạng vô định.

Để khử dạng vô định $\infty - \infty$ khi tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$, trong đó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, nói chung, ta có thể biến đổi hiệu f(x) – g(x) thành tích $f(x) - g(x) = f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$ hoặc $f(x) - g(x) = g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right]$ hoặc $f(x) - g(x) = f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$. Đối với các dạng mới này, có nhiều khả năng dễ tính giới hạn hơn.

Để khử dạng vô định $0.\infty$ khi tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$, trong đó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ ta có thể biến đổi tích f(x)g(x) thành $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$ (dạng $\frac{0}{0}$) hoặc $f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$). Đối với các dạng mới này, có nhiều khả năng dễ tính giới hạn hơn.

Chú ý **2.2.2.** Việc sử dụng định nghĩa khi tìm giới hạn, nói chung là bài toán khó, do đó chủ yếu là biến đổi biểu thức cần tìm về các dạng giới hạn cơ bản đã biết và áp dụng.

Các giới hạn cơ bản

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $(0 < a \neq 1)$ đặc biệt, khi a = e ta được $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(0 < a \neq 1)$ đặc biệt, khi a = e ta được $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a$

Chú ý **2.2.3.** Bằng cách đổi biến, các giới hạn cơ bản trên có thể được sử dụng dưới dạng

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1,\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1$$

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e,\ \lim_{f(x)\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\log_a[1+f(x)]}{f(x)}=\frac{1}{\ln a}\ (0<a\neq 1),\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{\ln[1+f(x)]}{f(x)}=1$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a\ (0<a\neq 1),\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{[1+f(x)]^a-1}{f(x)}=a$$

Chú ý **2.2.4.** Ngoài các giới hạn cơ bản trên, ta công nhận một số giới hạn sau, để sử dụng:

$$\lim_{x\to 0}a^x=1\,(0<a\neq 1),\ \lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty\,(a>1),\ \lim_{x\to-\infty}a^x=0\,(a>1)$$

$$\lim_{x\to 0+0}x^k\log_a x=0 \text{ với } a>1,\ k>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0 \text{ với } a>1,\ k>0 \text{ (khi } x\to+\infty\text{, hàm } x^k \text{ tăng nhanh hơn hàm } \log_a x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0 \text{ với } a>1 \text{ (khi } x\to+\infty\text{, hàm } a^x \text{ tăng nhanh hơn hàm } x^k)$$

Ví dụ **2.2.4.1.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ dạng vô định $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$ dạng vô định $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$ dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\frac{4}{\sqrt{1+4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}+1}=\frac{4}{\sqrt{1+4.0}+1}=2 \text{ vì } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin 2x}-\cot x\right)$ dạng vô định $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin 2x}-\cot x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{2\sin x\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\tan x=0$$

Ví dụ **2.2.4.2.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ dạng vô định $0.\infty$

- Đặt u = 1 – x nên khi x→1 thì u →0 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{u\to0} u.\tan\dfrac{\pi(1-u)}{2} =$

$$\lim_{u\to0} u.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right) = \lim_{u\to0} u.\cot\frac{\pi}{2}u = \lim_{u\to0}\frac{u}{\tan\frac{\pi}{2}u} = \lim_{u\to0}\frac{1}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}u}{u}} =$$

$$\lim_{u\to0}\frac{1}{\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}u}{\frac{\pi}{2}u}} = \lim_{u\to0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}u}{\frac{\pi}{2}u}}$$

- Đặt $v=\dfrac{\pi}{2}u$ nên khi u→0 thì v→0 $\Rightarrow \lim\limits_{u\to0}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}u}{\frac{\pi}{2}u}} = \dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{v\to0}\dfrac{1}{\dfrac{\tan v}{v}} = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\lim\limits_{v\to0}\dfrac{\tan v}{v}} = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{\pi}$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot 2x\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ dạng vô định $0.\infty$

- Đặt $u=\dfrac{\pi}{4}-x$ nên khi $x\to\dfrac{\pi}{4}$ thì u →0 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot 2x\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) =$

$$\lim_{u\to0}\cot 2\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\cot u = \lim_{u\to0}\cot\left(\frac{\pi}{2}-2u\right)\cot u = \lim_{u\to0}\tan 2u\cot u = \lim_{u\to0}\frac{\sin 2u}{\cos 2u}\frac{\cos u}{\sin u} =$$

$$\lim_{u\to0}\frac{\sin 2u}{\cos 2u}\frac{\cos u}{\sin u} = \lim_{u\to0}\frac{\sin 2u}{\sin u}\frac{\cos u}{\cos 2u} = \lim_{u\to0}\frac{\dfrac{\sin 2u}{u}}{\dfrac{\sin u}{u}}\frac{\cos u}{\cos 2u} = \frac{\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin 2u}{u}}{\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}}\frac{\cos u}{\cos 2u} =$$

$$\frac{\lim\limits_{u\to0}2\dfrac{\sin 2u}{2u}}{\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}}\frac{\cos u}{\cos 2u} = \frac{2\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin 2u}{2u}}{\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}}\frac{\cos u}{\cos 2u} = \frac{2.1}{1}.\frac{1}{1} = 2$$

Ví dụ **2.2.4.3.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$ dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ vì $x^3+3x^2-9x-2\Big|_{x=2}=0$ và $x^3-x-6\Big|_{x=2}=0$

do đó nếu chia lần lượt các biểu thức x^3+3x^2-9x-2, x^3-x-6 cho $x-2$

thì ta được các kết quả là x^2+5x+1, x^2+2x+3 nên ta được

$x^3+3x^2-9x-2=(x-2)(x^2+5x+1)$ và $x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}\Bigg|_{x=2} = \frac{15}{11}$$

(b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Đặt $x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}$ nên khi $x \to 1$ thì $t \to 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1-t^3}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)} =$

$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1+t+t^2}{1+t} = \left.\dfrac{1+t+t^2}{1+t}\right|_{t=1} = \dfrac{3}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Ta biến đổi $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \dfrac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3\cos x} = \dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} =$

$\dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1-\cos x}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \dfrac{1}{1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.1 = \dfrac{1}{2}$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1.1.\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$

(d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x - a^a}{x-a}$ $(a > 0)$ dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Biến đổi $\dfrac{x^x - a^a}{x-a} = \dfrac{(x^x - x^a) + (x^a - a^a)}{x-a} = \dfrac{x^x - x^a}{x-a} + \dfrac{x^a - a^a}{x-a}$

- Biến đổi $\dfrac{x^x - x^a}{x-a} = \dfrac{x^a(x^{x-a}-1)}{x-a} = \dfrac{x^a\left[e^{(x-a)\ln x}-1\right]}{x-a} = \dfrac{x^a\left[e^{(x-a)\ln x}-1\right]}{(x-a)\ln x}.\ln x =$

$\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}.x^a\ln x$

Đặt $u = (x-a)\ln x \Rightarrow$ khi $x \to a$ thì $u \to 0$, $\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x} = \dfrac{e^u - 1}{u} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u} = 1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to a}x^a\ln x = a^a\ln a$, do đó $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}.x^a\ln x =$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}.\lim\limits_{x\to a}x^a\ln x = 1.a^a\ln a = a^a\ln a$.

- Biến đổi $\dfrac{x^a - a^a}{x-a} = \dfrac{a^a\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^a - 1\right]}{x-a} = \dfrac{a^a\left[\left(1+\dfrac{x}{a}-1\right)^a - 1\right]}{x-a} = \dfrac{a^a\left[\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^a - 1\right]}{x-a} =$

$\dfrac{a^a\left[\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^a - 1\right]}{a.\dfrac{x-a}{a}} = a^{a-1}\dfrac{\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^a - 1}{\dfrac{x-a}{a}}$

Đặt $v=\dfrac{x-a}{a}\Rightarrow$ khi x→a thì v→0, $\dfrac{x^a-a^a}{x-a}=a^{a-1}\dfrac{(1+v)^a-1}{v}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=\lim_{v\to 0}a^{a-1}\frac{(1+v)^a-1}{v}=a^{a-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+v)^a-1}{v}=a^{a-1}.a=a^a.$$

$$\text{Vậy}\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{x^x-x^a}{x-a}+\frac{x^a-a^a}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=a^a\ln a+a^a=$$

$$a^a(\ln a+1)=a^a(\ln a+\ln e)=a^a\ln(ae)$$

Ví dụ **2.2.4.4.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Chia cả tử số và mẫu số của phân thức $\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$ cho x^2 thì được $\dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}$, do đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{1+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=$$

$\dfrac{1+2.0+3.0}{2+3.0+4.0}=\dfrac{1}{2}$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Chia cả tử số và mẫu số của phân thức $\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$ cho x^2 thì được $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}$, do đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=$$

$\dfrac{0+3.0}{2+3.0+4.0}=\dfrac{0}{2}=0$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Chia cả tử số và mẫu số của phân thức $\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$ cho x^3 thì được $\dfrac{1+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}$, do đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{1+5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{1+5.0}{0+3.0}=\frac{1}{0}=\infty$$

vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Chia cả tử số và mẫu số của phân thức $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ cho $\sqrt{x}$ thì được

$\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}$, do đó $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}=$

$$\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}}=\dfrac{1}{1}=1$$

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan 2x}{\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$ dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Biến đổi $\dfrac{\tan 2x}{\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\dfrac{\sin 2x\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}=$

$$\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)}=\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\sin 2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=$$

$$\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 2x}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan 2x}{\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 2x}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x}{\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^2}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1^2}=1$$

Giới hạn có dạng $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ trong trường hợp thông thường có kết quả là $[f(a)]^{g(a)}$. Tuy nhiên, một số bài toán khi thay a vào các hàm này thì lại nhận được kết quả là $1^{+\infty}$ [f(x)→1, g(x)→+∞] hoặc 0^0 [f(x)→0, g(x)→0] hoặc ∞^0 [f(x)→∞, g(x)→0], rõ ràng các biểu thức này không thể xác định được giá trị, nên nó là các dạng vô định.

Trong các trường hợp này, ta có thể biến đổi các dạng này về dạng vô định 0.∞ nhờ phép biến đổi $[f(x)]^{g(x)}=e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln[f(x)]}$, khi đó $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln[f(x)]}$, trong đó giới hạn $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln[g((x)]$ có nhiều khả năng dễ tính hơn.

Nói riêng, muốn khử được dạng vô định $1^{+\infty}$, hầu như cần dùng đến giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ bằng cách biến đổi biểu thức đã cho như sau

$$\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left(\left[1+\left(f(x)-1\right)\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)\left[f(x)-1\right]}$$

Như vậy, ta đã chuyển giới hạn cần tính $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ về dạng $\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\left[f(x)-1\right]} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right]}$ có nhiều khả năng dễ tính hơn.

Ví dụ **2.2.4.5.** Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos ax}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$

$$\left(\frac{\cos ax}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \left(1+\frac{\cos ax}{\cos(a-2)x}-1\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \left(1+\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}} =$$

$$\left(1+\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{\cos(a-2)x}{\cos ax-\cos(a-2)x}\cdot\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\cdot\frac{1}{x\sin x}} =$$

$$\left[\left(1+\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{\cos(a-2)x}{\cos ax-\cos(a-2)x}}\right]^{\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{x\sin x\cos(a-2)x}} = \left[\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{x\sin x\cos(a-2)x}}$$

với $t = \dfrac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}$ khi $x\to 0$ thì $t\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\cos ax-\cos(a-2)x}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{\cos(a-2)x}{\cos ax-\cos(a-2)x}} =$

$\lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}} = e$, do đó $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos ax}{\cos(a-2)x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos(a-2)x}{x\sin x\cos(a-2)x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin(a-1)x\sin x}{x\sin x\cos(a-2)x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin(a-1)x}{x\cos(a-2)x}} =$

$e^{\lim\limits_{x\to 0}2(1-a)\frac{\sin(a-1)x}{(a-1)x}\frac{1}{\cos(a-2)x}} = e^{2(1-a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a-1)x}{(a-1)x}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(a-2)x}} = e^{2(1-a).1.\frac{1}{1}} = e^{2(1-a)}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x-4}$

$$\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-4} = \left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{3x-4} = \left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}\cdot\frac{-3}{x+1}\cdot(3x-4)} = \left[\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right]^{\frac{-9x+12}{x+1}} = \left[\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{-9x+12}{x+1}}$$

với $t = \dfrac{-3}{x+1}$ khi $x\to+\infty$ thì $t\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}} = \lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}} = e$,

do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right]^{\frac{-9x+12}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9x+12}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9+\frac{12}{x}}{1+\frac{1}{x}}} =$

$$e^{\frac{-9+12\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}} = e^{\frac{-9+12.0}{1+0}} = e^{-9} = \frac{1}{e^9}$$

Bài tập

2.8. Chứng minh rằng (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$

HD: (a) Đổi biến x = -t-1 và sử dụng giới hạn đã biết $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$; (b) Đổi biến $x = \frac{1}{t}$, khi đó khi $x\to 0$ thì $t\to\infty$, sau đó sử dụng giới hạn đã biết $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

2.9. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng (a) $\lim\limits_{x\to 8-0}\sqrt[4]{8-x} = 0$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x+2} = 2$.

2.10. Tìm giới hạn của các hàm dưới đây (nếu có):

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{khi} \quad x\le 1 \\ 3x-5 & \text{khi} \quad x>1\end{cases}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ với $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ với $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ (d) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ với $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ với $f(x) = (3x+|x-4|)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ với $f(x) = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ với $f(x) = \frac{3-|x|}{3-x}$

2.11. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 4}[x]$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$ (a > 0, b > 0), (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\left(1+2+3+...+\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)\right)$, trong đó [α] là hàm phần nguyên.

2.12. Giả sử $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ (a_n \ne 0)$, chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$.

2.13. Cho $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ với m, n∈**N*** và $P_m(x)$, $Q_n(x)$ là các đa thức bậc m, n tương ứng; tức là

$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \ (a_m \ne 0)$, $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \ (b_n \ne 0)$.

(a) Tìm $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nếu a đồng thời là nghiệm đơn của các phương trình $P_m(x) = 0$, $Q_n(x) = 0$.

(b) Tìm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$,

HD: (b) Xét 3 trường hợp (m < n, m = n, m > n), đối với mỗi trường hợp chia cả tử số và mẫu số cho $x^{\max(m,n)}$.

2.14. Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^4+2x^2-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m, n∈**N***) (e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)-n}{x^n-1}$, n∈**N*** (f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n∈**N***)

(g) $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (m, n∈**N***)

2.15. Biết $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-9}{x-1} = 14$, hãy tính $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2.16. Tìm giá trị của tham số a sao cho $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ tồn tại. Tính giới hạn tương ứng với giá trị tìm được của a.

2.17. Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2-5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$

2.18. Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right)$ (d) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{7}}{x+7}$

(e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x}-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}$ (m, n∈**N***) (f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{x+1}-\sqrt[n]{x+1}}{x}$ (m, n∈**N***)

2.19. Tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(8x^3+1)}{\tan x\tan 2x\tan 3x}$ (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\tan bx}$ (c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ (e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x}$ (g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$ (h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x-3x^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ (a > 0) (k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$ (l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$

(m) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

2.20. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2x^4}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x+1}$, (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$

2.21. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{1-\cot x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$ (f) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}$

(g) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\tan x\right)^{\tan 2x}$ (i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x$

(k) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2-x+1}\right)^{\frac{1}{3x+\sin x}}$ (l) $\lim\limits_{x\to0}\left[\cot x\left(e^{\sin 3x}-1\right)\right]$ (m) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos 3x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

(n) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ (o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x\right)^{\tan^2 2x}$ (p) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$