Chương 3. PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

3.1. Đạo hàm

3.1.1. Định nghĩa đạo hàm, đạo hàm một phía, ý nghĩa hình học và ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Định nghĩa **3.1.1.1.** Cho hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a,b), tức là D(f) = (a,b). Khi đó, hàm số y = f(x) xác định tại lân cận điểm $x_0 \in D(f)$, xét x thuộc lân cận đó, đặt $\Delta x = x - x_0$ (được gọi là số gia của đối số tại điểm x_0, rõ ràng là khi $x \to x_0$ thì $\Delta x \to 0$) và $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ (được gọi là số gia của hàm số tại điểm x_0). Nếu $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm* của hàm số y = f(x) tại điểm x_0, đồng thời ta nói rằng, hàm số y = f(x) *khả vi* tại điểm x_0.

Vì x_0 là một điểm bất kỳ thuộc khoảng (a,b) nên ta có thể dùng x thay cho x_0 và để tiện sử dụng, người ta thường ký hiệu đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x bằng một trong các biểu thức sau đây: y', y'_x, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ tùy từng trường hợp, nếu không gây ra bất kỳ sự hiểu nhầm nào.

Nếu hàm số y = f(x) khả vi tại mọi điểm $x \in (a,b)$ thì ta nói rằng f(x) khả vi trong khoảng (a,b).

Ví dụ **3.1.1.1.** Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau đây

(a) y = f(x) = c (c là một hằng số) với D(f) = (a,b)

Ta có $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0.$$

(b) $y = f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}$) với D(f) = (a,b)

Ta có $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^k - x^n = (\Delta x)\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[C_n^1 x^{n-1} + (\Delta x)\sum_{k=2}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-2}\right] =$$

$$C_n^1 x^{n-1} + \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)\sum_{k=2}^{n} C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-2} = C_n^1 x^{n-1} + 0 = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

(c) $y = f(x) = a^x$ ($a > 0$) với D(f) = **R**

Ta có $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1) \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} =$

$$a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

(d) y = f(x) = sinx với D(f) = **R**

Ta có $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1.\cos x = \cos x.$$

Định lý **3.1.1.1.** Hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a,b) nếu tồn tại đạo hàm tại điểm $x \in (a,b)$ thì hàm số y = f(x) liên tục tại điểm x.

Định nghĩa **3.1.1.2.** Trong định nghĩa 3.1.1.1. nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn này được gọi là đạo hàm bên trái của hàm số y = f(x) tại điểm x_0, còn nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn này được gọi là đạo hàm bên phải của hàm số y = f(x) tại điểm x_0.

Cũng như ở Định nghĩa 3.1.1.1. vì x_0 là một điểm bất kỳ thuộc khoảng (a,b) nên ta có thể dùng x thay cho x_0 và để tiện sử dụng, người ta thường ký hiệu đạo hàm bên trái của hàm f(x) tại điểm x bằng f'(x-0) và đạo hàm bên phải của hàm f(x) tại điểm x bằng f'(x+0).

Định lý **3.1.1.2.** f'(x-0) = f'(x+0) = L khi và chỉ khi f'(x) = L (L là một số hữu hạn)

Ví dụ **3.1.1.2.** Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của hàm số y = f(x) = |x|

- Khi x > 0 thì sgn(x) = 1 và y = f(x) = x $\Rightarrow \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = x+\Delta x - x = \Delta x$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 = \operatorname{sgn}(x)$$

- Khi x < 0 thì sgn(x) = -1 và y = f(x) = -x $\Rightarrow \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = -(x+\Delta x) - (-x) = -\Delta x$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1 = \operatorname{sgn}(x)$$

Do đó f'(x) = sgn(x) khi $x \neq 0$

- Khi x = 0:

$$+ f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} (-1) = -1$$

$$+ f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} 1 = 1$$

Do đó f'(0–0) $\neq$ f'(0+0) nên không tồn tại f'(0).

Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x bằng hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm có hoành độ x.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm: Quan hệ giữa quãng đường s đi được của một vật thể, tương ứng với thời gian t, được thể hiện qua hàm số y = s(t). Khi đó, đạo hàm s'(t) là vận tốc chuyển động của vật thể tại thời điểm t.

3.1.2. Các quy tắc tính đạo hàm, bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp

Định lý **3.1.2.1.** Giả sử các hàm số f(x), g(x) xác định trong khoảng (a,b) và tồn tại các đạo hàm f'(x), g'(x) tại điểm $x \in (a,b)$, khi đó các hàm số f(x) + g(x), f(x).g(x), $\frac{f(x)}{g(x)}\left[g(x) \neq 0\right]$ cũng tồn tại đạo hàm tại điểm x và được xác định như sau:

(1) [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)

(2) [f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)

(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ với $g(x) \neq 0$

Nhận xét

- Quy tắc (1) có thể suy rộng cho việc tính đạo hàm của tổng hữu hạn hàm số, chẳng hạn, đối với tổng 3 hàm số thì $[f(x) + g(x) + h(x)]' = f'(x) + g'(x) + h'(x)$.

- Quy tắc (2) có thể suy rộng cho việc tính đạo hàm của tích hữu hạn hàm số, chẳng hạn, đối với tích 3 hàm số thì $[f(x).g(x).h(x)]' = f'(x).g(x).h(x) + f(x).g'(x).h(x) + f(x).g(x).h'(x)$.

Định lý **3.1.2.2.** (*Đạo hàm của hàm hợp*)

1. Giả sử hàm số $u = f(x)$ có $D(f) = (a,b)$ và $R(f) = (c,d)$, tồn tại đạo hàm $u'_x = f'(x)$ tại điểm $x \in (a,b)$;

2. Giả sử hàm số $y = g(u)$ có $D(g) = R(f)$, tồn tại đạo hàm $y'_u = g'(u)$ tại $u = f(x)$;

Khi đó hàm hợp $y = g[f(x)]$ tồn tại đạo hàm tại x và được xác định như sau: $y'_x = y'_u.u'_x$

Nhận xét. Có thể mở rộng định lý cho trường hợp hàm hợp của một số hữu hạn hàm số. Chẳng hạn, nếu $y = g(u)$, $u = f(v)$, $v = h(x)$ thì $y'_x = y'_u.u'_v.v'_x$

Định lý **3.1.2.3.** (*Đạo hàm của hàm ngược*)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có D(f) và R(f), đơn điệu tăng (giảm) trên D(f) và tồn tại đạo hàm $y'_x = f'(x) \neq 0$ với $\forall x \in D(f)$, khi đó hàm số ngược $x = f^{-1}(y)$ tồn tại đạo hàm x'_y với $\forall y \in R(f)$ và được xác định như sau: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Định lý **3.1.2.4.** (*Đạo hàm theo tham số*)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ trong đó các hàm số x(t) và y(t) cùng xác định trong khoảng (a,b), đồng thời tồn tại các đạo hàm x'(t), y'(t) và $x'(t) \neq 0$ tại điểm $t \in (a,b)$. Khi đó tồn tại đạo hàm $y'_x = f'(x)$ tại điểm $x = x(t)$ và được xác định như sau: $y'_x = f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

Định lý **3.1.2.5.** (*Đạo hàm của hàm ẩn*)

Giả sử y là hàm của đối số x được cho bởi đẳng thức $F(x,y) = 0$. Nếu tồn tại đạo hàm y'_x thì nó được xác định như sau:

(1) Tính đạo hàm vế trái của đẳng thức $F(x,y) = 0$ (khi xem y là hàm của x) và cho biểu thức của đạo hàm vừa tính được bằng không;

(2) Giải phương trình vừa nhận được đối với y'_x và nhận được $y'_x = f(x, y)$.

Nhận xét. Việc sử dụng định nghĩa để tính đạo hàm của một hàm số được cho bởi một biểu thức phức tạp là không đơn giản. Khi đó, ta biến đổi biểu thức của hàm số về dạng đơn giản hơn và sử dụng 5 định lý ở trên (các quy tắc tính đạo hàm) cùng với các đạo hàm của các hàm sơ cấp (dưới đây) để tính đạo hàm của hàm số đã cho.

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp

$$(x^a)' = ax^{a-1} \text{ với } a \in \mathbf{R} \Rightarrow \begin{cases} (x^n)' = nx^{n-1} & (n \in N) \\ (\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} & (n \in N^*) \end{cases}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \text{ với } a > 0 \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ với a > 0 và x ≠ 0 $\Rightarrow (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ với x ≠ 0

(sinx)' = cosx

(cosx)' = -sinx

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ với |x| < 1

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ với |x| < 1

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Ví dụ **3.1.2.1.** Tính đạo hàm f'(x) của hàm số y = f(x) = a^xsinx

Cách 1. *Sử dụng định nghĩa để tính*

Ta có Δy = f(x+Δx) – f(x) = $a^{x+\Delta x}\sin(x+\Delta x) - a^x\sin x = a^x[\sin x.(a^{\Delta x}\cos\Delta x - 1) + \cos x.a^{\Delta x}\sin\Delta x]$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a^x\frac{\sin x.(a^{\Delta x}\cos\Delta x - 1) + \cos x.a^{\Delta x}\sin\Delta x}{\Delta x} =$$

$$a^x.\left[\sin x.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x.\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x}.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right]$$

+ $\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = a^0 = 1$

+ $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$

+ $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\Delta x.\dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} + \dfrac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}\right) =$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\Delta x.\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} + \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\Delta x.\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} - \frac{1}{2}.\Delta x.\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2\right] =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} - \frac{1}{2}.\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x.\left(\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2 = 1.\ln a - \frac{1}{2}.0.1^2 = \ln a$$

$$\Rightarrow f'(x) = a^x(\sin x.\ln a + \cos x.1.1) = a^x(\ln a.\sin x + \cos x)$$

Cách 2. *Sử dụng quy tắc để tính*

Đặt u(x) = a^x và v(x) = sinx ⇒ y = f(x) = u(x).v(x) ⇒ y' = f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x) = a^x.lna.sinx + a^x.cosx = a^x(lna.sinx + cosx)

Ví dụ **3.1.2.2.** Tính đạo hàm f'(x) của các hàm số sau

(a) y = ln(arctanx)

Ta thấy, đối số của hàm ln là một hàm số khác nên ta phải dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp: Đặt u = arctanx $\Rightarrow$ y = lnu

$$\Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x = \frac{1}{u}.\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\arctan x}.\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$$

(b) $y = e^{\arcsin x}$

Ta thấy, đối số của hàm số mũ cơ số e là một hàm số khác nên ta phải dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp: Đặt u = arcsinx $\Rightarrow$ y = e^u

$$\Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x = e^u.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = e^{\arcsin x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

(c) $y = x^x$

Ta thấy biểu thức x^x không phải hàm lũy thừa và cũng không phải hàm số mũ, nên ta dùng phép biến đổi như sau: Lấy loga cơ số e hai vế của đẳng thức $y = x^x$ ta được $\ln y = \ln x^x = x\ln x \Rightarrow y = e^{x\ln x}$.

Do đó $y = e^{x\ln x}$, bây giờ đặt u = xlnx $\Rightarrow$ y = e^u

$$\Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x = e^u.(x\ln x)'_x = e^{x\ln x}\left(\ln x + x.\frac{1}{x}\right) = x^x(1+\ln x)$$

Ví dụ **3.1.2.3.** Cho hàm số $y = x + x^3$ với D(f) = R(f) = **R**, tính đạo hàm x'_y

Hàm số y = f(x) = $x + x^3$ liên tục và đơn điệu trên D(f) vì đạo hàm $y'_x = 1+3x^2 > 0$ với $\forall x \in$D(f), nên tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ với $D(f^{-1})$ = R(f), do đó $x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+3x^2}$

Ví dụ **3.1.2.4.** Tính đạo hàm của hàm số y = f(x) được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) = a\cos^3 t \\ y = y(t) = b\sin^3 t \end{cases}$ với $0 < t < \frac{\pi}{2}$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{b.3\sin^2 t.\cos t}{a.3\cos^2 t.(-\sin t)} = -\frac{b}{a}\tan t$$

Ví dụ **3.1.2.5.** Giả sử hàm số y = y(x) thỏa mãn biểu thức arctany – y + x = 0, tính đạo hàm y'_x

Đạo hàm hai vế biểu thức arctany – y + x = 0 theo x khi xem y là hàm của đối số x ta được

$$(\arctan y)'_y.y'_x - y'_x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{y'_x}{1+y^2} - y'_x + 1 \Rightarrow y'_x = 1 + \frac{1}{y^2}$$

3.1.3. Các định lý giá trị trung bình

Định lý **3.1.3.1.** (*Định lý Fermat*) Nếu hàm số y = f(x) có D(f) = (a,b) và R(f) = **R** [f: (a,b)$\to$**R**] đạt cực trị và khả vi tại điểm c$\in$(a,b) thì f'(c) = 0.

Chứng minh

Theo giả thiết f(x) khả vi tại điểm x = c tức là tồn tại f'(c), f'(c-0), f'(c+0) và f'(c-0) = f'(c+0) = f'(c), tức là tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) = f'(c-0) = f'(c+0)$.

Mặt khác, nếu c là điểm cực đại của hàm f(x) trong (a,b), tức là f(c) ≥ f(x) với $\forall x\in$(a,b) nên

$$\begin{cases} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{khi} \quad \Delta x < 0 \\ \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{khi} \quad \Delta x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(c-0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0 \\ f'(c+0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \end{cases}$$

Suy ra f'(c–0) = f'(c+0) = 0, do đó f'(c) = 0.

Lập luận hoàn toàn tương tự, nếu x = c là điểm cực tiểu.

Định lý **3.1.3.2.** (*Định lý Rolle*) Giả sử hàm số y = f(x) xác định, liên tục trên [a,b] và khả vi trong (a,b); khi đó nếu f(a) = f(b) thì tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho f'(c) = 0.

Chứng minh

Vì f(x) liên tục trên [a,b] nên theo định lý 2.3.2.1. thì f(x) đạt một giá trị bé nhất m và một giá trị lớn nhất M. Có thể có hai trường hợp:

Trường hợp 1. m = M, khi đó vì $m \le f(x) \le M$ nên f(x) = m = M, nghĩa là hàm số f(x) không đổi trên [a,b], tức là f'(x) = 0 với $\forall x\in[a,b]$ do đó ta có thể lấy c là một điểm bất kỳ trên [a,b] thì f'(c) = 0.

Trường hợp 2. $m \neq M$, trong trường hợp này ít nhất một trong hai điểm cực đại hoặc cực tiểu không thể trùng với điểm a hoặc điểm b được, vì nếu như vậy thì lại quay về trường hợp 1 do có giả thiết là f(a) = f(b). Suy ra, ít nhất một trong hai điểm cực đại hoặc cực tiểu đạt được tại điểm $c\in(a,b)$, và như vậy, theo định lý Fermat thì f'(c) = 0.

Định lý **3.1.3.3.** Định lý về số gia hữu hạn (*Định lý Lagrange*) Giả sử hàm số y = f(x) xác định, liên tục trên [a,b] và khả vi trong (a,b); khi đó tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$.

Chứng minh

Xét hàm số $h(x) = f(a) - f(x) + \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)$, theo giả thiết, hàm số $f(x)\in C_{[a,b]}$ và khả vi trong (a,b) nên hàm số h(x) $\in C_{[a,b]}$ và khả vi trong (a,b).

Mặt khác $\begin{cases} h(a) = f(a) - f(a) + \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(a-a) = 0 + \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}.0 = 0 \\ h(b) = f(a) - f(b) + \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}(b-a) = f(a) - f(b) + f(b) - f(a) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ h(a) = h(b).

Như vậy, hàm số h(x) hoàn toàn thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle nên áp dụng định lý Rolle đối với hàm số h(x) thì $\exists c\in(a,b)$ sao cho

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow h'(c) = -f'(c) + \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c).$$

Định lý **3.1.3.4.** (*Định lý Cauchy*) Giả sử các hàm số f(x), g(x) xác định, liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b), $g'(x) \neq 0$ với mọi $x\in(a,b)$ và $g(a) \neq g(b)$; khi đó tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Chứng minh

Xét hàm số $h(x) = f(a) - f(x) + \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x) - g(a)\right]$, theo giả thiết, các hàm số f(x), g(x) $\in C_{[a,b]}$ và khả vi trong (a,b) và $g(a) \neq g(b)$ nên hàm số h(x) $\in C_{[a,b]}$ và khả vi trong (a,b).

Mặt khác $\begin{cases} h(a) = f(a) - f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(a) - g(a)\right] = 0 + \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.0 = 0 \\ h(b) = f(a) - f(b) + \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(b) - g(a)\right] = f(a) - f(b) + f(b) - f(a) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ h(a) = h(b).

Như vậy, hàm số h(x) hoàn toàn thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle nên áp dụng định lý Rolle đối với hàm số h(x) thì $\exists c\in(a,b)$ sao cho

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow h'(c) = -f'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Nhận xét.

(1) Nếu f(a) = f(b) thì công thức $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$ trở thành f'(c) = 0, nghĩa là định lý Rolle là trường hợp riêng của định lý Lagrange.

(2) Nếu g(x) = x thì công thức $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ trở thành $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$, nghĩa là định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy.

3.2. Đạo hàm cấp cao

3.2.1. Định nghĩa đạo hàm cấp cao

Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a,b] và khả vi tại mọi điểm $x \in (a,b)$, khi đó f'(x) được gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số f(x) và ngoài ký hiệu như trên còn được ký hiệu là $f^{(1)}(x)$. Nếu hàm số f'(x) khả vi tại mọi điểm $x \in (a,b)$ thì đạo hàm cấp 1 của f'(x) được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số f'(x) và được ký hiệu là f''(x) hay $f^{(2)}(x)$… Tổng quát: Nếu hàm số $f^{(n-1)}(x)$, được gọi là đạo hàm cấp n–1 của hàm số f(x), khả vi tại mọi điểm $x \in (a,b)$ thì đạo hàm cấp 1 của $f^{(n-1)}(x)$, được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số f(x), tức là $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Ví dụ. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây, mà sau này được sử dụng như là công thức đạo hàm cấp n cơ bản.

(a) $f(x) = x^a$ ($a \in \mathbf{R}$)

- Đạo hàm cấp 1 của f(x) là $f'(x) = ax^{a-1}$
- Đạo hàm cấp 2 của f(x) là $f''(x) = [f'(x)]' = (ax^{a-1}) = a(a-1)x^{a-2}$
- Dự đoán đạo hàm cấp n của f(x) là $f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$

Chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1 công thức đúng
- Giả sử công thức đúng với n, tức là ta có $f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$
- Ta phải chứng minh công thức đúng với n + 1, thật vậy: theo định nghĩa thì $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$ hay $f^{(n+1)}(x) = [a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}]' = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(a-n)x^{a-n-1} =$ $a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)[a-(n+1)+1]x^{a-(n+1)}$ (đpcm)

Đặc biệt, khi $a = m \in \mathbf{N}^*$ thì $\left(x^m\right)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n} & \text{khi} \quad n < m \\ n! & \text{khi} \quad n = m \\ 0 & \text{khi} \quad n > m \end{cases}$

(b) $f(x) = a^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n n$. Đặc biệt, khi a = e thì $(e^x)^{(n)} = e^x$

(c) f(x) = sinx, ta thấy $\begin{cases} f^{(1)}(x) = \cos x, & f''(x) = -\sin x \\ f^{(3)}(x) = -\cos x, & f^{(4)}(x) = \sin x \\ f^{(5)}(x) = \cos x, & f^{(6)}(x) = -\sin x \end{cases}$

Dự đoán đạo hàm cấp n của f(x) = sinx là $\left(\sin x\right)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{khi} \quad n = 2k+1 \\ (-1)^k \sin x & \text{khi} \quad n = 2k \end{cases}$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1, tương ứng với k = 0 thì $(\sin x)^{(1)} = (-1)^0\cos x = \cos x$; còn khi n = 2, tương ứng với k = 1 thì $(\sin x)^{(2)} = (-1)^1\sin x = -\sin x$; công thức trên đúng.
- Giả sử công thức trên đúng với n, tức là ta có $\left(\sin x\right)^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{khi} \quad n = 2k+1 \\ (-1)^k \sin x & \text{khi} \quad n = 2k \end{cases}$

- Ta phải chứng minh công thức trên đúng với n+1, thật vậy

+ Với n = 2k+1 thì n+1 = (2k+1)+1 = 2(k+1), theo định nghĩa thì $(\sin x)^{(n+1)} = [(\sin x)^{(n)}]' = [(-1)^k\cos x]' = (-1)^k(-1)\sin x = (-1)^{k+1}\sin x = (\sin x)^{(n+1)}$;

+ Với n = 2k thì n+1 = 2k+1, theo định nghĩa ta có $(\sin x)^{(n+1)} = [(\sin x)^{(n)}]' = [(-1)^k\sin x]' = (-1)^k\cos x = (\sin x)^{(n+1)}$ (đpcm).

Cách khác:

- Đạo hàm cấp 1 của f(x) = sinx là $f^{(1)}(x) = (\sin x)^{(1)} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

- Đạo hàm cấp 2 của f(x) = sinx là

$$f^{(2)}(x) = \left[f^{(1)}(x)\right]^{(1)} = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^{(1)} = \text{cox}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

- Đạo hàm cấp 3 của f(x) = sinx là

$$f^{(3)}(x) = \left[f^{(2)}(x)\right]^{(1)} = \left[\sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)\right]^{(1)} = \text{cox}\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right)$$

- Dự đoán đạo hàm cấp n của f(x) = sinx là $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1 thì $f^{(1)}(x) = (\sin x)^{(1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, công thức trên đúng.

- Giả sử công thức trên đúng với n, tức là ta có $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$.

- Ta phải chứng minh công thức trên đúng với n+1, thật vậy, theo định nghĩa thì

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]^{(1)} = \left[\sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)\right]^{(1)} = \left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)^{(1)}\cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) = 1.\cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[x + (n+1).\frac{\pi}{2}\right]$$ (đpcm).

Tóm lại $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k \sin x & \text{khi} \quad n = 2k \\ (-1)^k \cos x & \text{khi} \quad n = 2k+1 \end{cases}$

(d) f(x) = cosx, coi như bài tập, sinh viên tự chứng minh

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{khi} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{khi} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

(e) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ với $x \neq -1$

Ta viết f(x) dưới dạng tương đương $f(x) = (1+x)^{-1}$

- Đạo hàm cấp 1 của f(x) là

$$f^{(1)}(x) = \left[(1+x)^{-1}\right]^{(1)} = (-1)(1+x)^{-1-1}(1+x)' = (-1)(1+x)^{-2}.1 = (-1).1.\frac{1}{(1+x)^2}$$

- Đạo hàm cấp 2 của f(x) là

$$f^{(2)}(x) = \left[(-1).1.(1+x)^{-2}\right]^{(1)} = (-1).1.(-2).(1+x)^{-2-1}(1+x)' = (-1).(-1).1.2.(1+x)^{-3}.1 = (-1)^2.2!.\frac{1}{(1+x)^3}$$

- Dự đoán $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1 thì $f^{(1)}(x) = (-1)^1 \dfrac{1!}{(1+x)^{1+1}} = (-1)^1 \dfrac{1}{(1+x)^2}$, công thức trên đúng.

- Giả sử công thức trên đúng với n, tức là ta có $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

- Ta phải chứng minh công thức trên đúng với n+1, thật vậy, theo định nghĩa thì

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]^{(1)} = \left[(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right]^{(1)} = \left[(-1)^n.n!.(1+x)^{-(n+1)}\right]^{(1)} =$$

$$(-1)^n.n!.\left[-(n+1)\right](1+x)^{-(n+1)-1}(1+x)' = (-1)^{n+1}(n+1)!.(1+x)^{-(n+1)-1} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(1+x)^{(n+1)+1}} \text{ (đpcm)}$$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ với $x \neq 1$, coi như bài tập, sinh viên tự chứng minh $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ với $x \neq \pm 1$

Ta biến đổi f(x) thành dạng đơn giản hơn $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{1-x} =$

$$\frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{(-a+b)x+(a+b)}{(1+x)(1-x)} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}, \text{ do đó}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) \Rightarrow f^n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\right]$$

Do đó, từ kết quả của các ví dụ (f), (g) suy ra $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$

(h) f(x) = lnx với x > 0

- Đạo hàm cấp 1 của f(x) là $f^{(1)}(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

- Đạo hàm cấp 2 của f(x) là $f^{(2)}(x) = \left[f^{(1)}(x)\right]^{(1)} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{(1)} = (-1).\dfrac{1}{x^2} = (-1)^1.\dfrac{1}{x^2}$

- Đạo hàm cấp 3 của f(x) là $f^{(3)}(x) = \left[f^{(2)}(x)\right]^{(1)} = \left[(-1)^1.\dfrac{1}{x^2}\right]^{(1)} = (-1).(-2).\dfrac{1}{x^3} = (-1)^2.2!.\dfrac{1}{x^3}$

- Dự đoán đạo hàm cấp n của f(x) là $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1 thì $f^{(1)}(x) = \dfrac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = \dfrac{(-1)^0 0!}{x} = \dfrac{1}{x}$, công thức trên đúng.

- Giả sử công thức trên đúng với n, tức là ta có $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

- Ta phải chứng minh công thức trên đúng với n+1, thật vậy, theo định nghĩa thì

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]^{(1)} = \left[\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right]^{(1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!.(-n)}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \text{ (đpcm)}$$

3.2.2. Công thức Leibniz

Quy tắc tính đạo hàm (1) của Định lý 3.1.2.1. được tổng quát hóa và chứng minh một cách đơn giản $[f(x) + g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$, còn quy tắc (2) cũng của định lý này được tổng quát hóa như sau và được gọi là Công thức Leibniz.

Giả sử các hàm số f(x), g(x) xác định, liên tục trên [a,b] và tồn tại các đạo hàm $f^{(k)}(x)$, $g^{(k)}(x)$ ($1 \le k \le n$) tại mọi điểm $x \in (a,b)$, khi đó các hàm số f(x).g(x) cũng tồn tại đạo hàm đến cấp n tại mọi điểm $x \in (a,b)$ và được xác định như sau: $\left[f(x).g(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x).g^{(k)}(x)$ với quy ước $f^{(0)}(x) = f(x)$ và $g^{(0)}(x) = g(x)$.

Chứng minh. Dùng phương pháp quy nạp toán học

- Khi n = 1, công thức Leibniz trở thành

$$\left[f(x).g(x)\right]' = \sum_{k=0}^{1} C_1^k f^{(1-k)}(x).g^{(k)}(x) = C_1^0 f^{(1)}(x).g^{(0)}(x) + C_1^1 f^{(0)}(x).g^{(1)}(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

là đẳng thức đúng.

- Giả sử công thức Leibniz đúng với n, tức là ta có $\left[f(x).g(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x).g^{(k)}(x)$

- Ta phải chứng minh công thức đúng với n + 1, thật vậy, theo định nghĩa thì

$$\left[f(x).g(x)\right]^{(n+1)} = \left\{\left[f(x).g(x)\right]^{(n)}\right\}^{(1)} = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x).g^{(k)}(x)\right]^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[f^{(n-k)}(x).g^{(k)}(x)\right]^{(1)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[f^{(n-k+1)}(x).g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x).g^{(k+1)}(x)\right] =$$

$$C_n^0\left[f^{(n+1)}(x).g^{(0)}(x) + f^{(n)}(x).g^{(1)}(x)\right] + C_n^1\left[f^{(n)}(x).g^{(1)}(x) + f^{(n-1)}(x).g^{(2)}(x)\right] +$$

$$C_n^2\left[f^{(n-1)}(x).g^{(2)}(x) + f^{(n-2)}(x).g^{(3)}(x)\right] + C_n^3\left[f^{(n-2)}(x).g^{(3)}(x) + f^{(n-3)}(x).g^{(4)}(x)\right] + \ldots +$$

$$+ \ldots + C_n^{n-1}\left[f^{(2)}(x).g^{(n-1)}(x) + f^{(1)}(x).g^{(n)}(x)\right] + C_n^n\left[f^{(1)}(x).g^{(n)}(x) + f^{(0)}(x).g^{(n+1)}(x)\right] =$$

$$C_n^0 f^{(n+1)}(x).g^{(0)}(x) + (C_n^0 + C_n^1) f^{(n)}(x).g^{(1)}(x) + (C_n^1 + C_n^2) f^{(n-1)}(x).g^{(2)}(x) + (C_n^2 + C_n^3) f^{(n-2)}(x).g^{(3)}(x) + \ldots +$$

$$\ldots + (C_n^{n-2} + C_n^{n-1}) f^{(2)}(x).g^{(n-1)}(x) + (C_n^{n-1} + C_n^n) f^{(1)}(x).g^{(n)}(x) + C_n^n f^{(0)}(x).g^{(n+1)}(x) =$$

$$C_{n+1}^0 f^{(n+1)}(x).g^{(0)}(x) + C_{n+1}^1 f^{(n)}(x).g^{(1)}(x) + C_{n+1}^2 f^{(n-1)}(x).g^{(2)}(x) + C_{n+1}^3 f^{(n-2)}(x).g^{(3)}(x) + \ldots +$$

$$\ldots + C_{n+1}^{n-1} f^{(2)}(x).g^{(n-1)}(x) + C_{n+1}^n f^{(1)}(x).g^{(n)}(x) + C_{n+1}^{n+1} f^{(0)}(x).g^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x).g^{(k)}(x) \text{ (đpcm)}$$

vì $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ $(1 \le k \le n)$ và $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$

Ví dụ. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = x^3\sin x$

Nếu đặt $u(x) = x^3$ và $v(x) = \sin x$ thì $f^{(n)}(x) = [x^3\sin x]^{(n)} = [u(x).v(x)]^{(n)} = [v(x).u(x)]^{(n)}$, áp dụng Công thức Leibniz ta được $\left[v(x).v(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v^{(n-k)}(x).u^{(k)}(x)$.

Ta thấy $u'(x) = 3x^2$, $u''(x) = 6x$, $u^{(3)}(x) = 6$, $u^{(k)}(x) = 0$ với $k \ge 4$ nên

$$\left[f(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v^{(n-k)}(x).u^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{3} C_n^k v^{(n-k)}(x).u^{(k)}(x) =$$

$$C_n^0 v^{(n)}(x).x^3 + C_n^1 v^{(n-1)}(x).3x^2 + C_n^2 v^{(n-2)}(x).6x + C_n^3 v^{(n-3)}(x).6 =$$

$$x^3.v^{(n)}(x) + 3nx^2.v^{(n-1)}(x) + 3n(n-1)x.v^{(n-2)}(x) + n(n-1)(n-2).v^{(n-3)}(x)$$

trong đó $v^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$, $v^{(n-1)}(x) = \sin\left[x + (n-1).\frac{\pi}{2}\right] = -\cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$,

$v^{(n-2)}(x) = \sin\left[x + (n-2).\frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$ và $v^{(n-3)}(x) = \sin\left[x + (n-3).\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow [f(x)]^{(n)} = x[x^2 - 3n(n-1)]\sin\left(x + \frac{nx}{2}\right) - n[3x^2 - (n-1)(n-2)]\cos\left(x + \frac{nx}{2}\right)$$

3.2.3. Công thức Taylor, các khai triển cơ bản

Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a,b] và tồn tại đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a,b)$ đến cấp (n+1) trong (a,b), hãy tìm một đa thức $P_n(x)$ bậc n sao cho với $c \in (a,b)$ thì $f(c) = P_n(c)$, $f^{(k)}(c) = P_n^{(k)}(c)$ $(1 \le k \le n)$.

Muốn vậy, ta sẽ tìm $P_n(x)$ dưới dạng $P_n(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n$ và thỏa mãn các điều kiện trên.

- Thay x = c vào $P_n(x)$ ta được $P_n(c) = a_0$

- Thay x = c vào $P_n^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + na_n(x-c)^{n-1}$ ta được $P_n^{(1)}(c) = 1!a_1$

- Thay x = c vào $P_n^{(2)}(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x-c) + \ldots + n(n-1)a_n(x-c)^{n-2}$ ta được $P_n^{(2)}(c) = 2!a_2$

…

- Thay x = c vào $P_n^{(k)}(x) = k!a_k + \sum_{i=k+1}^{n} i(i-1)\ldots(i-k+1)a_i(x-c)^{i-k}$ ta được $P_n^{(k)}(c) = k!a_k$

- Thay x = c vào $P_n^{(n)}(x) = n!a_n$ ta được $P_n^{(n)}(c) = n!a_n$

Từ các đẳng thức trên cùng với yêu cầu đối với hàm số f(x) và đa thức $P_n(x)$ suy ra $a_0 = f(c)$, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$ $(1 \le k \le n)$.

Như vậy, đa thức cần tìm là $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$

Bây giờ ta đặt $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, bằng cách áp dụng định lý Cauchy, ta chứng minh được $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\bar{c})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ với $\bar{c}$ là một số nằm giữa x và c.

Như vậy, ta có $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right] + \dfrac{f^{(n+1)}(\bar{c})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ với $\bar{c}$ là một số nằm giữa x và c, được gọi là công thức Taylor hay là khai triển Taylor của hàm f(x) tại điểm x = c.

Khi c = 0 thì khai triển Taylor được gọi là khai triển Mac Laurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}.x^{n+1} \text{ với } 0 < \theta < 1$$

Các khai triển Mac Laurin của một số hàm sơ cấp ($n \in \mathbf{N}^*$)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots + x^n$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k = 1 - \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + (-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots + (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} (0 < \theta < 1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{1}{n+1}.\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-...-\frac{x^n}{n}-\frac{1}{n+1}.\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x\ (0<\theta<1)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x\ (0<\theta<1)$$

3.3. Định lý L'Hospitale

Định lý **3.3.1.** Giả sử các hàm số f(x), g(x) thỏa mãn các điều kiện

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (a có thể hữu hạn hoặc vô cùng)

(2) Các hàm số f(x), g(x) khả vi trong lân cận nào đó của điểm x = a và g(x) ≠ 0 trong lân cận đó, có thể trừ ra chính điểm x = a

(3) Tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô cùng) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Nhận xét **3.3.1.** Định lý 3.3.1. cho khả năng tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định $\frac{0}{0}$

Ví dụ **3.3.1.** Tìm các giới hạn (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2)}{\ln\left[\cos(2x^2-x)\right]}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

Bài giải

(a) Ta thấy f(x) = $\sin(3x^2)\to 0$ và g(x) = $\ln[\cos(2x^2-x)]\to 0$ khi $x\to 0$, nên biểu thức của giới hạn cần tìm có dạng vô định $\frac{0}{0}$ và các hàm số f(x), g(x) là các hàm sơ cấp nên khả vi trong miền xác định tương ứng của nó; mặt khác ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x\cos(3x^2)}{(4x-1)\tan(2x^2-x)}=-6\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(3x^2)}{(4x-1)(2x^2-x)\frac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}}=$$

$$-6\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos(3x^2)}{x}}{(4x-1).\frac{2x^2-x}{x}.\frac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x^2)}{(4x-1)(2x-1)\frac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}}=$$

$$-6.\frac{\lim\limits_{3x^2\to 0}\cos(3x^2)}{(4\lim\limits_{x\to 0}x-1)(2\lim\limits_{x\to 0}x-1)\lim\limits_{2x^2-x\to 0}\dfrac{\tan(2x^2-x)}{2x^2-x}}=-6.\frac{1}{(4.0-1)(2.0-1).1}=-6$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2)}{\ln\left[\cos(2x^2-x)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-6$$

(b) Ta thấy $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\to 0$ và $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\to 0$ khi $x\to+\infty$, nên biểu thức của giới hạn cần tìm có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ và các hàm số f(x), g(x) là các hàm sơ cấp nên khả vi trong miền xác định tương ứng của nó; mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}.\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$$

Định lý **3.3.2.** Giả sử các hàm số f(x), g(x) thỏa mãn các điều kiện

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ (a có thể hữu hạn hoặc vô cùng)

(2) Các hàm số f(x), g(x) khả vi trong lân cận nào đó của điểm x = a và $g(x)\neq 0$ trong lân cận đó, có thể trừ ra chính điểm x = a

(3) Tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô cùng) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Nhận xét **3.3.2.** Định lý 3.3.2. cho khả năng tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ **3.3.2.**

Tìm các giới hạn (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}$ với a > 0, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{a^x}$ với $m\in\mathbf{N}$ và a > 1, (c) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}$

Bài giải

(a) Ta thấy f(x) = lnx$\to+\infty$ và g(x) = $x^a\to+\infty$ khi $x\to+\infty$, nên biểu thức của giới hạn cần tìm có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$ và các hàm số f(x), g(x) là các hàm sơ cấp nên khả vi trong miền xác định tương ứng của nó; mặt khác ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=\frac{1}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^a}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$$

(b) Giới hạn cần tìm có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{mx^{m-1}}{a^x\ln a}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{m(m-1)x^{m-2}}{a^x\ln^2 a}\overset{(L')}{=}...\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{m!}{a^x\ln^m a}=\frac{m!}{\ln^m a}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=\frac{m!}{\ln^m a}.0=0$$

(c) Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{1-\cos x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x.2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{x\to+0}\cos x}{\lim\limits_{\frac{x}{2}\to+0}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

Nhận xét **3.3.3.**

(1) Nội dung của các Định lý 3.3.1., 3.3.2. tương tự nhau, chỉ khác nhau điều kiện (1), nên ta có thể phát biểu thành một định lý như sau: Nếu khi x→a (hoặc x→∞) các hàm số f(x), g(x) cùng có giới hạn bằng 0 hoặc bằng ∞, tức là $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nếu giới hạn ở vế trái đẳng thức trên tồn tại (hữu hạn hoặc vô cùng).

(2) Nếu phải tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định 0.∞, tức là tìm $\lim\limits_{x\to a}f(x).g(x)$ với $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ thì biến đổi tích f(x).g(x) thành $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ dạng vô định $\frac{0}{0}$, hoặc $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, để có thể sử dụng được Định lý L'Hospitale.

(3) Nếu phải tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định ∞ - ∞, tức là tìm $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$ với $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ thì biến đổi tích f(x) - g(x) thành dạng tích như sau

hoặc là $f(x)-g(x)=f(x).g(x)\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]$, hoặc là $f(x)-g(x)=f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]$, hoặc là $f(x)-g(x)=g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]$ đều có khả năng có dạng vô định 0.∞, sau đó sử dụng Nhận xét 3.3.3.(2) để có thể sử dụng được Định lý L'Hospitale.

(4) Nếu phải tìm giới hạn của biểu thức có dạng vô định 0^0, ∞^0, 1^∞, tức là phải tìm giới hạn của biểu thức $f(x)^{g(x)}$ thì ta dùng phép biến đổi $f(x)^{g(x)} = e^{g(x).\ln f(x)}$ và do tính liên tục của hàm số mũ ta được $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}e^{g(x).\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x).\ln f(x)}$. Sau đó, sử dụng Nhận xét 3.3.3.(2) đối với giới hạn $\lim\limits_{x\to a}g(x).\ln f(x)$ để có thể sử dụng được Định lý L'Hospitale.

(5) Mặc dù Định lý L'Hospitale hay còn được gọi là Quy tắc L'Hospitale là một công cụ mạnh để tìm giới hạn nhưng nó không phải là một công cụ vạn năng, nghĩa là nó không thể thay thế toàn bộ các phương pháp tìm giới hạn khác.

Ví dụ **3.3.3.** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

Bài giải

Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định 0.∞ nên theo Nhận xét 3.3.3.(2) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{(\cot x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-1/\sin^2 x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 x=$$

$$-\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\right)^2=-1^2=-1$$

Ví dụ **3.3.4.** Tìm giới hạn $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

Bài giải

Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định ∞ - ∞ nên theo Nhận xét 3.3.3.(3) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x-1}\left[(x-1)-\ln x\right]=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1-\ln x)'}{\left[(x-1)\ln x\right]'}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x-1+x\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=$$

$$\frac{1}{\lim_{x\to1}\ln x+2}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$$

Ví dụ **3.3.5.** Tìm các giới hạn (a) $\lim_{x\to0+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$, (b) $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, (c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x^{\tan 2x}$

Bài giải

(a) Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định 0^0 nên theo Nhận xét 3.3.3.(4) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to0+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to0+0}\frac{6}{1+2\ln x}.\ln x}=e^{6\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln x}{1+2\ln x}}\text{, ta có }6\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{1+2\ln x}\overset{(L')}{=}6\lim_{x\to0+0}\frac{(\ln x)'}{(1+2\ln x)'}=$$

$$6\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{2.\frac{1}{x}}=6\lim_{x\to0+0}\frac{1}{2}=6.\frac{1}{2}=3\Rightarrow\lim_{x\to0+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}=e^3$$

(b) Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định ∞^0 nên theo Nhận xét 3.3.3.(4) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}}$$

$$\text{ta có }\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}\overset{(L')}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^1=e$$

(c) Biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định 1^∞ nên theo Nhận xét 3.3.3.(4) ta biến đổi biểu thức đã cho và tìm giới hạn của nó như sau

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x^{\tan 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\tan 2x \ln(\tan x)} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \ln(\tan x)}$$

ta có $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \ln(\tan x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\tan x)}{\cot 2x} \overset{(L')}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{[\ln(\tan x)]'}{(\cot 2x)'} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{1}{\tan x}.\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = -\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x^{\tan 2x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Ví dụ **3.3.6.** Chứng minh rằng các giới hạn (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ không thể tìm được bằng Quy tắc L'Hospitale, trong khi các giới hạn này có thể tìm được bằng phương pháp khác.

Bài giải

(a) Ta thấy $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \to 0$ khi $x\to 0$ vì $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$, g(x) = sinx→0 khi x→0; nên biểu thức cần tìm giới hạn $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ không tồn tại vì $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ không tồn tại, điều kiện (3) của Quy tắc L'Hospitale không thỏa mãn, nên không thể tìm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ bằng Quy tắc này.

Ta tìm giới hạn này bằng cách khác

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ vì } \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1.$$

(b) Ta thấy f(x) = x – sinx → ∞ và g(x) = x + sinx → ∞ khi x → +∞; nên biểu thức cần tìm giới hạn $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-\sin x)'}{(x-\sin x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \tan^2\dfrac{x}{2}$ không tồn tại, điều kiện (3) của Quy tắc L'Hospitale không thỏa mãn, nên không thể tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ bằng Quy tắc này.

Ta tìm giới hạn này bằng cách khác

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-\sin x}{x}}{\frac{x+\sin x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \text{ vì } |\sin x| \le 1.$$

3.4. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số

Định nghĩa **3.4.1.** Hàm số y = f(x) xác định trong khoảng I được gọi là lồi nếu với ∀a∈I, ∀b∈I và với ∀t∈[0,1] luôn có tf(a) + (1 – t)f(b) ≥ f[ta + (1 – t)b].

Xem ý nghĩa hình học của hàm số lồi trong Học liệu tham khảo bắt buộc [1].

Định nghĩa **3.4.2.** Hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lõm nếu với $\forall a \in I$, $\forall b \in I$ và với $\forall t \in [0,1]$ luôn có $tf(a) + (1 - t)f(b) \le f[ta + (1 - t)b]$.

Xem ý nghĩa hình học của hàm số lõm trong Học liệu tham khảo bắt buộc [1].

Việc ứng dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số dựa trên các định lý sau đây.

Định lý **3.4.1.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trong (a,b). Khi đó:

(1) Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) trên $[a,b]$ là $f'(x) \ge 0$ $[f'(x) \le 0]$ với $\forall x \in (a,b)$.

(2) Nếu $f'(x) \ge 0$ $[f'(x) \le 0]$ với $\forall x \in (a,b)$ và nếu $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ tại ít nhất một điểm $x \in (a,b)$ thì $f(b) > f(a)$ $[f(b) < f(a)]$.

Định lý **3.4.2.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trong (a,b) (có thể trừ ra một số hữu hạn điểm); giả sử $c \in (a,b)$ tức là $a < c < b$ (có thể tại $x = c$ hàm số $f(x)$ không khả vi).

(1) Nếu khi x đi qua $x = c$ (từ trái sang phải) mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương (+) sang âm (-) thì $f(x)$ đạt cực đại tại đó.

(2) Nếu khi x đi qua $x = c$ (từ trái sang phải) mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương (-) sang âm (+) thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại đó.

(3) Nếu khi x đi qua $x = c$ mà $f'(x)$ không đổi dấu thì $f(x)$ không đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm đó.

Định lý **3.4.3.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng I nào đó và giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 $f''(x) > 0$ trong I. Khi đó, với $a < b$, $\forall a \in I$ và $\forall b \in I$; hàm số $f(x)$ lồi trong $[a,b]$.

Định lý **3.4.4.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng I nào đó và giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 $f''(x) < 0$ trong I. Khi đó, với $a < b$, $\forall a \in I$ và $\forall b \in I$; hàm số $f(x)$ lõm trong $[a,b]$.

Việc khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ thường được thực hiện theo trình tự như sau:

(1) Xác định D(f)

(2) Xác định tính chẵn, lẻ và tuần hoàn của hàm số

(3) Tìm $f'(x)$, tìm khoảng đơn điệu tăng, giảm

(4) Xác định các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có)

(5) Tìm $f''(x)$, xác định điểm uốn (nếu có), xác định tính lỗi, lõm (nếu cần)

(6) Tìm các đường tiệm cận đứng, ngang và xiên (nếu có)

(7) Lập bảng biến thiên

(8) Vẽ đồ thị

Xem các ví dụ trong Học liệu tham khảo bắt buộc [1].

3.5. Vi phân cấp 1 và vi phân cấp cao, ứng dụng vào phép tính gần đúng

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$. Giả sử tại điểm $x = x_0 \in (a,b)$, nếu cho đối số x một số gia $\Delta x = x - x_0$ thì tương ứng, hàm số $y = f(x)$ cũng có số gia $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục nên khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta y \to 0$. Như vậy, nếu lấy Δx làm VCB thì Δy là hàm số của Δx. Do đó, nếu ở lân cận điểm $x = x_0$ thì số gia Δy của hàm, tương ứng với số gia Δx của đối số, có thể viết được dưới dạng $\Delta y = A.\Delta x + o(\Delta x)$, trong đó A là một số thực chỉ phụ thuộc vào x_0 còn $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn so với Δx. Dựa vào định nghĩa của đạo hàm ta có thể xác định được A như sau.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x = x_0 ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{A.\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + 0 = A$ vì $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn so với Δx. Suy ra $\Delta y \approx f'(x_0).\Delta x$ khi $\Delta x \to 0$ hay $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$. Ta sử dụng công thức này để tính gần đúng giá trị của một hàm số tại một điểm x nếu biết giá trị của hàm số tại một điểm x_0 rất gần với điểm x.

Ví dụ **3.5.1.** Tính giá trị gần đúng của các hàm số y = f(x) tại điểm x tương ứng

(a) $y = f(x) = \sqrt{x}$ tại x = 3,98; (b) $y = f(x) = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ tại x = 0,15

Bài giải

(a) Chọn $x_0 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = x - x_0 = 3{,}98 - 4 = -0{,}02 \\ y_0 = f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$, mặt khác $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Thay các giá trị vừa xác định vào công thức gần đúng $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta được $\sqrt{3{,}98} \approx 2 + \frac{1}{4}.(-0{,}02) = 1{,}995$

(b) Chọn $x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = x - x_0 = 0{,}15 - 0 = 0{,}15 \\ y_0 = f(x_0) = f(0) = \sqrt[5]{\frac{2-0}{2+0}} = 1 \end{cases}$, mặt khác $f'(x) = -\frac{4}{5(2+x)^2}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{4}{5}}$

$f'(x_0) = -\frac{4}{5(2+x_0)^2}\left(\frac{2+x_0}{2-x_0}\right)^{\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5(2+0)^2}\left(\frac{2+0}{2-0}\right)^{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{5} = -0{,}2$. Thay các giá trị vừa xác định vào công thức gần đúng $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta được $f(0{,}15) \approx 1 - 0{,}2.0{,}15 = 0{,}97$

Ví dụ **3.5.2.** Tính giá trị gần đúng của (a) $\sqrt[3]{26{,}19}$; (b) $\sin 29^0$

Bài giải

(a) Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, nếu chọn x_0 = 27 thì $f(x_0) = \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{27} = 3$, $f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$ và Δx = 26,19 – 27 = -0,81. Thay các giá trị vừa xác định vào công thức gần đúng $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta được $\sqrt[3]{26{,}19} \approx 3 + \frac{1}{27}.(-0{,}81) = 2{,}97$

(b) Xét hàm số f(x) = sinx với $x = \frac{\pi}{180^0}.29^0 = \frac{29\pi}{180}$. Chọn $x_0 = \frac{\pi}{180^0}.30^0 = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow f(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ và $\Delta x = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180}$. Mặt khác f'(x) = cosx $\Rightarrow f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Thay các giá trị vừa xác định vào công thức gần đúng $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta được

$$\sin 29^0 \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.(-\frac{\pi}{180}) \approx 0{,}48$$

Định nghĩa **3.5.1.** (*Vi phân cấp 1*) Giả sử hàm số y = f(x) xác định, liên tục trên [a,b] và khả vi (tức là tồn tại đạo hàm) tại mọi điểm $x = x_0 \in (a,b)$. Khi đó biểu thức $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là vi phân cấp 1 của hàm số y = f(x) tại điểm x = x_0 và ký hiệu là dy hoặc df, nghĩa là $dy = f'(x_0)\Delta x$ hoặc $df = f'(x_0)\Delta x$. Đặc biệt, khi f(x) = x thì $dx = f'(x_0)\Delta x = (x)'\big|_{x=x_0} \Delta x = 1\big|_{x=x_0} \Delta x = \Delta x$, do đó $dy = f'(x_0)dx$.

Vì x_0 là một điểm bất kỳ thuộc khoảng (a,b) nên ta có thể dùng x thay cho x_0 và như vậy dy = f'(x)dx được gọi là vi phân cấp 1 của hàm số f(x) tại điểm x. Từ đây ta suy ra $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, nghĩa là đạo hàm của hàm y = f(x) tại điểm x là tỷ số của hai vi phân dy và dx tại điểm x, điều này cũng giải thích cho việc dùng ký hiệu $\frac{dy}{dx}$ cho f'(x).

Các tính chất của vi phân cấp 1

(1) $d[\alpha f(x)] = \alpha d[f(x)]$

(2) $d[f(x) + g(x)] = d[f(x)] + d[g(x)]$

(3) $d[f(x)g(x)] = g(x)d[f(x)] + f(x)d[g(x)]$

(4) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)d[f(x)] - f(x)d[g(x)]}{g^2(x)}$ với $g(x) \neq 0$

(5) Công thức đối với vi phân cấp 1 đúng cả trong trường hợp khi đối số của hàm số không phải là biến độc lập, tức là vẫn đúng đối với hàm hợp. Tính chất này được gọi là tính bất biến về dạng của vi phân cấp 1.

Bảng vi phân cấp 1 của các hàm sơ cấp

TT	x là biến độc lập	Biến u = u(x)
1	$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$	$d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1}du$
2	$d(a^x) = a^x \ln a dx \Rightarrow d(e^x) = e^x dx$	$d(a^u) = a^u \ln a du \Rightarrow d(e^u) = e^u du$
3	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$ với $a > 0$ và $x \neq 0$ $\Rightarrow d(\ln x) = \frac{dx}{x}$ với $a > 0$ và $x \neq 0$	$d(\log_a u) = \frac{du}{u \ln a}$ với $a > 0$ và $u \neq 0$ $\Rightarrow d(\ln u) = \frac{du}{u}$ với $a > 0$ và $u \neq 0$
4	d(sinx) = cosxdx	d(sinu) = cosudu
5	d(cosx) = -sinxdx	d(cosu) = -sinudu
6	$d(\tan x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$d(\tan u) = \frac{du}{\cos^2 u}$
7	$d(\cot x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$d(\cot u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$
8	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ với $\|x\| < 1$	$d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ với $\|u\| < 1$
9	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ với $\|x\| < 1$	$d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ với $\|u\| < 1$
10	$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$	$d(\arctan u) = \frac{du}{1+u^2}$
11	$d(\text{arccot}\, x) = -\frac{dx}{1+x^2}$	$d(\text{arccot}\, u) = -\frac{du}{1+u^2}$

Định nghĩa **3.5.2.** (*Vi phân cấp cao*) Giả sử dy = f'(x)dx là vi phân cấp 1 của hàm số y = f(x) tại điểm x, khi x thay đổi, nó cũng thay đổi theo, do đó nó là hàm số của x. Nếu hàm số này cũng có vi phân cấp 1 tại điểm x thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp 2 của hàm số y = f(x) và được ký hiệu là $d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = f^{(2)}(x)dx^2$. Tổng quát, vi phân cấp n của hàm số y = f(x) là vi phân cấp 1 của vi phân cấp n-1 của hàm số f(x) và được ký hiệu là $d^ny = d(d^{n-1}y) = d[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}] = f^{(n)}(x)dx^n$.

Các tính chất của vi phân cấp cao

(1) $d^n[\alpha f(x)] = \alpha d^n[f(x)]$

(2) $d^n[f(x) + g(x)] = d^n[f(x)] + d^n[g(x)]$

(3) $d^n\left[f(x)g(x)\right] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}\left[f(x)\right]d^k\left[g(x)\right]$

Chú ý. Công thức đối với vi phân cấp $n \geq 2$ *không còn đúng* khi đối số của hàm số không phải là biến độc lập.

Bài tập

3.1. Dùng định nghĩa đạo hàm, tìm đạo hàm của các hàm số sau đây, trong miền xác định của nó

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(c) $f(x) = \ln(1 + x)$ (d) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$

3.2. Dùng định nghĩa đạo hàm, tìm đạo hàm trái f'(x-0), đạo hàm phải f'(x+0) và đạo hàm f'(x) (nếu tồn tại), tại điểm x tương ứng, của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ tại $x = 0$ (b) $f(x) = |\sin 2x|$ tại $x = 0$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$ (d) $f(x) = |1 - x^2|$ tại $x = \pm 1$

3.3. Xác định a, b để các hàm sau đây liên tục và khả vi với $\forall x \in \mathbf{R}$

(a) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{khi} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \text{khi} \quad x > 1 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{khi} \quad x < 0 \\ a\cos x + b\sin x & \text{khi} \quad x \geq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{khi} \quad |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{khi} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$

3.4. Chứng minh rằng, đạo hàm của một hàm số lẻ là một hàm số chẵn và đạo hàm của một hàm số chẵn là một hàm số lẻ, nếu đạo hàm của hàm số tồn tại.

3.5. Chứng minh rằng, đạo hàm của một hàm số tuần hoàn cũng là một hàm số tuần hoàn có cùng chu kỳ, nếu đạo hàm của hàm số tồn tại.

3.6. Dùng định nghĩa đạo hàm, tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{12} - 1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2^x - 16}{x - 4}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27 + x} - 3}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + x - 2}{x - 1}$

HD: (a) Xét hàm số $f(x) = (1+x)^{12}$, tìm f'(0) theo 2 cách: Cách 1. Dùng định nghĩa đạo hàm sẽ nhận được biểu thức giới hạn cần tính; Cách 2. Theo quy tắc. Hai kết quả này phải bằng nhau vì cùng là f'(0). Cách giải (b), (c) và (d) tương tự như cách giải (a).

3.7. Tính đạo hàm của các hàm số sau

(a) $y = \arcsin\dfrac{2x^2}{1 + x^4}$ với $|x| < 1$ (b) $y = \left|\ln|x|\right|$

(c) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x . \left(\dfrac{b}{x}\right)^a . \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$ với $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$ (d) $y = x^{x^x}$ với $x > 0$

(e) $y = a^{x^x} + x^{a^x} + x^{x^a}$ với $a > 0$, $x > 0$ (f) $y = x.|x|$

(g) $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$ với $x > 1$ (h) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(i) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ với $x > 0$ (k) $y = \cos\left[\cos(\cos x)\right]$

(l) $y = (\sin x)^{\tan x}$ (m) $y = e^x \arctan e^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$

3.8. (a) Tìm đạo hàm y'_x nếu biết y = y(x) thỏa mãn biểu thức $y^3 + 3y = x$; (b) Tìm đạo hàm x'_y nếu biết x = x(y) thỏa mãn biểu thức y = x + lnx với x > 0; (c) Tìm đạo hàm x'_y nếu biết x = x(y) thỏa mãn biểu thức $y = x + e^x$; (d) Tìm đạo hàm x'_y nếu biết x = x(y) thỏa mãn biểu thức $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ với x < 0.

3.9. Tính đạo hàm y'_x của các hàm số y = f(x) được cho dưới dạng tham số

(a) $\begin{cases} x = a\sin t + \sin at \\ y = a\cos t + \cos at \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ với $0 \le t \le \pi$

(c) $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = 1 + e^{at} \\ y = at + e^{-at} \end{cases}$

3.10. Tìm đạo hàm y'_x của các hàm ẩn

(a) $x^y = y^x$ (b) $x\sin y + y\sin x = 0$

(c) $e^x + e^y - 2^{xy} = 1$ (d) $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

(e) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ với a > 0 (f) $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

3.11. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm $M(x_0,y_0)$ nằm trên elip.

HD: Sử dụng ý nghĩa hình học của đạo hàm và quy tắc tính đạo hàm của hàm ẩn.

3.12. Chứng minh đẳng thức $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$

HD: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1+x)^n$ tại điểm x = 1.

3.13. Hàm số f(x) với D(f) = [a,b] tương ứng sau đây, có thỏa mãn định lý Rolle không? Nếu thỏa mãn thì thỏa mãn với giá trị $c \in (a,b)$ nào?

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 100$ với [a,b] = [1,5] (b) $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ với [a,b] = [0,8]

3.14. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$ với D(f) = [0,16], khi đó f(0) = f(16) = 4. Tuy nhiên, đạo hàm $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-8}} \ne 0$ với $\forall x \in (0,16)$. Điều này có mâu thuẫn với định lý Rolle không?

3.15. Chứng minh rằng, đạo hàm f'(x) của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ có nghiệm thực trong (-1,1).

3.16. Chứng minh các bất đẳng thức

(a) $|\sin a - \sin b| \le |a - b|$

(b) $|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$

(c) $\frac{\alpha - \beta}{\cos^2\beta} \le \tan\alpha - \tan\beta \le \frac{\alpha - \beta}{\cos^2\alpha}$ với $0 < \beta \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{a-b}{b} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{a}$ với 0 < a < b

(e) $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$ với b < a

(f) $\frac{1}{n^{a+1}} < \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)^a} - \frac{1}{n^a}\right]$ với a > 0, $n \in \mathbf{N}$

HD: Sử dụng định lý Lagrange cho từng hàm số thích hợp với mỗi bất đẳng thức.

3.17. Chứng minh các bất đẳng thức

(a) $e^x > 1 + x$ với $x \neq 0$ (b) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ với $x > 0$

(c) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ với $x > 0$ (d) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

HD: Với mỗi bất đẳng thức, xét hàm số f(x) thích hợp, chẳng hạn $f(x) = e^x - x - 1$ đối với (a). Lưu ý rằng, nếu $f'(x) > 0$ thì hàm số f(x) đơn điệu tăng, còn nếu $f'(x) < 0$ thì hàm số đơn điệu giảm.

3.18. Chứng minh các đẳng thức

(a) $2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi\,\mathrm{sgn}(x)$ với $|x| \geq 1$

(b) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ với $|x| < \frac{1}{2}$

HD: Lưu ý rằng đạo hàm của một biểu thức mà bằng 0 thì biểu thức đó là một hằng số.

3.19. Tính các tổng

(a) $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ (b) $Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1}$

(c) $R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\sin kx$ (d) $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx$

HD: Để ý rằng (a) $(x^k)' = kx^{k-1}$, (b) $Q_n(x) = P_n(x) + x[P_n(x)]' = [xP_n(x)]'$, (c) $(\cos kx)' = -k\sin kx$, (d) $(\sin kx)' = k\cos kx$.

3.20. Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) khả vi đến cấp n thì $[f(ax+b)]_x^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$

3.21. Giả sử hàm số f(x) là hàm số chẵn có miền xác định đối xứng qua gốc tọa độ và khả vi mọi cấp tại điểm x = 0.

(a) Chứng minh rằng tất cả các đạo hàm bậc lẻ tại điểm x = 0 đều bằng không

(b) Tìm khai triển Mac Laurin của hàm số f(x) = cosx

3.22. Giả sử hàm số f(x) là hàm số lẻ có miền xác định đối xứng qua gốc tọa độ và khả vi mọi cấp tại điểm x = 0.

(a) Chứng minh rằng tất cả các đạo hàm bậc chẵn tại điểm x = 0 đều bằng không

(b) Tìm khai triển Mac Laurin của hàm số f(x) = sinx

3.23. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số f(x) sau đây, tại điểm $x = x_0$ tương ứng

(a) f(x) = arctanx tại x = 0 (b) $f(x) = x^{n-1}\ln x$ tại x = 1

3.24. Cho hàm số $f(x) = (x - a)^n.g(x)$ có miền xác định D(f) = **R**, trong đó g(x) là hàm số liên tục và có đạo hàm liên tục đến cấp n – 1 trên D(f). Tìm $f^{(n)}(a)$.

3.25. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $cx + d \neq 0$, từ kết quả nhận được suy ra đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = \frac{ax}{cx+d}$ với $cx + d \neq 0$ (b) $f(x) = \frac{b}{cx+d}$ với $cx + d \neq 0$

(c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ với $x \neq 1$ (d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ với $x \neq -1$ (e) $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$

3.26. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$ với $x \neq \pm a$ (b) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ với $x \neq 1$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ với $x\neq 0$ và $x\neq 1$ (d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ với $x\neq 1$ và $x\neq 2$

(e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ với $x\neq \pm 2$ (f) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ với $x\neq \pm 1$

(g) $f(x)=\dfrac{a}{\sqrt{bx+c}}$ với $bx + c > 0$ (h) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ với $x^2 + x - 2 > 0$

(i) $f(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$ (k) $f(x) = e^x x^n$

3.27. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = \sin(ax)$ (b) $\cos(ax)$

(c) $f(x) = \sin(ax)\cos(bx)$ (d) $f(x) = \cos(ax)\cos(bx)$ (e) $f(x) = \sin(ax)\sin(bx)$

(f) $f(x) = \sin^2x$ (g) $f(x) = \cos^2x$ (h) $f(x) = \sin^2x.\cos^2x$

(i) $f(x) = \sin^3x$ (k) $f(x) = \cos^3x$ (l) $f(x) = \sin x.\cos^2x$

3.28. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ (b) $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$

3.29. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

(a) $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sin(dx)$ (b) $f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(dx)$

(c) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{dx}$ (d) $f(x)=\ln\dfrac{ax+b}{ax-b}$ với $\dfrac{ax+b}{ax-b}>0$

3.30. Dùng Quy tắc L'Hospitale để tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ (c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\cot\frac{\pi}{2}x}$

(g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2a}}\dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin x)}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ (l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$ (m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 3x-3xe^x+3x^2}{\arctan x-\sin x-\frac{x^3}{6}}$

3.31. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^2\ln x$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x.\ln(x-1)$ (e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right)$ (f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\pi-2\arctan x)\ln x\right]$

3.32. Tìm các giới hạn

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0}(1+x)^{\ln x}$ (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2\cos x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x+e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi}{4}x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ (h) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{x}{2a}\pi}$ (i) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

3.33. Chứng minh rằng các giới hạn (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\cot x}$, (b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, (c) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+\cos x}{x}$ không thể tìm được bằng Quy tắc L'Hospitale, trong khi các giới hạn này có thể tìm được bằng phương pháp khác.

3.34. Tính giá trị gần đúng của

(a) Hàm số y = arcsinx tại x = 0,51;

(b) Diện tích hình tròn có bán kính r = 3,02m;

(c) Thể tích hình cầu có bán kính r = 2,01m.

3.35. Tính giá trị gần đúng của (a) $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$; (b) $\sqrt[4]{15,8}$; (c) arctan0,98

Chương 4. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

4.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định

4.1.1. Định nghĩa, bảng các nguyên hàm cơ bản

Định nghĩa **4.1.1.** Cho hàm số f(x) xác định trong (a,b); ta nói rằng hàm số F(x) xác định trong (a,b) là một nguyên hàm của f(x) nếu F(x) khả vi trong (a,b) và F'(x) = f(x) hay dF(x) = f(x)dx với $\forall x \in (a,b)$.

Ví dụ **4.1.1.**

(a) Nếu hàm số f(x) = x^3 thì một nguyên hàm của nó là $F(x) = \frac{x^4}{4}$ vì $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$

(b) Nếu hàm số f(x) = 3 + cos5x thì một nguyên hàm của nó là $F(x) = 3x + \frac{\sin 5x}{5}$ vì $F'(x) = \left(3x + \frac{\sin 5x}{5}\right)' = 3 + \cos 5x = f(x)$

Định lý **4.1.1.** Giả sử hàm số F(x) khả vi trong (a,b) và F(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) với $\forall x \in (a,b)$. Khi đó:

(1) Với mọi hằng số C thì F(x) + C cũng là nguyên hàm của hàm số f(x) với $\forall x \in (a,b)$;

(2) Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số f(x) với $\forall x \in (a,b)$ đều có dạng F(x) + C.

Định nghĩa **4.1.2.** Cho hàm số f(x) xác định trong (a,b), giả sử hàm số F(x) xác định trong (a,b) là một nguyên hàm của f(x) trong (a,b) thì họ các nguyên hàm F(x) + C (C là một hằng số tùy ý) của f(x) trong (a,b) được gọi là *tích phân không xác định* của f(x) với $\forall x \in (a,b)$ và ký hiệu là $\int f(x)dx$, trong đó dx là vi phân của đối số x.

Ký hiệu $\int$ gọi là *dấu tích phân*, f(x) gọi là *hàm số lấy tích phân*, x gọi là *biến lấy tích phân*, f(x)dx gọi là *biểu thức dưới dấu tích phân*.

Chú ý. Khi cần sử dụng khái niệm nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) trên [a,b] thì có nghĩa là F(x) là nguyên hàm của f(x) với $\forall x \in (a,b)$ và F'(a+0) = f(a), F'(b–0) = f(b).

Định lý **4.1.2.** Mọi hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a,b] có nguyên hàm trên [a,b].

Các tính chất của nguyên hàm

(1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

(2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

(3) $\int dF(x) = F(x) + C$ với C là hằng số tùy ý

(4) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$ với $A \neq 0$ là một hằng số tùy ý

(5) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(6) Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và u = φ(x) thì $\int f(u)du = F(u) + C$ với C là hằng số tùy ý

Bảng các nguyên hàm cơ bản

(1) $\int 0dx = C$

(2) $\int 1.dx = \int dx = x + C$

$$(3)\int x^{\alpha}dx=\begin{cases}\ln|x|+C & \text{khi}\quad \alpha=-1\\ \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C & \text{khi}\quad \alpha\neq-1\end{cases}$$

$$(4)\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$$

$$(5)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$$

$$(6)\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\Rightarrow\int e^x dx=e^x+C$$

$$(7)\int \sin x dx=-\cos x+C$$

$$(8)\int \cos x dx=\sin x+C$$

$$(9)\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$$

$$(10)\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$$

4.1.2. Các phương pháp tính tích phân không xác định

4.1.2.1. Sử dụng bảng các nguyên hàm cơ bản

Đây là phương pháp tính tích phân tự nhiên nhất, khi đó ta biến đổi hàm số lấy tích phân và biến lấy tích phân, tức là biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân về dạng có thể sử dụng các nguyên hàm cơ bản.

Ví dụ **4.1.2.** Tính các tích phân

$$(a)\int(2x^3-5x^2+7x-3)dx=2\int x^3dx-5\int x^2dx+7\int xdx-3\int dx=$$
$$2.\frac{1}{4}x^4-5.\frac{1}{3}x^3+7.\frac{1}{2}x^2-3x+C=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-3x+C$$

$$(b)\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^2dx=\int\left(x+2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\int xdx+2\int x^{\frac{1}{6}}dx+\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$$
$$\frac{1}{2}x^2+2\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}+\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C=\frac{1}{2}x^2+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C$$

$$(c)\int a^x b^{2x}c^{3x}dx=\int(ab^2c^3)^x dx=\frac{(ab^2c^3)^x}{\ln(ab^2c^3)}+C$$

$$(d)\int x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2xdx)=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2)=$$
$$\frac{1}{2}.\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}+C$$

$$(e)\int(x^2-3x+1)^{10}(2x-3)dx=\int(x^2-3x+1)^{10}\left[(2x-3)dx\right]=$$
$$\int(x^2-3x+1)^{10}d(x^2-3x+1)=\frac{(x^2-3x+1)^{11}}{11}+C$$

(f) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx = \int (\ln x)^4\left(\frac{dx}{x}\right) = \int (\ln x)^4 d(\ln x) = \frac{1}{5}(\ln x)^5 + C = \frac{\ln^5 x}{5} + C$

(g) $\int e^{3\cos x}\sin x dx = \frac{1}{3}\int e^{3\cos x}(3\sin x dx) = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x} d(3\cos x) = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C$

(h) $\int (\tan x + \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + 2\tan x\cot x + \cot^2 x)dx = \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x)dx =$

$\int (\tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1)dx = \int (\tan^2 x + 1)dx + \int (\cot^2 x + 1)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$\tan x - \cot x + C$

4.1.2.2. Đổi biến

Trong nhiều trường hợp, khi tính tích phân $\int f(x)dx,$ nếu để biến lấy tích phân là x thì không thấy được tích phân cần tính đó gần với dạng nào trong số các nguyên hàm cơ bản, khi đó cần tìm cách đổi sang biến mới, để hy vọng với biến mới thì tích phân cần tính có dạng gần với các nguyên hàm cơ bản. Không thể có một quy tắc cụ thể nào để thực hiện phép đổi biến thích hợp được, tuy nhiên, cũng có thể đưa ra hai dạng đổi biến thường dùng sau đây:

(1) Đặt biến cũ x = φ(t) với φ(t) là hàm đơn điệu, khả vi liên tục đối với biến mới t. Khi đó, công thức đổi biến là $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d[\varphi(t)] = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

(2) Đặt biến mới u = ψ(x) với ψ(x) là hàm đơn điệu, khả vi liên tục đối với biến cũ x. Khi đó, công thức đổi biến là $\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int f[\psi(x)]d[\psi(x)] = \int f(u)du$.

Sau khi tìm được nguyên hàm đối với với biến mới, cần biểu diễn kết quả trở về biến cũ.

Ví dụ **4.1.3.** Tính các tích phân

(a) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = \varphi(t) = t^3 \Rightarrow \begin{cases} dx = \varphi'(t)dt = 3t^2dt \\ \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sin t}{t^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{3t^2\sin t dt}{t^2} = 3\int \sin t dt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C$

(b) $\int (2x+3)^{20}dx$, có thể tính tích phân này mà không cần đổi biến, tức là chỉ cần khai triển biểu thức $(2x + 3)^{20}$ theo Công thức nhị thức Newton và lấy tích phân từng số hạng là được, tuy nhiên cách này có khối lượng tính toán lớn. Đơn giản hơn, ta có thể đổi biến mới t = ψ(x) = 2x + 3 ⇒ dt = d[ψ(x)] = ψ’(x)dx = 2dx $\Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

$\Rightarrow \int (2x+3)^{20}dx = \int t^{20}.\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^{20}dt = \frac{1}{2}.\frac{t^{21}}{21} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+3)^{21}}{42} + C$

Nhận xét. Qua ví dụ (b) ta có thể tổng quát hóa một một trường hợp đổi biến như sau: Giả sử ta cần tích tích phân $\int f(ax+b)dx$ với a ≠ 0, mà một nguyên hàm của tích phân $\int f(x)dx$ đã biết là F(x), khi đó ta đổi biến t = ax + b ⇒ dt = (ax + b)’dx = adx ⇒ $dx = \frac{1}{a}dt$, do đó

$\int f(ax+b)dx = \int f(t).\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Khi tính tích phân $\int f(ax+b)dx$, trong thực tế có thể không cần đổi biến ax + b = t, mà chỉ cần để ý rằng $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$ và như vậy $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = F(ax+b)+C$, chẳng hạn, cần tính tích phân $\int \sin(ax+b)dx$ với $a \neq 0$, ta có

$$\int \sin(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)d(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

(c) $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$, đặt $\sqrt{x^3+5} = t \Rightarrow x^3+5 = t^2 \Rightarrow d\left(x^3+5\right) = d(t^2) \Rightarrow \left(x^3+5\right)'dx = (t^2)'dt$

$$\Rightarrow 3x^2dx = 2tdt \Rightarrow x^2dx = \frac{2}{3}tdt \Rightarrow \int x^2\sqrt{x^3+5}dx = \int \sqrt{x^3+5}(x^2dx) = \int t.\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{3}\int t^2dt =$$

$$\frac{2}{3}.\frac{1}{3}t^3+C = \frac{2}{9}t^3+C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3+5}\right)^3+C = \frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5}+C$$

Nhận xét. Qua ví dụ (c) ta có thể tổng quát hóa một một trường hợp đổi biến như sau: Nếu hàm dưới dấu tích phân là tích của hai thừa số, một thừa số phụ thuộc vào hàm $\psi(x)$ nào đó, còn thừa số kia là $\psi'(x)$ (có thể sai khác nhau một hệ số không đổi) thì dùng phép đổi biến $\psi(x)$.

(d) $\int \frac{(2\ln x+5)^3}{x}dx$, ta thấy đạo hàm của thừa số (2lnx + 5) là $\frac{2}{x}$ còn thừa số kia là $\frac{1}{x}$ khác với đạo hàm của thừa số (2lnx + 5) chỉ bởi hệ số 2 nên theo nhận xét trên ta đổi biến 2lnx + 5 = $\psi(x)$ = t.

Khi đó d(2lnx + 5) = dt ⇒(2lnx + 5)'dx = dt $\Rightarrow \frac{2}{x}dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}dt$, do đó

$$\int \frac{(2\ln x+5)^3}{x}dx = \int (2\ln x+5)^3\frac{dx}{x} = \int t^3.\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3dt = \frac{1}{2}.\frac{t^4}{4}+C = \frac{t^4}{8}+C = \frac{(2\ln x+5)^4}{8}+C$$

(e) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, đổi biến f(x) = t ⇒ d[f(x)] = dt hay f'(x)dx = dt, do đó

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|f(x)|+C$$

chẳng hạn, cần tính tích phân $\int \frac{xdx}{x^2+1}$, ta thấy nếu đặt f(x) = x^2 + 1 thì $x = \frac{1}{2}f'(x)$, do đó tích phân

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C = \ln\left|x^2+1\right|+C = \ln\left(x^2+1\right)+C$$

(f) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$, đổi biến f(x) = t ⇒ d[f(x)] = dt hay f'(x)dx = dt, do đó

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}+C = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{f(x)}+C$$

Ta vẫn nhận được kết quả như trên nếu đổi biến $\sqrt{f(x)} = t$

4.1.2.3. Tích phân từng phần

Theo tính chất của vi phân cấp 1: d(uv) = udv + vdu hay udv = d(uv) – vdu $\Rightarrow \int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$ với u = $\varphi(x)$ và v = $\psi(x)$ là các hàm khả vi liên tục của x. Nhờ công thức này mà việc lấy tích phân $\int udv$ được đưa về việc lấy tích phân $\int vdu$ có khả năng đơn giản hơn tích phân $\int udv$ hoặc cùng dạng với tích phân $\int udv$.

Muốn vậy, để làm hàm u ta lấy hàm mà đạo hàm của nó đơn giản hơn, còn dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân mà tích phân của phần này, hoặc là đã biết hoặc có thể tìm được.

Chẳng hạn, đối với các tích phân dạng $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$, trong đó P(x) là đa thức thì nên đặt u = P(x) và dv tương ứng là các biểu thức $e^{ax}dx$, sinaxdx, cosaxdx; đối với các tích phân dạng $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin axdx$, $\int P(x)\arccos axdx$, trong đó P(x) là đa thức thì nên đặt u tương ứng bằng các hàm số lnx, arcsinx, arccosx và dv = P(x)dx.

Ví dụ **4.1.4.** Tính các tích phân

(a) $\int \ln xdx$, đặt u = lnx còn dv = dx, khi đó $du = \dfrac{dx}{x}$ và $v = x \Rightarrow \int \ln xdx = \int udv = uv - \int vdu =$

$$x\ln x - \int x.\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C = x\ln\frac{x}{e} + C$$

(b) $\int \arctan xdx$, đặt u = arctanx còn dv = dx, khi đó $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ và v = x

$$\Rightarrow \int \arctan xdx = \int udv = uv - \int vdu = x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

(c) $\int x\sin xdx$, đặt u = x còn dv = sinxdx, khi đó du = dx và v = -cosx

$$\Rightarrow \int x\sin xdx = \int udv = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Nhận xét. Nếu chọn các biểu thức u và dv không khéo, chẳng hạn, u = sinx, dv = xdx, thì du = cosxdx, $v = \dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow \int x\sin xdx = \int udv = \dfrac{1}{2}x^2\sin x - \dfrac{1}{2}\int x^2\cos xdx$ sẽ dẫn đến tích phân khác phức tạp hơn tích phân xuất phát!

(d) $\int x^2e^xdx$, chọn $u = x^2$, $dv = e^xdx$, khi đó du = 2xdx, $v = e^x$

$$\Rightarrow \int x^2e^xdx = \int udv = x^2e^x - 2\int xe^xdx$$

Như vậy, ta đã hạ được bậc của x xuống một đơn vị. Để tính $\int xe^xdx$ ta lại tiếp tục sử dụng phương pháp tích phân từng phần. Đặt u = x, $dv = e^xdx$, khi đó du = dx, $v = e^x$

$$\Rightarrow \int xe^xdx = \int udv = xe^x - \int e^xdx = xe^x - e^x + C$$

Do đó $\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

(e) $I = \int e^x\sin xdx$, đặt $u = e^x$, dv = sinxdx, khi đó $du = e^xdx$, v = -cosx

$$\Rightarrow I = \int e^x\sin xdx = \int udv = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos xdx$$

Đến đây, ta có cảm giác rằng, việc sử dụng phương pháp tích phân từng phần không đến đích được vì tích phân vừa nhận được không đơn giản hơn tích phân xuất phát. Tuy vậy, ta tiếp tục sử dụng phương pháp tích phân từng phần đối với tích phân $I = \int e^x\cos xdx$. Đặt $u = e^x$, dv = cosxdx, khi đó $du = e^xdx$, v = sinx $\Rightarrow \int e^x\cos xdx = \int udv = e^x\sin x - \int e^x\sin xdx = e^x\sin x - I$.

Do đó $I = -e^x\cos x + e^x\sin x - I \Rightarrow I = \int e^x\sin xdx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

(f) Cách tính tích phân I ở trên gợi ý cho ta việc tính đồng thời hai tích phân $\begin{cases} I = \int e^x\sin xdx \\ J = \int e^x\cos xdx \end{cases}$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần lần lượt đối với các tích phân I, J tương tự như ở Ví dụ (e) ta được hệ 2 phương trình đối với 2 ẩn I, J là $\begin{cases} I - J = -e^x \cos x \\ I + J = e^x \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_1 \\ J = \dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C_2 \end{cases}$

Ví dụ **4.1.5.** Tìm công thức truy hồi để tính tích phân $I_n = \int \dfrac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ với $a \neq 0$ và n∈**N***

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} =$$

$$\frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x(xdx)}{(x^2+a^2)^n}$$

Đặt $u = x,\ dv = \dfrac{xdx}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow du = dx$ và $\int dv = \int \dfrac{xdx}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(x^2)}{(x^2+a^2)^n} =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-n} d(x^2+a^2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{-n+1}(x^2+a^2)^{-n+1} = -\frac{1}{2(n-1)}.\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\Rightarrow I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int udv = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left[uv - \int vdu\right] =$$

$$\frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left[uv - \int vdu\right] = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left[-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] =$$

$$\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} I_{n-1} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

Như vậy, ta tìm được công thức truy hồi $I_n = \dfrac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \dfrac{1}{a^2}\dfrac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$ với $n \geq 2$ và

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

Qua một số ví dụ và bài tập, ta bổ sung một số tích phân thường gặp vào Bảng các nguyên hàm cơ bản để dùng khi cần.

Bảng các nguyên hàm cơ bản (bổ sung)

(11) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

(12) $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

(13) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$ với $a \neq 0$

(14) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$ với $a \neq 0$

(15) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$ với $a \neq 0$

(16) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$ với $a \neq 0$

(17) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

(18) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

(19) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

(20) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

4.1.3. Tính tích phân các phân thức hữu tỷ

Phân thức hữu tỷ là phân thức có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó P(x) và Q(x) là các đa thức. Phân thức hữu tỷ được gọi là thực sự nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x), ngược lại, bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) thì được gọi là không thực sự.

Phân thức hữu tỷ đơn giản nhất là các phân thức thực sự có dạng sau:

(I) $\frac{A}{x-a}$

(II) $\frac{A}{(x-a)^m}$ trong đó $m \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$

(III) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ trong đó $\frac{p^2}{4} - q < 0$, tức là tam thức bậc hai $x^2 + px + q$ không có nghiệm thực

(IV) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ trong đó $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ và $\frac{p^2}{4} - q < 0$, tức là tam thức bậc hai $x^2 + px + q$ không có nghiệm thực.

Trong cả bốn trường hợp trên, các số A, B, a, p, q là các số thực. Các phân thức nói trên được gọi tương ứng là các phân thức hữu tỷ đơn giản nhất loại I, II, III và IV.

4.1.3.1. Tính tích phân các phân thức hữu tỷ đơn giản nhất

Tính tích phân phân thức loại I: $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$

Tính tích phân phân thức loại II: $\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A\int (x-a)^{-m}d(x-a) =$

$$\frac{A}{-m+1}(x-a)^{-m+1} + C = \frac{A}{(m-1)}.\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$$

Tính tích phân phân thức loại III: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

- Bước 1. Tính tích phân $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$

Ta biến đổi $x^2+px+q = x^2+2.\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$, vì $\frac{p^2}{4} - q < 0$ nên có thể đặt $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, do đó $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2$.

Đặt $t = x + \frac{p}{2} \Rightarrow dt = dx$ và $x^2+px+q = t^2+a^2 \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$, trở về biến cũ ta được $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$

- Bước 2. Tính tích phân $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

Ta thấy đạo hàm của mẫu số của biểu thức lấy tích phân là $(x^2 + px + q)' = 2x + p$, do đó ta biến đổi tử số của biểu thức lấy tích phân thành dạng $Ax+B=\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)$, khi đó

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}I_1+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_2$$

Tính $I_1=\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}=\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}=\ln(x^2+px+q)+C_1$ vì $x^2 + px + q > 0$ với $\forall x$

Tính $I_2=\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_2$ đã được tính ở Bước 1

Do đó $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

Ví dụ **4.1.3.1.1.** Tính các tích phân (a) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$, (b) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$

Bài giải

(a) $I=\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$, đặt p = 6 và q = 25 $\Rightarrow \frac{p^2}{4}-q=-16<0$, áp dụng kết quả trên ta được

$$I=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C=\frac{2}{\sqrt{4.25-6^2}}\arctan\frac{2x+6}{\sqrt{4.25-6^2}}+C=\frac{1}{4}\arctan\frac{x+3}{4}+C$$

hoặc biến đổi trực tiếp $I=\int \frac{dx}{x^2+6x+25}=\int \frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2}=\frac{1}{4}\arctan\frac{x+3}{4}+C$

(b) $I=\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}$, đặt p = -1 và $q=\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{p^2}{4}-q=-\frac{5}{4}<0$, áp dụng kết quả trên ta được $I=\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C=$

$$\frac{2}{\sqrt{4.\frac{3}{2}-(-1)^2}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{4.\frac{3}{2}-(-1)^2}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$$

hoặc biến đổi trực tiếp $I=\int \frac{dx}{x^2+6x+25}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$$

Ví dụ **4.1.3.1.2.** Tính các tích phân (a) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}$, (b) $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$, (c) $\int \frac{(2x^3+3x)dx}{x^4+x^2+1}$

Bài giải

(a) $I=\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}$, đặt A = 3, B = -1, p = -4, q = 8 $\Rightarrow \frac{p^2}{4}-q=-4<0$, áp dụng kết quả trên ta được $I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C=$

$$\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{2.(-1)-3.(-4)}{\sqrt{4.8-(-4)^2}}\arctan\frac{2x-4}{\sqrt{4.8-(-4)^2}}+C=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}+C$$

hoặc biến đổi trực tiếp $I=\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+$

$$5\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}+5\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\arctan\frac{x-2}{2}+C$$

(b) $I=\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+x+\frac{5}{2}}$, đặt A = 1, B = 0, p = 1, $q=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{p^2}{4}-q=-\frac{9}{4}<0$, áp dụng kết quả trên ta được

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right]+C_1=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)+\frac{2.0-1.1}{\sqrt{4.\frac{5}{2}-1^2}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{4.\frac{5}{2}-1^2}}\right]+C_1=\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C_1=$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\ln 2\right]-\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C_1=\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C$$

hoặc biến đổi trực tiếp $I=\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\int\frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{1}{2}}{2x^2+2x+5}dx=\frac{1}{4}\int\frac{(4x+2)dx}{2x^2+2x+5}-$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\int\frac{d(2x^2+2x+2)}{2x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+2)-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=$$

$$\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+2)-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+2)-\frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{3}{2}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C$$

(c) $I=\int\frac{(2x^3+3x)dx}{x^4+x^2+1}$, đổi biến t = x^2, khi đó dt = 2xdx hay $xdx=\frac{1}{2}dt$ $\Rightarrow I=\int\frac{(2x^2+3)xdx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2t+3}{t^2+t+1}dt$. Đặt A = 2, B = 3, p = 1, q = 1 $\Rightarrow\frac{p^2}{4}-q=-\frac{3}{4}<0$, áp dụng kết quả trên ta được

$$\int\frac{2t+3}{t^2+t+1}dt=\int\frac{At+B}{t^2+pt+q}dt=\frac{A}{2}\ln(t^2+pt+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2t+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_1=$$

$$\frac{2}{2}\ln(t^2+t+1)+\frac{2.3-2.1}{\sqrt{4.1-1^2}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{4.1-1^2}}+C_1=\ln(t^2+t+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C_1$$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{2t+3}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, trở về biến cũ ta được

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C$$

Tính tích phân phân thức loại IV: $J_n=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$

- Bước 1: Biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân ta được

$$\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}I+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)J$$

- Bước 2: Tính $I=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}=\int(x^2+px+q)^{-n}d(x^2+px+q)=$

$$\int(x^2+px+q)^{-n}d(x^2+px+q)=\frac{1}{-n+1}(x^2+px+q)^{-n+1}+C_1=\frac{1}{1-n}.\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+C_1$$

- Bước 3: Tính $J=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$, bây giờ nếu đặt $t=x+\frac{p}{2}$ và $a^2=q-\frac{p^2}{4}$ thì $J=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. Ta thấy J chính là tích phân $I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ với $a\neq 0$ và $n\in\mathbf{N}^*$, đã tính ở Ví dụ 4.1.5. và ta đã xác định được công thức truy hồi để tính tích phân này $I_n=\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và $I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C_2$. Trở về biến cũ ta được $J=I_n=\frac{x+\frac{p}{2}}{2(n-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^{n-1}}+\frac{1}{q-\frac{p^2}{4}}.\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và tích phân ban đầu là $I_1=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C_2$,

hay $J=I_n=\frac{1}{(n-1)(4q-p^2)}.\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{4}{4q-p^2}.\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và tích phân ban đầu là $I_1=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_2$

Do đó $J_n=\frac{A}{2(1-n)}.\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_n$,

trong đó $I_n=\frac{1}{(n-1)(4q-p^2)}.\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{4}{4q-p^2}.\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n\geq 2$ và tích phân ban đầu là $I_1=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

Ví dụ **4.1.3.1.3.** Tính các tích phân (a) $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$, (b) $J_2 = \int \frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}$

Bài giải

(a) Tích phân đã cho là $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ với n = 3 và a = 1, do đó sử dụng công thức truy hồi đã biết $I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ với $n \geq 2$ và $I_1 = \int \frac{dt}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C_1$ ta được $I_3 = \frac{x}{2.1^2.(3-1)(x^2+1^2)^{3-1}} + \frac{1}{1^2}\frac{2.3-3}{2.3-2}I_{3-1} = \frac{1}{4}.\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2$,

$I_2 = \frac{x}{2.1^2(2-1)(x^2+1^2)^{2-1}} + \frac{1}{1^2}\frac{2.2-3}{2.2-2}I_{2-1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}I_1$ và $I_1 = \frac{1}{1}\arctan\frac{x}{1} + C_1 = \arctan x + C_1$,

do đó $I_3 = \frac{1}{4}.\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2 = \frac{1}{4}.\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}I_1\right] = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}I_1 =$

$\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan x + C$

(b) $J_2 = \int \frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^2} =$

$\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+10)}{(x^2+2x+10)^2} - \int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+9\right]^2}$, đối với tích phân thứ nhất đổi biến z = x^2 + 2x + 10 $\Rightarrow$ dz = (2x + 2)dx, còn đối với tích phân thứ hai đổi biến t = x + 1 $\Rightarrow$ dt = dx, do đó

$J_2 = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} = \frac{3}{2}\int z^{-2}dz - \int \frac{dt}{(t^2+3^2)^2} = -\frac{3}{2}z^{-1} - \left[\frac{1}{2.3^2.(2-1)}\frac{t}{(t^2+3^2)^{2-1}} + \right.$

$\left.\frac{1}{3^2}\frac{2.2-3}{2.2-2}\int \frac{dt}{t^2+3^2}\right] = -\frac{3}{2z} - \frac{t}{18(t^2+9)} - \frac{1}{18}.\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3} + C$, trở về biến cũ, ta được

$J_2 = \int \frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2} = -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{x+1}{18(x^2+2x+10)} - \frac{1}{54}\arctan\frac{x+1}{3} + C$

4.1.3.2. Tính tích phân các phân thức hữu tỷ nhờ phân tích thành các phân thức hữu tỷ đơn giản nhất

Trước khi lấy tích phân phân thức hữu tỷ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ cần thực hiện các phép biến đổi và phép tính đại số sau:

(1) Nếu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức hữu tỷ không thực sự thì thực hiện phép chia P(x) cho Q(x), kết quả nhận được có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, trong đó M(x) là đa thức, còn $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ là phân thức hữu tỷ thực sự;

(2) Phân tích mẫu số của phân thức ra các thừa số tuyến tính và bậc hai: Q(x) = $(x - a)^m$…$(x^2 + px + q)^n$…, trong đó $\frac{p^2}{4} - q < 0$, tức là tam thức bậc hai x^2 + px + q không có nghiệm thực (hay có nghiệm liên hợp phức);

(3) Phân tích phân thức hữu tỷ thực sự ra các phân thức đơn giản nhất: $\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2}$

$$+\dots+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}+\dots$$

(4) Tìm các hệ số A_k, B_k và C_k bằng phương pháp hệ số bất định.

(5) Cuối cùng, việc tính tích phân tích phân của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ được đưa về việc tính tích phân đa thức M(x) và các phân thức hữu tỷ đơn giản nhất.

Khi phân tích mẫu số Q(x) của phân thức ra các thừa số tuyến tính và bậc hai thì có 4 trường hợp:

Trường hợp 1. Q(x) chỉ có các nghiệm thực khác nhau, tức là Q(x) được phân tích ra các thừa số bậc nhất không lặp lại.

Trường hợp 2. Q(x) chỉ có các nghiệm thực, trong đó có một số là nghiệm bội, tức là Q(x) được phân tích ra các thừa số bậc nhất và một số thừa số đó được lặp lại.

Trường hợp 3. Q(x) có các nghiệm phức đơn, tức là trong khai triển của Q(x) có chứa thừa số bậc hai không lặp.

Trường hợp 4. Q(x) có các nghiệm phức bội, tức là trong khai triển của Q(x) có chứa thừa số bậc hai lặp.

Ví dụ **4.1.3.2.1.** Tính tích phân $\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$, nghiệm của Q(x) thuộc Trường hợp 1

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}=\frac{(A+B+C)x^2-(6A+5B+3C)+(8A+4B+2C)}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C &=1\\ -6A-5B-3C &=2\\ 8A+4B+2C &=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\ B=-7\\ C=5\end{cases}\Rightarrow\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}dx-7\int\frac{dx}{x-2}dx+$$

$$5\int\frac{dx}{x-4}dx=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C$$

Ví dụ **4.1.3.2.2.** Tính tích phân $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$, nghiệm của Q(x) thuộc Trường hợp 2

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+3}=$$

$$\frac{(A+D)x^3+(A+B-3D)x^2+(-5A+2B+C+3D)+(3A-3B+3C-D)}{(x-1)^3(x+3)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+D &=0\\ A+B-3D &=1\\ -5A+2B+C+3D &=0\\ 3A-3B+3C-D &=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=5/32\\ B=3/8\\ C=1/2\\ D=-5/32\end{cases}\Rightarrow\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx=\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{5}{32}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{3}{8}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^3}-\frac{5}{32}\int\frac{d(x+3)}{x+3}=$$

$$\frac{5}{32}\ln|x-1|-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{5}{32}\ln|x+3|+C=-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$$

Ví dụ **4.1.3.2.3.** Tính tích phân $\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$, nghiệm của Q(x) thuộc Trường hợp 3.

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} =$$

$$\frac{(A+C+D)x^4 + (B+C-D+E)x^3 + (C-E)x^2 + Ax - B}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} A+C+D & = 0 \\ B+C-D+E & = 0 \\ C-E & = 0 \\ A & = 0 \\ -B & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \\ C = 1/3 \\ D = -1/3 \\ E = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Ví dụ **4.1.3.2.4.** Tính tích phân $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}dx$, nghiệm của Q(x) thuộc Trường hợp 4

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A & = 1 \\ B & = 0 \\ A+C & = -2 \\ B+D & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -3 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{xdx}{x^2+1} - 3\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2(x^2+1)} + C$$

4.1.4. Tính tích phân các hàm vô tỷ đơn giản nhất

4.1.4.1. Tính tích phân dạng $\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, ...\right]dx$, trong đó R là phân thức hữu tỷ đối với các biến $x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, ...$; m_k, $n_k \in \mathbf{Z}$. Phép đổi biến ax + b = t^s với s = BSCNN(n_1, n_2, …) sẽ biến đổi hàm lấy tích phân thành phân thức hữu tỷ đối với biến t.

Ví dụ **4.1.4.1.** Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}}$

Bài giải Ta thấy $n_1 = 3$ và $n_2 = 2$ nên BSCNN(n_1,n_2) = 6, do đó dùng phép thế $2x + 1 = t^6$, suy ra $x = \frac{1}{2}(t^6 - 1)$ và $dx = 3t^5dt \Rightarrow I = \int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{3t^5dt}{t^4 - t^3} = 3\int \frac{t^2dt}{t-1} = 3\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$

$$\frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1} + 3\sqrt[6]{2x-1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1} - 1\right| + C$$

4.1.4.2. Tính tích phân dạng $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Để tính tích phân loại này, ta tách bình phương đủ của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$, rồi đưa về tích phân cơ bản (15) hoặc (16).

Ví dụ **4.1.4.2.** Tính các tích phân (a) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$, (b) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$

Bài giải (a) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$ do áp dụng tích phân cơ bản (16).

$$\text{(b) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + C =$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2) + C$ do áp dụng tích phân cơ bản (15).

4.1.4.3. Tính tích phân dạng $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Để tính tích phân loại này, ta tách tử số $Ax + B$ ra đạo hàm của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ và phân tích tích phân này thành tổng của hai tích phân:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}I + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)J$$

trong đó $I = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+bx+c) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}+1} + C =$

$2\sqrt{ax^2+bx+c} + C$ và $J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ là dạng tích phân 4.1.4.2. đã xét ở trên.

Ví dụ **4.1.4.3.** Tính các tích phân (a) $I = \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$, (b) $I = \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$

Bài giải

$$\text{(a) } I = \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{(4x+8)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} =$$

$$\frac{5}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+1)}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}} =$$

$$\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}\right| + C =$$

$\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C$ do áp dụng các tích phân cơ bản (12), (16).

$$\text{(b) } I = \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx =$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{(-2x+6)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}+13\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=-\frac{3}{2}\int\frac{d(-x^2+6x-8)}{\sqrt{-x^2+6x-8}}+13\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{1^2-(x-3)^2}}=$$

$-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin\dfrac{x-3}{1}+C=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C$ do áp dụng các tích phân cơ bản (12), (15).

4.1.4.4. Tính tích phân dạng $\int\dfrac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Phép đổi biến $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$ sẽ đưa dạng tích phân này về dạng tích phân 4.1.4.2. đã xét ở trên.

Ví dụ **4.1.4.4.** Tính các tích phân (a) $I=\int\dfrac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$, (b) $I=\int\dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

Bài giải

(a) $I=\int\dfrac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$, đặt $x=\dfrac{1}{t}$ hay $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow dx=-\dfrac{dt}{t^2}\Rightarrow I=-\int\dfrac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=$

$$I=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}}=-\int\frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2+4}}=-\ln\left|t-1+\sqrt{(t-1)^2+4}\right|+C=$$

$-\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right|+C=-\ln\left|\dfrac{1}{x}-1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+5}\right|+C=-\ln\left|\dfrac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C$ do áp dụng tích phân cơ bản (16).

(b) $I=\int\dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$, đặt $x-1=\dfrac{1}{t}\Rightarrow x=1+\dfrac{1}{t}\Rightarrow dx=-\dfrac{dt}{t^2}$ và $t=\dfrac{1}{x-1}$, do đó

$$I=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C=$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C$$

4.1.4.5. Tính tích phân dạng $\int\dfrac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n. Tích phân này tính được nhờ đồng nhất thức $\int\dfrac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, trong đó $Q_{n-1}(x)$ là đa thức bậc n – 1 với hệ số bất định, còn λ là một số thực. Bây giờ lấy đạo hàm đồng nhất thức trên và quy đồng mẫu số, ta sẽ nhận được đẳng thức của hai đa thức mà từ đó có thể xác định các hệ số của đa thức $Q_{n-1}(x)$ và số λ.

Ví dụ **4.1.4.5.** Tính tích phân $I=\int\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Bài giải Ở đây n = 3 nên đồng nhất thức tương ứng là

$$\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=(b_2x^2+b_1x+b_0)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Đạo hàm hai vế đồng nhất thức này ta được

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2b_2x+b_1)\sqrt{x^2+2x+2} + (b_2x^2+b_1x+b_0)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$\Rightarrow x^3+2x^2+3x+4 = (2b_2x+b_1)(x^2+2x+2) + (b_2x^2+b_1x+b_0)(x+1) + \lambda$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2+3x+4 = 3b_2x^3 + (5b_2+2b_1)x^2 + (4b_2+3b_1+b_0)x + (2b_1+b_0+\lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3b_2 & = 1 \\ 5b_2+2b_1 & = 2 \\ 4b_2+3b_1+b_0 & = 3 \\ 2b_1+b_0+\lambda & = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 1/3 \\ b_1 = 1/6 \\ b_0 = 7/6 \\ \lambda = 5/2 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} +$$

$$+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right| + C = \frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C$$

4.1.4.6. Tính tích phân nhị thức vi phân $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, trong đó m, n, p$\in$**Q**. Nhà toán học Tsebusep đã chứng minh, tích phân này xác định được chỉ trong 3 trường hợp sau:

(1) p$\in$**Z**, khi đó đặt x = t^s với s là BSCNN của mẫu số của các số hữu tỷ m, n; tích phân sẽ được đưa về tích phân của hàm số hữu tỷ;

(2) $\frac{m+1}{n} \in Z$, khi đó phép đổi biến a + bx^n = t^s với s là mẫu số của phân số p, sẽ biến đổi tích phân thành tích phân của hàm hữu tỷ;

(3) $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, khi đó, để đưa về tích phân của hàm hữu tỷ, dùng phép đổi biến ax^{-n} + b = t^s với s là mẫu số của phân số p.

Ví dụ **4.1.4.6.** Tính các tích phân

$$(a)\, I = \int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}},\ (b)\, I = \int\frac{x^3dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}},\ (c)\, I = \int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

Bài giải

(a) Viết hàm lấy tích phân dưới dạng $\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10} = x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10}$, nên p = -10 là số nguyên, $m = -\frac{1}{2}$ và $n = \frac{1}{4}$. Do đó tích phân này xác định được vì nó thuộc trường hợp đầu tiên của tích phân nhị thức vi phân, nên ta sử dụng phép đổi biến x = t^4 (4 là BSCNN của mẫu số của các phân số m và n). Khi đó dx = $4t^3$dt và $I = \int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int\frac{4t^3dt}{t^2(1+1)^{10}} = 4\int\frac{tdt}{(t+1)^{10}} =$

$$4\int\frac{(t+1-1)dt}{(t+1)^{10}} = 4\int\frac{(t+1-1)dt}{(t+1)^{10}} = 4\int\frac{(t+1)dt}{(t+1)^{10}} - 4\int\frac{dt}{(t+1)^{10}} = 4\int(t+1)^{-9}dt - 4\int(t+1)^{-10}dt =$$

$4\int(t+1)^{-9}d(t+1) - 4\int(t+1)^{-10}d(t+1) = -\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} + C$, trở về biến cũ, ta được

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = -\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + C.$$

(b) Viết hàm lấy tích phân dưới dạng $\frac{x^3}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = x^3(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$ nên m = 3, n = 2 và $p = -\frac{3}{2}$, suy ra $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ là số nguyên. Do đó tích phân này xác định được vì nó thuộc trường hợp thứ hai của tích phân nhị thức vi phân, nên ta sử dụng phép đổi biến $a^2 - x^2 = t^2$ (2 là mẫu số của phân số p). Khi đó xdx = -tdt và $x^2 = a^2 - t^2 \Rightarrow I = \int \frac{x^3dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x^3(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}dx =$

$-\int (a^2 - t^2)t^{-3}tdt = -\int \frac{a^2 - t^2}{t^2}dt = \int dt - a^2\int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{a^2}{t} + C = \frac{t^2 + a^2}{t} + C$, trở về biến cũ, ta được $I = \frac{2a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$.

(c) Viết hàm lấy tích phân dưới dạng $\frac{1}{x^4\sqrt{1 + x^2}} = x^{-4}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nên m = -4, n = 2 và $p = -\frac{1}{2}$, suy ra $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$ là số nguyên. Do đó tích phân này xác định được vì nó thuộc trường hợp thứ ba của tích phân nhị thức vi phân, nên ta sử dụng phép đổi biến $x^{-2} + 1 = t^2$ (-2 = -n và 2 là mẫu số của phân số p). Khi đó $x^{-3}dx$ = -tdt và $x^2 = \frac{1}{t^2 - 1} \Rightarrow I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}} = \int x^{-4}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$\int x^{-4}\left[x^2(x^{-2} + 1)\right]^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{-2}(x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx = -\int (t^2 - 1)t^{-1}tdt = -\int (t^2 - 1)dt = t - \frac{t^3}{3} + C$, trở về biến cũ, ta được $I = \sqrt{x^{-2} + 1} - \frac{\sqrt{(x^{-2} + 1)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1 + x^2)^3}}{3x^3} + C = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^3} + C.$

4.1.5. Tính tích phân các hàm lượng giác

4.1.5.1. Tính tích phân dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$, trong đó R là phân thức hữu tỷ. Các tích phân dạng này được đưa về tích phân của phân thức hữu tỷ nhờ phép đổi biến lượng giác vạn năng $t = \tan\frac{x}{2}$, suy ra $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, x = 2arctant và $dx = \frac{2tdt}{1 + t^2}$.

Cần lưu ý rằng, phép đổi biến vạn năng $t = \tan\frac{x}{2}$ trong nhiều trường hợp đưa đến việc tính toán phức tạp vì khi đó các hàm số sinx, cosx được biểu diễn qua t dưới dạng phân thức hữu tỷ chứa t^2.

Trong một số trường hợp đặc biệt, việc tìm tích phân dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$ có thể đơn giản hơn: (1) Nếu R(sinx,cosx) là hàm lẻ đối với sinx, tức là R(-sinx,cosx) = -R(sinx,cosx) thì dùng phép đổi biến t = cosx; (2) Nếu R(sinx,cosx) là hàm lẻ đối với cosx, tức là R(sinx,-cosx) = -R(sinx,cosx) thì dùng phép đổi biến t = sinx; (3) Nếu R(sinx,cosx) là hàm chẵn đối với sinx và cosx, tức là R(-sinx,-cosx) = R(sinx,cosx) thì dùng phép đổi biến t = tanx.

Ví dụ **4.1.5.1.** Tính các tích phân (a) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$, (b) $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x}$, (c) $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}dx$, (d) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$

Bài giải

(a) Đổi biến $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ và $dx = \frac{2tdt}{1 + t^2}$.

Do đó $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int \frac{\frac{2tdt}{1+t^2}}{4.\frac{2t}{1+t^2}+3.\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int \frac{dt}{(t+2)^2}=$

$\int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C$, trở về biến cũ ta được $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+2}+C.$

(b) Hàm lấy tích phân là lẻ đối với sinx vì $\frac{-\sin x+(-\sin x)^3}{\cos 2x}=-\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}$ nên ta dùng phép đổi biến t = cosx, suy ra $\sin^2x = 1 - t^2$, $\cos2x = 2\cos^2x - 1 = 2t^2 - 1$, dt = -sinxdx. Do đó

$\int \frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}=\int \frac{(1+\sin^2 x)\sin xdx}{\cos 2x}=\int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1}=\int \frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}.\frac{1}{2t^2-1}\right)dt=$

$\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{2}t-1\right)\left(\sqrt{2}t+1\right)}=\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\left(\int \frac{dt}{\sqrt{2}t-1}-\int \frac{dt}{\sqrt{2}t+1}\right)=$

$\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{2}t-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{2}t+1}\right)=\frac{t}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\int \frac{d\left(\sqrt{2}t-1\right)}{\sqrt{2}t-1}-\int \frac{d\left(\sqrt{2}t+1\right)}{\sqrt{2}t+1}\right)=$

$\frac{t}{2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left|\sqrt{2}t-1\right|-\ln\left|\sqrt{2}t+1\right|\right)+C=\frac{t}{2}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1}\right|+C,$ trở về biến cũ ta được

$\int \frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}=\frac{\cos x}{2}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right|+C.$

(c) Hàm lấy tích phân là lẻ đối với cosx vì $\frac{(-\cos x)^3+(-\cos x)^5}{\sin^2 x+\sin^4 x}=-\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}$ nên ta dùng phép đổi biến t = sinx, suy ra $\cos^2x = 1 - \sin^2x = 1 - t^2$, cosxdx = dt. Do đó

$\int \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx=\int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos xdx}{\sin^2 x+\sin^4 x}=\int \frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)dt}{t^2+t^4}=\int\left(1+\frac{2}{t^2}-\frac{6}{1+t^2}\right)dt=$

$\int dt+2\int \frac{dt}{t^2}-6\int \frac{dt}{1+t^2}=t+\frac{2}{t}-6\arctan t+C,$ trở về biến cũ ta được

$\int \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx=\sin x+\frac{2}{\sin x}-6\arctan(\sin x)+C.$

(d) Hàm lấy tích phân là chẵn đối với cả sinx và cosx vì

$\frac{1}{(-\sin x)^2+2(-\sin x)(-\cos x)-(-\cos x)^2}=\frac{1}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$ nên ta dùng phép đổi biến t = tanx, suy ra $\sin x=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, x = arctant và

$dx=\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Do đó $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+2.\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}}=$

$\int \frac{dt}{t^2+2t-1}=\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C,$ trở về biến cũ ta được

$\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}+\tan x}{1+\sqrt{2}+\tan x}\right|+C.$

4.1.5.2. Tính tích phân dạng $\int \sin^m x \cos^n dx$ trong hai trường hợp (1) Ít nhất một trong các số m hoặc n là số lẻ dương, nếu n là số lẻ dương thì dùng phép đổi biến t = sinx, còn nếu m là số lẻ dương thì dùng phép đổi biến t = cosx; (2) Cả hai số m, n đều là số chẵn dương, khi đó biến đổi hàm số lấy tích phân nhờ các công thức lượng giác: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

Ví dụ **4.1.5.2.** Tính các tích phân (a) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$, (b) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}$, (c) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

Bài giải

(a) Vì n là số lẻ dương nên ta dùng phép đổi biến t = sinx nên dt = d(sinx), do đó

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x . \cos^4 x (\cos x dx) = \int \sin^4 x . (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int t^4 (1-t^2) t^2 dt =$$

$$\int t^4 dt - 2\int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C,$$ trở về biến cũ ta được

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

(b) Vì m là số lẻ dương nên ta dùng phép đổi biến t = cosx nên dt = -sinxdx, do đó

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} = \int \sin^2 x \cos^{-\frac{4}{3}} x (\sin x dx) = \int (1-\cos^2 x) \cos^{-\frac{4}{3}} x (\sin x dx) = -\int (1-t^2) t^{-\frac{4}{3}} dt =$$

$$-\int t^{-\frac{4}{3}} dt + \int t^{\frac{2}{3}} dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}} + \frac{1}{5} t \sqrt[3]{t^2}\right) + C,$$ trở về biến cũ ta được

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{1}{5}\cos x \sqrt[3]{\cos^2 x}\right) + C.$$

(c) Cả hai số m, n đều là số chẵn dương nên ta sử dụng các công thức hạ bậc, do đó ta biến đổi hàm lấy tích phân như sau $\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x) \Rightarrow$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

4.1.5.3. Tính tích phân dạng $\int \tan^m x dx$ và $\int \cot^m x dx$, trong đó m là số nguyên dương. Khi đó, ta dùng các công thức lượng giác $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ hoặc $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ để hạ liên tiếp bậc của hàm số tan hoặc cot.

Ví dụ **4.1.5.3.** Tính các tích phân (a) $\int \tan^7 dx$, (b) $\int \cot^6 x dx$

Bài giải

(a) $\int \tan^7 dx = \int \tan^5 x . \tan^2 x dx = \int \tan^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \tan^5 x \left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right) - \int \tan^5 x dx =$

$$\int \tan^5 x d(\tan x) - \int \tan^3 x . \tan^2 x dx = \frac{\tan^6 x}{6} - \int \tan^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$\frac{\tan^6 x}{6}-\int \tan^3 x\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right)+\int \tan^3 x dx=\frac{\tan^6 x}{6}-\int \tan^3 x d(\tan x)+\int \tan x \tan^2 x dx=$$

$$\frac{\tan^6 x}{6}-\frac{\tan^4 x}{4}+\int \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{\tan^6 x}{6}-\frac{\tan^4 x}{4}+\int \tan x\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right)-\int \tan x dx=$$

$$\frac{\tan^6 x}{6}-\frac{\tan^4 x}{4}+\int \tan x d(\tan x)-\int \tan x dx=\frac{\tan^6 x}{6}-\frac{\tan^4 x}{4}+\frac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$$

(b) $\int \cot^6 x dx=\int \cot^4 x.\cot^2 x dx=\int \cot^4 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int \cot^4 x\left(\frac{dx}{\sin^2 x}\right)-\int \cot^4 x dx=$

$$-\int \cot^4 x d(\cot x)-\int \cot^2 x \cot^2 x dx=-\frac{\cot^5 x}{5}-\int \cot^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=$$

$$-\frac{\cot^5 x}{5}-\int \cot^2 x\left(\frac{dx}{\sin^2 x}\right)dx+\int \cot^2 x dx=-\frac{\cot^5 x}{5}+\int \cot^2 x d(\cot x)+\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=$$

$$-\frac{\cot^5 x}{5}+\frac{\cot^3 x}{3}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx=-\frac{\cot^5 x}{5}+\frac{\cot^3 x}{3}-\int d(\cot x)-x=-\frac{\cot^5 x}{5}+\frac{\cot^3 x}{3}-\frac{\cot^2 x}{2}-x+C.$$

4.1.5.4. Tính tích phân dạng $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x}dx$ và $\int \frac{\cot^m x}{\sin^n x}dx$, trong đó n là số dương chẵn. Khi đó, ta dùng các công thức lượng giác $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ hoặc $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$ để biến đổi hàm số lấy tích phân.

Ví dụ **4.1.5.4.** Tính các tích phân (a) $\int \frac{\tan^4 x}{\cos^6 x}dx$, (b) $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$

Bài giải

(a) $\int \frac{\tan^4 x}{\cos^6 x}dx=\int \tan^4 x.\frac{1}{\cos^4 x}.\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right)=\int \tan^4 x.\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 d(\tan x)=$

$$\int \tan^4 x.(1+\tan^2 x)^2 d(\tan x)=\int (\tan^4 x+2\tan^6 x+\tan^8 x)d(\tan x)=$$

$$\int \tan^4 x d(\tan x)+2\int \tan^6 x d(\tan x)+\int \tan^8 x d(\tan x)=\frac{\tan^9 x}{9}+\frac{2\tan^7 x}{7}+\frac{\tan^5 x}{5}+C.$$

(b) $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx=\int \frac{1}{\sin^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx=\int (1+\cot^2 x)\left(\frac{dx}{\sin^2 x}\right)=-\int (1+\cot^2 x)d(\cot x)=$

$$-\int d(\cot x)-\int \cot^2 x d(\cot x)=-\cot x-\frac{\cot^3 x}{3}+C.$$

4.1.5.5. Tính tích phân dạng $I_{2n+1}=\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ và $J_{2n+1}=\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$, khi đó, ta chứng minh được hai công thức truy hồi tương ứng sau đây:

$$I_{2n+1}=\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}=\frac{1}{2n}.\frac{\sin x}{\cos^{2n} x}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)I_{2n-1} \text{ với } I_1=\int \frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$J_{2n+1}=\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}=-\frac{1}{2n}.\frac{\cos x}{\sin^{2n} x}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)J_{2n-1} \text{ với } J_1=\int \frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

Ví dụ **4.1.5.5.** Tính tích phân $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$

Bài giải Áp dụng công thức truy hồi J_{2n+1} với $2n + 1 = 5 \Rightarrow n = 2$:

$J_5 = J_{2.2+1} = \int \frac{dx}{\sin^{2.2+1} x} = -\frac{1}{2.2}.\frac{\cos x}{\sin^{2.2} x} + \left(1 - \frac{1}{2.2}\right) J_{2.2-1}$ hay $J_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4}.\frac{\cos x}{\sin^4 x} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) J_3 =$ $-\frac{1}{4}.\frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4} J_3$ với $J_3 = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dx}{\sin^{2.1+1} x} = -\frac{1}{2.1}.\frac{\cos x}{\sin^{2.1} x} + \left(1 - \frac{1}{2.1}\right) J_{2.1-1} = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} J_1$ với $J_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

4.1.5.6. Tính tích phân dạng $\int \sin(mx).\cos(nx)dx$, $\int \cos(mx).\cos(nx)dx$ và $\int \sin(mx).\sin(nx)dx$. Khi đó, các công thức lượng giác: $\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$, $\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$, $\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ cho khả năng biểu diễn tích các hàm lượng giác dưới dạng tổng.

Ví dụ **4.1.5.6.** Tính các tích phân (a) $\int \sin 2x.\cos 5x dx$, (b) $\int \cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}dx$

Bài giải

(a) $\int \sin 2x.\cos 5x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 7x + \sin(-3x)]dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x dx =$ $\frac{1}{2}.\frac{1}{7}\int \sin 7x d(7x) - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{\cos 7x}{14} + \frac{\cos 3x}{6} + C.$

(b) $\int \cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int \cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{4}dx +$ $\frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4}\right)dx + \frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)dx =$ $\frac{1}{4}\int \cos\frac{7x}{4}dx + \frac{1}{4}\int \cos\frac{5x}{4}dx + \frac{1}{4}\int \cos\frac{3x}{4}dx + \frac{1}{4}\int \cos\frac{x}{4}dx =$ $\frac{1}{4}.\frac{4}{7}\int \cos\frac{7x}{4}d\left(\frac{7x}{4}\right) + \frac{1}{4}.\frac{4}{5}\int \cos\frac{5x}{4}d\left(\frac{5x}{4}\right) + \frac{1}{4}.\frac{4}{3}\int \cos\frac{3x}{4}d\left(\frac{3x}{4}\right) + \frac{1}{4}.4\int \cos\frac{x}{4}d\left(\frac{x}{4}\right) =$ $\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{x}{4} + C.$

4.1.5.7. Tính tích phân dạng $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}dx$, và $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}dx$, trong đó R là phân thức hữu tỷ, được đưa về các tích phân của hàm hữu tỷ đối với sint và cost bằng các phép đổi biến lượng giác thích hợp;

- Đối với dạng $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ thì dùng phép đổi biến x = asinu hoặc x = acosu
- Đối với dạng $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ thì dùng phép đổi biến x = atanu hoặc x = acotu
- Đối với dạng $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ thì dùng phép đổi biến $x = \frac{a}{\cos u}$ hoặc $x = \frac{a}{\sin u}$

Ví dụ **4.1.5.7.** Tính các tích phân (a) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx$, (b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$, (c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx$

Bài giải

(a) Đặt x = asinu $\Rightarrow$ dx = acosudu và $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}}{a\sin u}a\cos u du =$ $a\int \frac{\cos^2 u}{\sin u}du = a\int \frac{1 - \sin^2 u}{\sin u}du = a\int \frac{du}{\sin u} - a\int \sin u du = a\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + a\cos u + C =$

$a\ln\left|\dfrac{\sin u}{1+\cos u}\right|+a\cos u+C$ vì $\tan\dfrac{u}{2}=\dfrac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}}=\dfrac{\sin u}{1+\cos u}$, trở về biến cũ ta được

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(b) Đặt x = atanu $\Rightarrow dx=\dfrac{a}{\cos^2 u}du$ và $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{\frac{a}{\cos^2 u}du}{a\tan u.\sqrt{a^2+a^2\tan^2 u}}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{\sin u}=$

$\dfrac{1}{a}\ln\left|\tan\dfrac{u}{2}\right|+C=\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{\sin u}{1+\cos u}\right|+C$, trở về biến cũ ta được $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right|+C.$

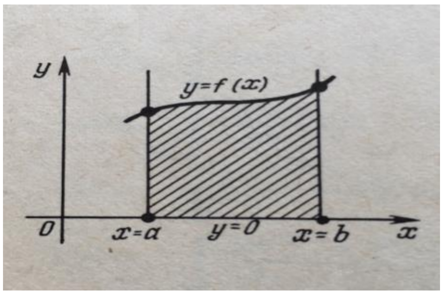
(c) Đặt $x=\dfrac{a}{\cos u}\Rightarrow dx=\dfrac{a\sin u}{\cos^2 u}du$ và $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=a^2\int\frac{du}{\cos^3 u}$, bây giờ áp dụng công thức truy hồi $\displaystyle I_{2n+1}=\int\frac{du}{\cos^{2n+1}u}=\frac{1}{2n}.\frac{\sin u}{\cos^{2n}u}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)I_{2n-1}$ với n = 1 và $\displaystyle I_1=\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$ ta được $\displaystyle I_3=\int\frac{du}{\cos^3 u}=\frac{1}{2}.\frac{\sin u}{\cos^2 u}+\left(1-\frac{1}{2}\right)I_1=\frac{1}{2}.\frac{\sin u}{\cos^2 u}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$, do đó

$\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=a^2 I_3=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin u}{\cos^2 u}+\ln\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]+C$, trở về biến cũ ta được

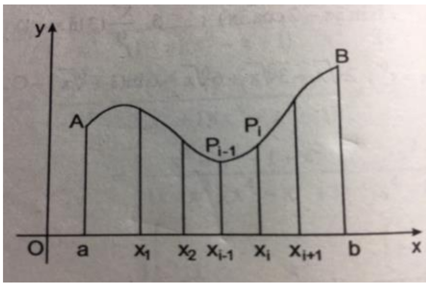
$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right|+C.$$

4.2. Tích phân xác định

4.2.1. Bài toán tính diện tích hình thang cong, định nghĩa tính phân xác định



Giả sử hàm số y = f(x) xác định trên [a,b]. Xét hình thang cong AabB là hình giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), các đường thẳng x = a, x = b và y = 0 (trục hoành Ox). Làm thế nào để tính được diện tích S của hình thang cong này?



Muốn vậy, ta chia [a,b] thành n đoạn bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ có độ dài của mỗi đoạn là tùy ý, trên từng đoạn $[x_{i-1},x_i]$ có độ dài $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ chọn một điểm ξ_i tùy ý.

Bây giờ, từ các điểm x_i ($0 \le i \le n$) ta kẻ các đường thẳng $x = x_i$, và như vậy, ta đã chia hình thang cong AabB thành n hình thang cong nhỏ $P_{i-1}x_{x-1}x_iP_i$ ($1 \le i \le n$) có đáy Δx_i ($1 \le i \le n$). Do đó, nếu ký hiệu diện tích của hình thang cong AabB là S và diện tích của hình thang cong nhỏ thứ i là S_i thì $S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Về mặt hình học, ta thấy rằng: n càng lớn thì diện tích S của hình thang cong AabB tính được bằng công thức trên càng chính xác.

Định nghĩa. Tổng $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$ được gọi là *tổng tích phân* của hàm số y = f(x) trên [a,b]. Giới hạn của tổng tích phân $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ được gọi là *tích phân xác định* của hàm số y = f(x) trên [a,b] và ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Khi đó, ta nói rằng hàm số f(x) *khả tích* trên [a,b], trong đó [a,b] là *khoảng lấy tích phân*, a là *cận dưới* và b là *cận trên* của tích phân, x là *biến số lấy tích phân*, f(x) là *hàm số lấy tích phân* và f(x)dx là *biểu thức dưới dấu tích phân*.

4.2.2. Các lớp hàm khả tích

Định lý. (1) Nếu f(x) liên tục trên [a,b] thì f(x) khả tích trên [a,b]; (2) Nếu f(x) bị chặn trên [a,b] và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên [a,b] thì f(x) khả tích trên [a,b]; (3) Nếu f(x) bị chặn và đơn điệu trên [a,b] thì f(x) khả tích trên [a,b].

Các nhà toán học đã chứng minh được rằng, giới hạn $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ tồn tại hữu hạn đối với các lớp hàm khả tích, không phụ thuộc vào độ dài của Δx_i và cách chọn ξ_i trên đoạn $[x_{i-1},x_i]$.

4.2.3. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

(1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(2) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(4) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$ (C là hằng số)

(5) $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

(6) Nếu $m \le f(x) \le M$ trên [a,b] thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ trên [a,b]

4.2.4. Các quy tắc tính tích phân xác định

(1) Công thức Newton – Leibniz: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, trong đó F(x) là nguyên hàm của f(x), tức là F'(x) = f(x).

Từ công thức Newton – Leibniz suy ra rằng, tích phân $\int_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc vào ký hiệu biến số lấy tích phân, chẳng hạn $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ vì cả hai tích phân này đều bằng F(b) – F(a).

(2) Tích phân từng phần: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$ trong đó u = u(x), v = v(x) là các hàm số liên tục và khả vi trên [a,b].

(3) Đổi biến: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$ trong đó x = φ(t), φ'(t) và f[φ(t)] là các hàm số liên tục trên [α,β], a = φ(α), b = φ(β).

(4) Nếu f(x) là hàm số lẻ, tức là f(-x) = -f(x), thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0;$ nếu f(x) là hàm số chẵn, tức là f(-x) = f(x), thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

(5) Nếu f(x) là hàm số liên tục và tuần hoàn với chu kỳ T > 0, tức là f(x+T) = f(x), thì $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$

Ví dụ **4.2.1.** Chứng minh quy tắc (4)

- Giả sử hàm số f(x) là hàm số lẻ, khi đó ta đổi biến t = -x$\Rightarrow \begin{cases} t = a & \text{khi} \quad x = -a \\ t = -a & \text{khi} \quad x = a \end{cases}$, dt = -dx và f(t) = f(-x) = -f(x), do đó $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_a^{-a} -f(t).(-dt) = \int_a^{-a} f(t)dt = \int_a^{-a} f(x)dx = -\int_{-a}^a f(x)dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$

- Giả sử hàm số f(x) là hàm số chẵn, khi đó ta đổi biến t = -x$\Rightarrow \begin{cases} t = a & \text{khi} \quad x = -a \\ t = 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$, dt = -dx và f(t) = f(-x) = f(x), do đó $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(t).(-dt) = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Ví dụ **4.2.2.** Tính các tích phân (a) $I = \int_0^1 x^2dx,$ (b) $I_\alpha = \int_a^b x^\alpha dx$ với α∈R, 0 < a < b bằng định nghĩa và bằng quy tắc.

Bài giải. (a) Theo định nghĩa, để tính I ta lập tổng tích phân của hàm số f(x) trên [0,1]. Ở đây $f(x) = x^2$, a = 0, b = 1; ta chia đoạn [0,1] thành n phần bằng nhau, khi đó $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ (1 ≤ i ≤ n) và $x_i = \frac{i}{n}$ (0 ≤ i ≤ n). Bây giờ ta chọn $\xi_i = x_i$ (1 ≤ i ≤ n), suy ra $f(\xi_i) = f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$ (1 ≤ i ≤ n) nên

$$I = \int_0^1 x^2dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2.\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}(1+0)(2+0) = \frac{1}{3}$$

Theo quy tắc tính tích phân xác định ta được ngay $I=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$

(b) *Tính* I_α *bằng định nghĩa.* Ở đây $f(x) = x^\alpha$, ta chia đoạn [a,b] thành n phần bởi các điểm tạo thành một cấp số nhân có số hạng đầu tiên là a và công bội q: $x_0 = a$, $x_1 = x_0q = aq$, $x_2 = x_1q = aq^2$, …, $x_i = x_{i-1}q = aq^i$, …, $x_n = x_{n-1}q = aq^n = b$, suy ra $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ và $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = aq^i - aq^{i-1} = aq^{i-1}(q-1)$ $(1 \le i \le n)$, do đó $\max\Delta x_i \to 0$ khi $q \to 1$. Bây giờ ta chọn $\xi_i = x_{i-1} = aq^{i-1}$ $(1 \le i \le n)$, suy ra $f(\xi_i)=f(x_{i-1})=x_{i-1}^\alpha=(aq^{i-1})^\alpha=a^\alpha q^{\alpha(i-1)}$, do đó $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n a^\alpha q^{\alpha(i-1)}aq^{i-1}(q-1)=$

$$a^{\alpha+1}(q-1)\left[1+q^{\alpha+1}+(q^{\alpha+1})^2+...+(q^{\alpha+1})^{n-1}\right]=a^{\alpha+1}(q-1)\sum_{i=1}^n q^{(\alpha+1)(i-1)}=a^{\alpha+1}(q-1)\sum_{i=1}^n\left(q^{\alpha+1}\right)^{i-1}=$$

$$a^{\alpha+1}(q-1)\frac{1-\left(q^{\alpha+1}\right)^n}{1-q^{\alpha+1}}=a^{\alpha+1}(q-1)\frac{1-\left(q^n\right)^{\alpha+1}}{1-q^{\alpha+1}}=a^{\alpha+1}(q-1)\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1}}{1-q^{\alpha+1}}=\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{q\to 1}\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}=\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}\overset{(L')}{=}\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\lim_{q\to 1}\frac{1}{(\alpha+1)q^\alpha}=$$

$$\left(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)\lim\limits_{q\to 1}q^\alpha}=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Tính I_α *bằng quy tắc.* $I_\alpha=\int_a^b x^\alpha dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Nhận xét: Khi $\alpha = 2$, $a = 0$ và $b = 1$ thì $I_2=\int_0^1 x^2dx=\frac{1^{2+1}-0^{2+1}}{2+1}=\frac{1}{3}=I$ ở (a).

Ví dụ **4.2.3.** Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ với $S_n=\frac{1}{n^5}\sum_{i=1}^{n-1}i^4$ bằng cách xây dựng tổng tích phân của hàm số thích hợp.

Bài giải. Ta thấy $\frac{1}{n}+S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}\sum_{i=1}^{n-1}i^4=\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^4.\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4.\frac{1}{n}$ là tổng tích phân của hàm số $f(x) = x^4$ trên [0,1]. Thật vậy, ta chia đoạn [0,1] thành n phần bằng nhau, khi đó $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ $(1 \le i \le n)$ và $x_i=\frac{i}{n}$ $(0 \le i \le n)$. Bây giờ ta chọn $\xi_i = x_i$ $(1 \le i \le n)$, suy ra $f(\xi_i)=f(x_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^4$ $(1 \le i \le n)$ nên $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^4.\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+S_n$

$$\Rightarrow \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+S_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}S_n=0+\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$

Mặt khác, theo định nghĩa thì $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\int_0^1 x^4dx=\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\frac{1}{5}$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$

4.2.5. Các ứng dụng của tích phân xác định

4.2.5.1. Tính diện tích các hình phẳng

Từ kết quả của bài toán tính diện tích hình thang cong và định nghĩa tính phân xác định ta thấy, nếu f(x) ≥ 0 thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường y = f(x) và các đường thẳng x = a, x = b, y = 0. Trong trường hợp tổng quát thì $S = \int_a^b |f(x)|dx.$

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ $[f_1(x) \geq f_2(x)]$ và hai đường thẳng x = a, x = b được tính theo công thức $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx.$ Trong trường hợp tổng quát thì $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx.$

Nếu đường cong được cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường cong này, các đường thẳng x = a, x = b và đoạn [a,b] của trục Ox được tính bằng công thức $S = \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)\varphi'(t)|dt,$ trong đó t_1 và t_2 được xác định từ phương trình $a = \varphi(t_1)$ và phương trình $b = \varphi(t_2)$, với φ(t), ψ(t) và φ'(t) là các hàm liên tục trên $[t_1,t_2]$.

Nếu đường cong được cho bởi phương trình r = r(φ) trong tọa độ cực (r,φ) thì diện tích S của hình quạt cong giới hạn bởi hai tia φ = α, φ = β (α < β) và cung AB của đường cong r = r(φ), trong đó r(φ) là hàm số liên tục trên [α,β], được tính bằng công thức $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$

Xem các ví dụ trong [1].

4.2.5.2. Tính độ dài cung của đường cong phẳng

Nếu đường cong y = f(x) liên tục trên [a,b] và đạo hàm f'(x) của nó cũng liên tục trên [a,b] thì độ dài cung tương ứng của đường cong đó được tính theo công thức $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$

Nếu đường cong được cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ thì $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt,$ trong đó t_1 và t_2 được xác định từ phương trình $a = \varphi(t_1)$ và phương trình $b = \varphi(t_2)$, với φ(t), ψ(t) và φ'(t) là các hàm liên tục trên $[t_1,t_2]$.

Nếu đường cong được cho bởi phương trình r = r(φ) trong tọa độ cực (r,φ) với α ≤ φ ≤ β, trong đó r(φ) là hàm số liên tục trên [α, β] thì $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}d\varphi.$

Xem các ví dụ trong [1].

4.2.5.3. Tính thể tích của vật thể

Nếu diện tích của thiết diện ngang của vật thể được tạo ra do mặt phẳng vuông góc với trục Ox có thể biểu diễn như là hàm số của x dưới dạng S = S(x) với a ≤ x ≤ b thì thể tích của phần vật thể nằm giữa các mặt phẳng vuông góc với trục Ox là x = a và x = b được tính bằng công thức $V = \int_a^b S(x)dx.$

Nếu hình thang cong giới hạn bởi đường cong y = f(x) và các đường thẳng y = 0, x = a, y = b quay quanh trục Ox thì thể tích của vật thể tròn xoay này được tính bằng công thức $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Nếu hình giới hạn bởi các đường cong $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ $[0 \le f_1(x) \le f_2(x)]$ và các đường thẳng x = a, x = b quay xung quanh trục Ox thì thể tích của vật tròn xoay này được tính bằng công thức $V_x = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx$.

Xem các ví dụ trong [1].

4.2.5.4. Tính diện tích của mặt tròn xoay

Nếu cung của đường cong y = f(x) với a ≤ x ≤ b quay quanh trục Ox thì diện tích mặt tròn xoay được tính bằng công thức $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$.

Nếu cung của đường cong y = f(x) với a ≤ x ≤ b quay quanh trục Ox được cho bởi các phương trình tham số $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ với $t_1 \le t \le t_2$ thì diện tích mặt tròn xoay được tính bằng công thức $S_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}dt$.

Xem các ví dụ trong [1].

4.3. Tích phân suy rộng

4.3.1. Khái niệm và cách tính tích phân suy rộng

Trong các phần trên ta đã xây dựng khái niệm tích phân xác định trong trường hợp các cận tích phân là hữu hạn và hàm số lấy tích phân là bị chặn, trong phần này ta sẽ xét trường hợp khi mà một trong hai điều kiện trên bị vi phạm, tức là hoặc cận tích phân là vô hạn, hoặc hàm số lấy tích phân là không bị chặn.

4.3.1.1. Tích phân suy rộng loại 1 (cận tích phân là vô hạn)

Tích phân suy rộng loại 1 của hàm số f(x) [f(x) là hàm số bị chặn], từ a đến +∞ được xác định bởi đẳng thức $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu giới hạn này không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Tương tự, tích phân suy rộng loại 1 của hàm số f(x) [f(x) là hàm số bị chặn], từ -∞ đến b được xác định bởi đẳng thức $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$. Nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu giới hạn này không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Trường hợp, nếu tích phân suy rộng loại 1 của hàm số f(x) [f(x) là hàm số bị chặn], từ -∞ đến +∞ được xác định bởi đẳng thức $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$ (c là một số hữu hạn). Nếu cả hai giới hạn ở vế phải đẳng thức trên tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu có ít nhất một trong hai giới hạn ở vế phải đẳng thức trên không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 1 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Ví dụ **4.3.1.1.** Tính các tích phân (a) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$, (b) $\int_0^{+\infty}\cos x dx$, (c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$

Bài giải.

(a) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Big|_{e^2}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\ln^2 b}\right) =$

$\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\ln^2 b} = \frac{1}{8}-\frac{1}{2}.0 = \frac{1}{8}$, do đó tích phân suy rộng loại 1 này hội tụ.

(b) $\int_0^{+\infty}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\sin b-\sin 0) = \lim_{b\to+\infty}\sin b$, giới hạn này không tồn tại, do đó tích phân suy rộng loại 1 này phân kỳ.

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+5} =$

$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_a^0 + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_0^b =$

$\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{b+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\arctan\frac{b+1}{2}-\arctan\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\arctan\frac{b+1}{2}+$

$\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\arctan\frac{b+1}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, do đó tích phân suy rộng loại 1 này hội tụ.

4.3.1.2. Tích phân suy rộng loại 2 (hàm số lấy tích phân không bị chặn)

Tích phân suy rộng loại 2 của hàm số f(x) có $\lim_{x\to b-0} f(x)=\infty$, từ a đến b được xác định bởi đẳng thức $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$ Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu giới hạn này không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Tích phân suy rộng loại 2 của hàm số f(x) có $\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$, từ a đến b được xác định bởi đẳng thức $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$ Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu giới hạn này không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Trường hợp, nếu tích phân suy rộng loại 2 của hàm số f(x) có $\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$ và $\lim_{x\to b-0} f(x)=\infty$, từ a đến b được xác định bởi đẳng thức $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (a < c < b). Nếu cả hai giới hạn ở vế phải đẳng thức trên tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là hội tụ; còn nếu có ít nhất một trong hai giới hạn ở vế phải đẳng thức trên không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng loại 2 dạng này, được gọi là phân kỳ.

Ví dụ **4.3.1.2.** Tính các tích phân (a) $\int_0^1\frac{dx}{x}$, (b) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x}$, (c) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Bài giải.

(a) Hàm lấy tích phân không bị chặn tại điểm x = 0 $\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 =$

$\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = +\infty$, do đó tích phân suy rộng loại 2 này phân kỳ.

(b) Hàm lấy tích phân $\frac{1}{\cos x}$ không bị chặn tại điểm $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} =$

$\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon} = \ln\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \ln\left(\tan\frac{\pi}{2}\right) = \infty$, do đó tích phân suy rộng loại 2 này phân kỳ.

(c) Hàm lấy tích phân $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ không bị chặn tại tại các điểm x = ±1

$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} + \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$

$-\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(-1+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2} = \pi$, do đó tích phân suy rộng loại 2 này hội tụ.

4.3.2. Dấu hiệu hội tụ (tiêu chuẩn so sánh) đối với tích phân suy rộng

4.3.2.1. Dấu hiệu hội tụ đối với tích phân suy rộng loại 1

Giả sử f(x), g(x) là hai hàm số không âm và khả tích trên [a,+∞), khi đó nếu tồn tại số c > a sao cho f(x) ≤ g(x) với mọi x∈[c,+∞) thì

(1) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

(2) Nếu $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$ với 0 < k < +∞ thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả.

Nếu $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, nếu $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Trường hợp hàm số f(x) có dấu tùy ý, ta có: Nếu tích phân $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ; khi đó, ta nói rằng tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối. Còn nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng tích phân $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói rằng tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ không tuyệt đối.

Ví dụ **4.3.2.1.** (a) Chứng minh rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ hội tụ khi p > 1, phân kỳ khi p ≤ 1;

(b) Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$

Bài giải. (a) Theo định nghĩa $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_a^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}b^{1-p}-\frac{a^{1-p}}{1-p}$

- Nếu p > 1 thì $\lim_{b\to+\infty}b^{1-p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{p-1}}=0\Rightarrow\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{a^{1-p}}{1-p}$, tức là tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ hội tụ

- Nếu p ≤ 1 thì $\lim_{b\to+\infty}b^{1-p}=+\infty$ tức là tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ phân kỳ.

Kết quả này được sử dụng (mà không cần phải chứng minh lại) khi khảo sát tính hội tụ của tích phân suy rộng loại 1.

(b) Nếu đặt $x=\sqrt{t}$ thì $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt+\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\right)=\frac{1}{2}(I_1+I_2)$

- Tích phân $I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ là tích phân bình thường vì hàm số lấy tích phân là hàm bị chặn. Thật vậy, tại cận tích phân t = 0 hàm số lấy tích phân có khả năng không bị chặn thì $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}.\sqrt{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}.\lim_{t\to0}\sqrt{t}=1.0=0$.

- Tích phân $I_2=\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=-\lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{d(\cos t)}{\sqrt{t}}=-\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right|_{\pi/2}^{b}-\lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt=$

$0-\lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt=-\lim_{b\to+\infty}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt=-\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$. Ta thấy $\frac{\cos t}{t^{3/2}}\le\frac{1}{t^{3/2}}$ mà tích phân $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ đã biết là hội tụ theo (a) nên tích phân $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$ hội tụ theo dấu hiệu hội tụ đối với tích phân suy rộng loại 1, suy ra $I_2=-\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt$ hội tụ.

- Như vậy, tích phân $I_2=\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ hội tụ, suy ra tích phân $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ hội tụ.

Ví dụ **4.3.2.2.** Khảo sát tính hội tụ của tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)dx$

Bài giải. Ký hiệu $f(x)=1-\cos\frac{1}{x}$ và $g(x)=\frac{1}{x^2}$, ta thấy $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{4}{4x^2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{4x^2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{\frac{1}{2x}\to0}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2=\frac{1}{2}.1^2=\frac{1}{2}$$

Do đó, theo hệ quả trên thì tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)dx$ hội tụ vì tích phân $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ đã biết là hội tụ.

4.3.2.2. Dấu hiệu hội tụ (tiêu chuẩn so sánh) đối với tích phân suy rộng loại 2

Giả sử f(x), g(x) là hai hàm số không âm và khả tích trên (a,b], cả hai hàm này đồng thời không bị chặn tại x = a (điểm x = a được gọi là điểm bất thường hoặc là điểm gián đoạn). Giả sử f(x) ≤ g(x) với mọi $x \in (a,c]$ (a < c < b) thì

(1) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ

(2) Nếu $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = k$ với $0 < k < +\infty$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả.

Nếu $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, nếu $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ và $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Trường hợp hàm số f(x) có dấu tùy ý, ta có: Nếu tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ; khi đó, ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối. Còn nếu tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ nhưng tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ không tuyệt đối.

Ví dụ **4.3.2.3.** (a) Chứng minh rằng các tích phân suy rộng $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ với a < b hội tụ khi p < 1, phân kỳ khi p ≥ 1. (b) Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$

Bài giải. (a) Theo định nghĩa $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^p} = \frac{1}{1-p}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(b-x)^{1-p}\Big|_a^{b-\varepsilon} =$

$\frac{1}{p-1}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-p} + \frac{(b-a)^{1-p}}{p-1}$

Nếu p < 1 thì $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-p} = 0,$ còn khi p > 1 thì $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-p} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} = +\infty$ và cuối cùng nếu p = 1 thì $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{b-x} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = +\infty.$ Do đó, khi p < 1 tích phân suy rộng $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ hội tụ, còn khi p ≥ 1 thì tích phân suy rộng $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ phân kỳ.

Đối với tích phân $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ chứng minh tương tự.

Các kết quả này được sử dụng (mà không cần phải chứng minh lại) khi khảo sát tính hội tụ của tích phân suy rộng loại 2.

(b) Hàm số lấy tích phân là không bị chặn khi $x \to 1$. Ta viết hàm số lấy tích phân dưới dạng sau $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/3}} = g(x)$. Áp dụng kết quả ở (a) ta thấy tích phân suy rộng $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ hội tụ vì tích phân suy rộng $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ hội tụ.

Ví dụ **4.3.2.4.** Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Bài giải.

Tích phân $\int_0^1 \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ là tích phân suy rộng loại 2 vì hàm lấy tích phân không bị chặn tại x = 1.

Ta thấy $\left|\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ trên [0,1]. Vì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ là tích phân hội tụ nên tích phân $\int_0^1 \left|\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}\right| dx$ hội tụ, suy ra tích phân $\int_0^1 \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hội tụ tuyệt đối.

BÀI TẬP

4.1. Tính các tích phân

(a) $\int x\sqrt{x}dx$ (b) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ (c) $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(d) $\int \frac{2-x^4}{1+x^2} dx$ (e) $\int e^{3x} 3^x dx$ (f) $\int \tan^2 xdx$

(g) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ (h) $\int (2\tan x + 3\cot x)^2 dx$ (i) $\int x\cos(x^2)dx$

(k) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ (l) $\int x\sqrt[3]{ax^2+b}dx$ với $a \ne 0$ (m) $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$

(n) $\int \cos(\sin x).\cos xdx$

4.2. Tính các tích phân

(a) $\int \cos(ax+b)dx$ với $a \ne 0$ (b) $\int e^{ax+b}dx$ (c) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ với $a \ne 0$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ với $a \ne 0$ (e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ với $a \ne 0$ (f) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(g) $\int \frac{dx}{\cos x}$ (h) $\int \tan xdx$ (i) $\int \cot xdx$

(k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$ (l) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$ (m) $\int \left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2 \cos\frac{x}{2}dx$

(n) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$ (o) $\int \frac{x dx}{x^4+2x^2+5}$ (p) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx$

(q) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+5}dx$ (r) $\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sin(2\sqrt{x})}dx$

4.3. Tính các tích phân

(a) $\int x\ln x dx$ (b) $\int \arcsin x dx$ (c) $\int x^2 \arctan x dx$

(d) $\int (x+1)e^x dx$ (e) $\int x^2 \sin x dx$ (f) $\int x^5 e^{x^2} dx$

(g) $\int (x^2+2x+3)\cos x dx$ (h) $\int e^{2x}\cos x dx$ (i) $\int \sin\sqrt{x} dx$

(k) $\begin{cases} I = \int \sin(\ln x)dx \\ J = \int \cos(\ln x)dx \end{cases}$ (l) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ với $a \neq 0$

(m) $\begin{cases} I = \int e^{ax}\sin bx dx \\ J = \int e^{ax}\cos bx dx \end{cases}$ với $a^2+b^2>0$ (n) $\begin{cases} I = \int \frac{\sin x dx}{a\cos x + b\sin x} \\ J = \int \frac{\cos x dx}{a\cos x + b\sin x} \end{cases}$ với $a^2+b^2>0$

4.4. Chứng minh các đẳng thức ($n, m \in \mathbf{Z}$) và tìm công thức truy hồi đối với I_n hoặc $I_{n,m}$

(a) $I_n = \int \sin^n x dx = \frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx$

(b) $I_n = \int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx$

(c) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}$

(d) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}$

(e) $I_{n,m} = \int \cos^m x\sin^n x dx = \begin{cases} \frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x dx & \text{khi} \quad m<n \\ -\frac{\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x\sin^{n-2}x dx & \text{khi} \quad m>n \end{cases}$

(f) $I_n = \int e^{ax}\cos^n x dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2-n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x dx$

(g) $I_n = \int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1}x dx$

4.5. Tính các tích phân

(a) $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx$, (b) $\int \frac{x dx}{x^4+6x^2+5}$, (c) $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^5}$

(d) $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$, (e) $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$

4.6. Tính các tích phân

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$, (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$, (c) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$

(d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$, (e) $\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx$, (f) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

(g) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$, (h) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

4.7. Tính các tích phân

(a) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$, (b) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}$, (c) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x+\sin x}$

(d) $\int \sin^3 x dx$, (e) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$, (f) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$

4.8. Dùng định nghĩa để tính các tích phân sau đây

(a) $I_a = \int_0^1 a^x dx$ với $0 < a \neq 1$ (b) $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$ (c) $I(x) = \int_0^x \cos t dt$ với $x > 0$

sau đó tính bằng quy tắc để kiểm tra kết quả.

4.9. Tính các tích phân

(a) $\int_0^1 xe^{-x}dx$ (b) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ (c) $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$

(d) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$ (e) $\int_{-1}^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ (f) $\int_{-3}^3 \frac{x^2\sin 2x}{x^2+1}dx$

(g) $\int_{-1}^1 x\arctan x dx$ (h) $\int_0^{\pi/4} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ (i) $\int_0^1 e^{x+e^x}dx$

4.10. Tìm giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n$ bằng cách xây dựng tổng tích phân của hàm số thích hợp

(a) $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i$ (b) $S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$ (c) $S_n = \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{i=1}^{n} i^p$

(d) $S_n = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2+i^2}$ (e) $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+i}}$ (f) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n}$

(g) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$ (h) $S_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$ (i) $S_n = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n\alpha+i\beta}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$

4.11. Chứng minh quy tắc tính tích phân: Nếu f(x) là hàm số liên tục và tuần hoàn với chu kỳ T, tức là $f(x+T) = f(x)$, thì $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

4.12. Chứng minh các công thức

(a) $L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ với $n\in\mathbf{N}$

(b) $K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$ với $n\in\mathbf{N}^*$

(c) $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x dx = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} \right]$ với $n \in \mathbf{N}$

(d) $B_{m,n} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ với m, $n \in$ **N*** (Hàm Beta)

4.13. (a) Tính $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, (b) Chứng minh công thức Wallis $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}$

4.14. Chứng minh rằng $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad m \neq n \\ \pi & \text{khi} \quad m = n \end{cases}$ với m và n là các số nguyên dương.

4.15. Tìm diện tích của hình giới hạn bởi các đường

(a) $y = 4x - x^2$ và trục Ox

(b) $x + y = 0$, $y = 2x - x^2$

(c) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$

(d) $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 8$, $x \geq 0$

(e) $y = x^2 + 2x - 3$, $y = -x^2 - 2x + 3$

(f) $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$

4.16. Tìm độ dài cung của đường cong

(a) $y^2 = x^3$ từ $x = 0$ đến $x = 1$ ($y \geq 0$)

(b) $\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{cases}$ từ $t_1 = 0$ đến $t_2 = \frac{\pi}{2}$

(c) $r = a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$ từ $\varphi_1 = 0$ đến $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ($a > 0$)

(d) $r = a\cos^3 \frac{\varphi}{3}$ từ $\varphi_1 = 0$ đến $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ($a > 0$)

4.17. Tính các tích phân

(a) $\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx$

(b) $\int_0^3 \mathrm{sgn}(x - x^3) dx$

4.18. Chứng minh các công thức

(a) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ với f(x) liên tục trên [a,b]

(b) $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$ với f(x) liên tục trên [a,b]

(c) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ với f(t) liên tục trên [0,1]

(d) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ với f(t) liên tục trên [0,1]

(e) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

4.19. Tính thể tích của vật thể tròn xoay

(a) Hình phẳng $\{y = 2x - x^2, y = 0\}$ quay quanh trục Ox

(b) Hình phẳng $\{y^2 + x - 4 = 0, x = 0\}$ quay quanh trục Oy

(c) Hình phẳng $\{y = x^2, y = 4\}$ quay quanh đường thẳng $x = -2$

4.20. Tính diện tích của mặt tròn xoay bởi hình phẳng $x^2 + (y-2)^2 = 1$ quay quanh trục Ox.

4.21. Tính các tích phân suy rộng loại 1

(a) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ (c) $\int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$ (d) $\int_{0}^{+\infty}x\sin x dx$

(e) $\int_{2}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ (f) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ (g) $\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$ (h) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

4.22. Tính các tích phân suy rộng loại 2

(a) $\int_{0}^{2}\frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (b) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (c) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ (d) $\int_{0}^{1}x\ln^2 xdx$

(e) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1-x^3}$ (f) $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ (g) $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ (h) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$

4.23. Khảo sát tính hội tụ của các tích phân suy rộng

(a) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$ (b) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ (c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (d) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$

(e) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ (f) $\int_{1}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}dx$ (g) $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$

(h) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2-1}$ (i) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ (k) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$ (l) $\int_{0}^{1}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$ $(n\in\mathbf{N})$

Chương 5. Chuỗi số và chuỗi hàm

5.1. Chuỗi số

5.1.1. Định nghĩa chuỗi hội tụ, các tính chất của chuỗi hội tụ, tiêu chuẩn Cauchy

Xét dãy số vô hạn $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, trong đó $u_n = f(n)$ với $n \in \mathbf{N}^*$. Biểu thức $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số (hay chuỗi), còn các số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ được gọi là các số hạng của chuỗi; $u_n = f(n)$ được gọi là số hạng tổng quát.

Tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi ký hiệu là S_n và được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Chuỗi được gọi là hội tụ, nếu tổng riêng S_n của chuỗi có giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ tồn tại hữu hạn; ngược lại, nếu giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ không tồn tại hoặc bằng ∞ thì chuỗi được gọi là phân kỳ. Trong trường hợp chuỗi hội tụ, ta ký hiệu $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, S được gọi là tổng của chuỗi.

Ví dụ **5.1.1.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$

Bài giải

Các số hạng $u_n = aq^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ là các số hạng của cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1 = a \neq 0$ và công bội q.

- Nếu $|q| \neq 1$ thì $S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & \text{khi} \quad |q| < 1 \\ \infty & \text{khi} \quad |q| > 1 \end{cases}$

- Nếu $|q| = 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad n = 2k \\ a & \text{khi} \quad n = 2k+1 \end{cases}$ khi q = -1, tức là giới hạn này không tồn tại; và $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ khi q = 1.

Tóm lại, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$ hội tụ khi $|q| < 1$ và phân kỳ khi $|q| \geq 1$. Kết quả này được sử dụng khi cần, mà không cần phải chứng minh lại.

Ví dụ **5.1.2.** Chứng minh rằng, chuỗi số $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + \ldots$ hội tụ và tìm tổng của nó.

Bài giải

Biểu diễn số hạng tổng quát của chuỗi $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ dưới dạng tổng của các phân số đơn giản $\dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2}$ bằng phương pháp hệ số bất định, ta được A = 1/2, B = -1 và C = 1/2; do đó

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

Nhận xét. Tổng riêng S_n của chuỗi chính là $S_n^{(m)}$ với m = 2 ở Bài tập 0.12., do đó từ kết quả của Bài tập 0.12. ta suy ra được ngay

$$S_n^{(m)} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+m)}\right] \Rightarrow S_n = S_n^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

Điều kiện cần của chuỗi hội tụ: Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Chứng minh: Giả sử chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, khi đó $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} S_n = S \\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \end{cases}$, mặt khác do $u_n = S_n - S_{n-1}$ nên $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Điều kiện $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ là cần chứ không phải là đủ để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Chẳng hạn, xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (gọi là chuỗi điều hòa), ta thấy $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, tuy nhiên chuỗi số này lại phân kỳ. Thật vậy, giả sử ngược lại, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hội tụ, khi đó $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} S_n = S \\ \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n =$ $\lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$, điều này mâu thuẫn với $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Như vậy, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì nó phân kỳ.

Ví dụ **5.1.3.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + ...$

Bài giải

Số hạng tổng quát của chuỗi là $u_n = \frac{n}{3n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} =$ $\frac{1}{3-0} = \frac{1}{3} \neq 0$ nên chuỗi đã cho là phân kỳ.

Các tính chất của chuỗi hội tụ

(1) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ (c là hằng số) cũng hội tụ và có tổng là cS.

(2) Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng tương ứng là S_u, S_v thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ cũng hội tụ và có tổng là $S_u + S_v$.

(3) Tính hội tụ/phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi bỏ bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi.

Tiêu chuẩn Cauchy

Điều kiện cần và đủ để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ là với $\forall\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, tìm được số nguyên dương n_0 sao cho khi $p > q \geq n_0$ thì $\left|S_p - S_q\right| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| < \varepsilon$.

5.1.2. Chuỗi số dương

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có $u_n > 0$ với $\forall n \geq 1$ được gọi là chuỗi số dương. Vì $u_{n+1} > 0 \Rightarrow S_{n+1} = S_n + u_{n+1} > S_n$ nên $\{S_n\}$ là dãy số tăng. Do đó nếu dãy số $\{S_n\}$ bị chặn trên thì $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$, do đó chuỗi hội tụ; ngược lại dãy số $\{S_n\}$ không bị chặn thì $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, do đó chuỗi phân kỳ.

Các dấu hiệu so sánh

(1) Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử $u_n \leq v_n$ với $\forall n \geq n_0 \in \mathbf{N^*}$, khi đó nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, còn nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

(2) Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ thì hai chuỗi số này đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

(3) Giả sử hàm số f(x) là hàm số dương, liên tục và đơn điệu giảm trên $[1,+\infty)$, đồng thời $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Khi đó, tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $u_n = f(n)$, đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

Ví dụ **5.1.4.** Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$ hội tụ vì $\frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ với $\forall n \geq 1$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ theo Ví dụ **5.1.1.** tương ứng với a = 1 và q = 1/3.

Ví dụ **5.1.5.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + ...$

Bài giải

Số hạng tổng quát của chuỗi là $u_n = \frac{1}{3n-1}$. So sánh chuỗi này với chuỗi điều hòa có số hạng tổng quát là $v_n = \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$. Do đó chuỗi đã cho là phân kỳ vì chuỗi điều hòa phân kỳ.

Các quy tắc khảo sát tính hội tụ của chuỗi số

Quy tắc **D'Alembert**. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi D < 1, phân kỳ khi D > 1. Còn khi D = 1, không thể khẳng định được chuỗi hội tụ hay phân kỳ mà phải dùng cách khác để khảo sát.

Quy tắc **Cauchy**. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi C < 1, phân kỳ khi C > 1. Còn khi C = 1, không thể khẳng định được chuỗi hội tụ hay phân kỳ mà phải dùng cách khác để khảo sát.

Ví dụ **5.1.6.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của các chuỗi số (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Bài giải

(a) Áp dụng Quy tắc D'Alembert $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}=2=D.$ Vì D > 1 nên chuỗi phân kỳ.

(b) Áp dụng Quy tắc Cauchy $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}=C.$ Vì C > 1 nên chuỗi phân kỳ.

Ví dụ **5.1.7.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...$

Bài giải

Số hạng tổng quát của chuỗi là $u_n=\frac{1}{n^2}$, nếu áp dụng Quy tắc D'Alembert $D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1$ thì không khẳng định được chuỗi là hội tụ hay phân kỳ.

Bây giờ ta áp dụng dấu hiệu so sánh với tích phân suy rộng: Từ $u_n=\frac{1}{n^2}=f(n)$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b=1-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b}=1-0=1$, suy ra tích phân suy rộng này hội tụ, nên chuỗi đã cho hội tụ.

5.1.3. Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

5.1.3.1. Chuỗi hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Định lý. Giả sử chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ với các số hạng có dấu bất kỳ. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ. Khi đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối.

Trong trường hợp, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là hội tụ có điều kiện (hay bán hội tụ).

Chú ý 1. Điều kiện chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ chỉ là điều kiện đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ, chứ không phải là điều kiện cần.

Chú ý 2. Nếu nhờ Quy tắc D'Alembert hoặc Quy tắc Cauchy mà biết được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ thì có thể khẳng định là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ. Thật vậy, khi đó $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

5.1.3.2. Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+...$ trong đó $u_n > 0$ với $\forall n\geq 1$.

Dấu hiệu hội tụ của chuỗi đan dấu (Dấu hiệu Leibniz). Nếu dãy số dương $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ giảm dần và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ và có tổng $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n < u_1$ và $|R_n| < u_{n+1}$, trong đó $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k$ là tổng riêng thứ n của chuỗi số và $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k$ là phần dư thứ n của chuỗi số.

Ví dụ **5.1.8.** Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của chuỗi số $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1}\ldots$

Bài giải

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ và vì $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{2^2+1} = \frac{1}{2+1/2}$, $u_3 = \frac{3}{3^2+1} = \frac{1}{3+1/3}$, $u_4 = \frac{4}{4^2+1} = \frac{1}{4+1/4}$, … nên $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots$ nên điều kiện thứ nhất của Dấu hiệu Leibniz thỏa mãn. Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$ nên điều kiện thứ hai của Dấu hiệu Leibniz cũng thỏa mãn. Do đó theo Dấu hiệu Leibniz thì chuỗi hội tụ.

Ví dụ **5.1.9.** Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, ta có $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$ hay $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz, trong khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa nên phân kỳ. Do đó, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ là chuỗi số hội tụ có điều kiện.

5.2. Chuỗi hàm

5.2.1. Định nghĩa

Chuỗi $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, trong đó các số hạng của chuỗi là hàm số của x, được gọi là chuỗi hàm.

Tập hợp những giá trị của x mà các hàm $u_n(x)$ với $\forall n \ge 1$ xác định và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ, được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm và ký hiệu là X. Mỗi giá trị của miền hội tụ X tương ứng với một giá trị xác định của giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ với $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}u_n(x)$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm. Như vậy, giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ là hàm số của x, ký hiệu là S(x), được gọi là tổng của chuỗi hàm.

$R_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$, được gọi là phần dư thứ n của chuỗi hàm.

Chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ trong miền hội tụ X, được gọi là hội tụ đều trong miền X nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, mà tìm được số $n_0 \in \mathbf{N}^*$ để với $n \ge n_0$ thì $|R_n(x)| < \varepsilon$ với $\forall x \in X$.

Ví dụ **5.2.1.** Cho chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ với $u_n(x) = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n$. Xét sự hội tụ của của chuỗi tại x = 0 và x = 1.

Bài giải. Tại x = 0 thì $u_n(0)=\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-0}{7.0+2}\right)^n=\frac{2^n}{2n-1}$, khi đó chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}$. Ta có $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(0)}{u_n(0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2(n+1)-1}\Big/\frac{2^n}{2n-1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=$

$2\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=2.\frac{2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=2.\frac{2-0}{2+0}=2=D>1$, theo Quy tắc D'Alembert thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}$ phân kỳ.

Tại x = 1 thì $u_n(1)=\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-1}{7.1+2}\right)^n=\frac{1}{3^n(2n-1)}$, khi đó chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n-1)}$. Ta có $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}[2(n+1)-1]}\Big/\frac{1}{3^n(2n-1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=$

$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}.\frac{2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}.\frac{2-0}{2+0}=\frac{1}{3}=D<1$, theo Quy tắc D'Alembert thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n-1)}$ hội tụ.

5.2.2. Tiêu chuẩn hội tụ đều của chuỗi hàm

Tiêu chuẩn Cauchy. Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ trong miền hội tụ X, sẽ hội tụ đều trong miền X khi và chỉ khi với $\forall\varepsilon > 0$ bé tùy ý cho trước, nếu tìm được số $n_0\in$**N*** sao cho khi $p > q \geq n_0$ thì $\left|S_p(x)-S_q(x)\right|=\left|\sum_{k=q+1}^{p}u_k(x)\right|<\varepsilon$ với $\forall x\in X$.

Tiêu chuẩn Weierstrass. Nếu các hàm số $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, …, $u_n(x)$, … trong miền X có giá trị tuyệt đối không vượt quá các số dương a_1, a_2, a_3, …, a_n, … tương ứng, đồng thời chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều trong miền X.

Cần lưu ý rằng, Tiêu chuẩn Weierstrass chỉ là điều kiện đủ để một chuỗi hàm hội tụ đều trên miền X.

Ví dụ **5.2.2.** Chứng minh chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ với $u_n(x)=\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên **R** = (-∞,+∞).

Bài giải. Hiển nhiên $\left|u_n(x)\right|=\left|\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}\right|\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{3/2}}=a_n$ với $\forall n \geq 1$ và với $\forall x\in$**R**. Ta đã biết chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ với $p=\frac{3}{2}>1$ là chuỗi hội tụ, do đó chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}\right|$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}$ hội tụ, đồng thời hội tụ tuyệt đối; hơn nữa theo Tiêu chuẩn Weierstrass thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n nx}{n\sqrt{n}}$ hội tụ đều trên **R**.

5.2.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

(1) Nếu mọi số hạng $u_n(x)$ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ là các hàm liên tục trong miền X, đồng thời chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trong miền X thì tổng S(x) của chuỗi hàm cũng là hàm liên tục trong miền X.

(2) Nếu mọi số hạng $u_n(x)$ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ là các hàm liên tục trong miền X, đồng thời chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trong miền X và có tổng là S(x) thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b u_n(x)dx\right] = \int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]dx$ hội tụ và có tổng là $\int_a^b S(x)dx$ với $[a,b]\subset X$, tức là $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b u_n(x)dx\right] = \int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]dx = \int_a^b S(x)dx$ với $\forall [a,b]\subset X$.

(3) Nếu các hàm số $u_n(x)$ với $\forall n \geq 1$ xác định, khả vi trong miền X nào đó và nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x)$ hội tụ đều trong miền X thì tổng của nó bằng S'(x), với S(x) là tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, tức là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]^{'} = S'(x)$ trong miền X.

5.2.4. Chuỗi lũy thừa

5.2.4.1. Định nghĩa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng $a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, trong đó a, a_0, a_1, …, a_n, … là các số thực.

5.2.4.2. Định lý Abel (tính chất cơ bản của chuỗi lũy thừa)

Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hội tụ tại $x = x_0$ thì nó hội tụ, đồng thời hội tụ tuyệt đối với $\forall x$ thỏa mãn bất đẳng thức $|x - a| < |x - x_0|$.

Nhận xét. Không mất tính tổng quát, ta có thể nghiên cứu chuỗi lũy thừa dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ sau đó thay t = x – a; hoặc ngược lại, có thể nghiên cứu chuỗi lũy thừa dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ sau đó thay a = 0.

Hệ quả. Mọi chuỗi lũy thừa đều có một *khoảng hội tụ* (-R, R) có tâm là điểm a: $|x - a| < R$ hay $a - R < x < a + R$, bên trong khoảng đó chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối, còn ở ngoài khoảng đó thì chuỗi phân kỳ. Tại các đầu mút của khoảng hội tụ ($x = a \pm R$) tính chất hội tụ/hội tụ tuyệt đối/hội tụ có điều kiện/phân kỳ tùy theo chuỗi lũy thừa cụ thể, mà để khẳng định được, cần phải khảo sát trực tiếp chuỗi tương ứng với giá trị của x tại hai đầu mút của khoảng hội tụ.

Số R bằng nửa độ dài của khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi lũy thừa. Trong trường hợp đặc biệt, bán kính hội tụ R có thể bằng 0 hoặc bằng vô hạn; nếu R = 0 thì chuỗi lũy thừa chỉ hội tụ tại điểm x = a, còn nếu R = +∞ thì chuỗi lũy thừa hội tụ trên toàn trục số thực **R**.

Tập hợp tất cả các giá trị của x mà chuỗi lũy thừa hội tụ, được gọi là *miền hội tụ* của chuỗi lũy thừa. Như vậy, khái niệm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa phù hợp với khái niệm miền hội tụ của chuỗi hàm vì chuỗi lũy thừa là một dạng của chuỗi hàm. Để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, đầu tiên ta tìm bán kính hội tụ, sau đó khảo sát trực tiếp sự hội tụ của chuỗi tại hai đầu mút của khoảng hội tụ.

5.2.4.3. Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ được xác định như sau: $R=\begin{cases}1/\rho & \text{khi} \quad 0<\rho<+\infty\\ 0 & \text{khi} \quad \rho=+\infty\\ +\infty & \text{khi} \quad \rho=0\end{cases}$

Ví dụ **5.2.3.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+...$

Bài giải. Đặt t = x – 5, số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa là $u_n(x)=n!(x-5)^n=n!t^n=a_n t^n$ với $a_n=n!$

Ta có $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là R = 0, do đó chuỗi hội tụ chỉ khi t = 0 ⇔ x – 5 = 0, tức là chuỗi hội tụ chỉ khi x = 5.

Ví dụ **5.2.4.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ với $a_n=\frac{1}{n!}$

Bài giải.

Ta có $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\Big/\frac{1}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n}=0$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là R = +∞, do đó chuỗi hội tụ với mọi giá trị của $x\in(-\infty,+\infty)$.

Chú ý. Nếu chuỗi lũy thừa được viết dưới dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ với $u_n(x)=a_n x^n$ thì theo Quy tắc D'Alembert hoặc Quy tắc Cauchy, ta có thể tìm được khoảng hội tụ theo bất đẳng thức $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1$ hoặc theo bất đẳng thức $C=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1$.

Ví dụ **5.2.5.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...$

Bài giải. Số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa là $u_n(x)=\frac{x^n}{n}=a_n x^n$ với $a_n=\frac{1}{n}$

Cách 1. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\Big/\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R=\frac{1}{\rho}=1$, do đó chuỗi hội tụ với mọi giá trị của x thỏa mãn bất đẳng thức -1 < x < 1.

Tại x = -1, chuỗi trở thành chuỗi đan dấu $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...$ hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz; còn tại x = 1, chuỗi trở thành chuỗi điều hòa $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ là chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đang xét là -1 ≤ x < 1 hay [-1,1).

Cách 2. Ta có $D=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right|\Big/\left|\dfrac{x^n}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|x|.\dfrac{n}{n+1}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=$ $|x|\dfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}=|x|$. Từ đây suy ra, để chuỗi hội tụ thì D phải nhỏ hơn 1, tức là $D<1\Leftrightarrow -1<x<1$. Do đó khoảng hội tụ của chuỗi là $-1<x<1$.

Tại hai đầu mút, cũng xét tương tự như ở Cách 1. Cuối cùng, tìm được miền hội tụ của chuỗi là -1 ≤ x < 1 hay [-1,1).

Ví dụ **5.2.6.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $(x-2)+\dfrac{(x-2)^2}{2^2}+\dfrac{(x-2)^3}{3^2}+...$

Bài giải. Số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa là $u_n(x)=\dfrac{(x-2)^n}{n^2}=a_n(x-2)^n$ với $a_n=\dfrac{1}{n^2}$, nếu đặt t = x – 2 thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n t^n$ với $a_n=\dfrac{1}{n^2}$.

Cách 1. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}\Big/\dfrac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=1$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R=\dfrac{1}{\rho}=1$, do đó chuỗi hội tụ với mọi giá trị của t thỏa mãn bất đẳng thức -1 < t < 1 ⇔ -1 < x - 2 < 1 ⇔ 1 < x < 3 .

Tại x = 3, chuỗi trở thành $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+...$ là chuỗi hội tụ vì chuỗi $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\dfrac{1}{4^p}+...$ hội tụ khi p > 1; còn tại x = 1, chuỗi trở thành chuỗi đan dấu $-1+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}-\dfrac{1}{5^2}+...$ hội tụ tuyệt đối.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là 1 ≤ x ≤ 3 hay [1,3].

Cách 2. Ta có $D=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1\Leftrightarrow D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}\right|\Big/\left|\dfrac{(x-2)^n}{n^2}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|x-2|.\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=$ $|x-2|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=|x-2|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}=|x-2|\dfrac{1}{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right)^2}<1=|x-2|$. Từ đây suy ra, để chuỗi hội tụ thì D phải nhỏ hơn 1, tức là $D<1\Leftrightarrow|x-2|<1\Leftrightarrow -1<x-2<1\Leftrightarrow 1<x<3$. Do đó khoảng hội tụ của chuỗi là $1<x<3$.

Tại hai đầu mút, cũng xét tương tự như ở Cách 1. Cuối cùng, tìm được miền hội tụ của chuỗi là 1 ≤ x ≤ 3 hay [1,3].

5.2.4.4. Tính chất của chuỗi lũy thừa

(1) Chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ hội tụ đều trên mọi đoạn [a,b] nằm trong khoảng hội tụ của nó.

(2) Tổng S(x) của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ là hàm số liên tục trong khoảng hội tụ của nó.

(3) Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trên mọi đoạn [a,b] nằm trong khoảng hội tụ của nó: $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$.

Đặc biệt, với $\forall x \in (-R,R)$ thì $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ và chuỗi này cũng là chuỗi lũy thừa có khoảng hội tụ là (-R,R). Như vậy, nếu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ thì $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

(4) Có thể tính đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tại mọi điểm x thuộc khoảng hội tụ của nó: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ và chuỗi này cũng là chuỗi lũy thừa có khoảng hội tụ là (-R,R). Như vậy, nếu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ thì $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Chú ý. Có thể lấy tích phân và tính đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa vô số lần trong khoảng hội tụ của nó.

Ví dụ **5.2.7.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ và tính tổng S(x) của chuỗi trong miền hội tụ đó.

Bài giải. Ta viết chuỗi đã cho dưới dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $a_n = n + 1$.

Ta có $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1+2.0}{1+0} = 1$, do đó bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \frac{1}{\rho} = 1$, nên khoảng hội tụ của chuỗi là $-1 < x < 1$.

Tại x = -1 chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trở thành chuỗi đan dấu $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ với $a_n = n + 1$, là chuỗi phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$, tức là vi phạm điều kiện cần của chuỗi hội tụ; còn tại x = 1 chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trở thành chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ với $a_n = n + 1$ cũng là chuỗi phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$, tức là vi phạm điều kiện cần của chuỗi hội tụ.

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi đã cho là -1 < x < 1 hay (-1,1).

Để tính tổng $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ trong miền hội tụ (-1,1) ta tích phân từ 0 đến x hai vế của đẳng thức trên: $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^x t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} 1.\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} x^n}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ vì $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ khi -1 < x < 1. Do đó $S(x) = \left[\int_0^x S(t)dt \right]' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ trong miền hội tụ (-1,1) của chuỗi.

Ví dụ **5.2.8.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ và tính tổng S(x) của chuỗi trong miền hội tụ đó.

Bài giải. Ta viết chuỗi đã cho dưới dạng $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ với $a_n = \frac{1}{n}$.

Ta có $\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\Big/\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$, do đó bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ là $R = \frac{1}{\rho} = 1$, nên khoảng hội tụ của chuỗi là $-1 < x < 1$.

Tại x = -1: Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ trở thành chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz, còn tại x = 1: Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ trở thành chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ.

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ là $-1 \le x < 1$ hay [-1,1).

Để tính tổng $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ trong miền hội tụ [-1,1) ta đạo hàm hai vế của đẳng thức trên: $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k = \lim_{n\to\infty}1.\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}x^n}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ vì $\lim_{n\to\infty}x^n = 0$ khi $-1 \le x < 1$.

$\Rightarrow S(x) = \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-t|\Big|_0^x = -\ln(1-x) = \ln\frac{1}{1-x}$ trong miền hội tụ [-1,1) của chuỗi.

5.2.4.5. Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Mọi hàm số f(x) khả vi vô hạn lần trong khoảng $|x - a| < R \Leftrightarrow a - R < x < a + R$ đều có thể khai triển được thành chuỗi lũy thừa vô hạn dạng Taylor trong khoảng này và hội tụ tới nó: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ nếu trong khoảng đó thỏa mãn điều kiện $\lim_{n\to\infty}R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$, trong đó $R_n(x)$ là phần dư của công thức Taylor, $c = a + \theta(x - a)$ và $0 < \theta < 1$. Khi a = 0, chuỗi nhận được là chuỗi Mac Laurin $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Nếu trong khoảng nào đó chứa điểm a, với mọi n thỏa mãn bất đẳng thức $|f^{(n)}(x)| < M$, trong đó M là hằng số dương, thì $\lim_{n\to\infty}R_n(x) = 0$ và hàm số f(x) khai triển được thành chuỗi Taylor.

Ví dụ **5.2.9.** Khai triển hàm $f(x) = \sin^2 x$ thành chuỗi lũy thừa theo x.

Bài giải. Ta thấy f'(x) = 2sinxcosx = sin2x $\Rightarrow f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\sin\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$ với $n \ge 1$. Bây giờ ta tìm giá trị của các hàm f(x), $f^{(k)}(x)$ với $1 \le k \le n$ tại x = 0 và $f^{(n+1)}(x)$ tại x = c, thì được f(0) = 0,

$f^{(n)}(0) = 2^{n-1}\sin\left[2.0+(n-1)\frac{\pi}{2}\right] = 2^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2} = \begin{cases}(-1)^{k-1}2^{2k-1} & \text{khi} \quad n = 2k \\ 0 & \text{khi} \quad n = 2k-1\end{cases}$ và

$f^{(n+1)}(c) = 2^n\sin\left(2c+\frac{n\pi}{2}\right)$. Nên phần dư $R_n(x) = \dfrac{2^n\sin\left(2c+\frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(2c+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ với $\forall x$, còn $\left|\sin\left(2c+\frac{n\pi}{2}\right)\right| \le 1$ do đó $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x) = 0$. Như vậy, có thể khai triển được hàm f(x) = $\sin^2 x$ dưới dạng chuỗi Taylor sau đây:

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \dots \ (-\infty < x < +\infty)$$

Nhận xét. Qua ví dụ trên ta thấy, việc sử dụng trực tiếp công thức Taylor để khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa, thì việc tính toán khá cồng kềnh và việc chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x) = 0$ không phải đơn giản. Trong nhiều trường hợp, người ta thường sử dụng các khai triển dạng công thức Mac Laurin của một số hàm sơ cấp cơ bản sau đây để khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \dots \ (-1 \le x \le 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \ (-1 < x \le 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \ (-1 < x < 1)$$

$(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$, khai triển cuối cùng này đúng:

+ khi n ≥ 0 nếu -1 ≤ x ≤ 1
+ khi -1 < n < 0 nếu -1 < x ≤ 1
+ khi n ≤ -1 nếu -1 < x < 1

Chẳng hạn, như ở Ví dụ 5.2.9 ngay ở trên, ta có thể thực hiện như sau: Ta biến đổi $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ và thay cos2x bằng khai triển thành chuỗi lũy thừa của hàm số $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}\dots + (-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots$ $(-\infty < x < +\infty)$ với t = 2x thì ta được $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}\dots + (-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots$ Sau đó thay khai triển trên vào biểu thức $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ thì cũng nhận được kết quả giống như kết quả đã nhận được ở trên là

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \dots \ (-\infty < x < +\infty)$$

Ví dụ **5.2.10.** Khai triển các hàm f(x) = $(1 - x)^\alpha$ thành chuỗi lũy thừa theo x.

Bài giải.

Thay x bởi –x vào khai triển đã biết $(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$ ta nhận được $(1-x)^{\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$

5.2.5. Chuỗi Fourier (*Tự đọc trong học liệu bắt buộc* [1]).

BÀI TẬP

5.1. Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của các chuỗi số

(a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots$

(b) $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots$

(c) $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots$

(d) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$

(e) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots$

(f) $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots$

(g) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \ldots$

(h) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\sqrt{3}} + \ldots$

(i) $0,6 + 0,51 + 0,501 + 0,5001 + \ldots$

(k) $\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \ldots$

(l) $1,1 - 1,01 + 1,001 - 1,0001 + \ldots$

(m) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

5.2. Khảo sát tính hội tụ/phân kỳ của các chuỗi số

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n + 1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4.2^n - 3}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2^n+1)^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ với $p < 1$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}$ với $m > 1$

5.3. Áp dụng dấu hiệu so sánh (1) để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \ldots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 1}$

5.4. Áp dụng dấu hiệu so sánh (2) để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\frac{2+1}{5+1} + \frac{2^2+1}{5^2+1} + \frac{2^3+1}{5^3+1} + \ldots$

(b) $\frac{1}{2.1-1} + \frac{\sqrt{2}}{2.2-1} + \frac{\sqrt{3}}{2.3-1} + \frac{\sqrt{4}}{2.4-1} + \ldots$

5.5. Áp dụng dấu hiệu so sánh (3) để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\frac{1}{9\ln 9} + \frac{1}{19\ln 19} + \frac{1}{29\ln 29} + \ldots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ với $p > 1$

5.6. Áp dụng Quy tắc D'Alembert hoặc Quy tắc Cauchy để xét sự hội tụ của các chuỗi số

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$

(b) $3 + 2,1^2 + 2,01^3 + 2,001^4 + \ldots$

(c) $\frac{10}{11} + \left(\frac{10}{11}\right)^2 .2^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^3 .3^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^4 .4^5 + \ldots$

(d) $\frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 .\frac{1}{2^5} + \left(\frac{11}{10}\right)^3 .\frac{1}{3^5} + \left(\frac{11}{10}\right)^4 .\frac{1}{4^5} + \ldots$

5.7. Nghiên cứu sự hội tụ và xác lập đặc tính của sự hội tụ (hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện) của các chuỗi đan dấu sau

(a) $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \ldots$ (b) $1,1 - 1,02 + 1,003 - 1,0004 + \ldots$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+n+1}$

5.8. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$

5.9. Chứng minh rằng, chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ hội tụ không đều trong (-1,1).

5.10. Chứng minh rằng, chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n nx}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên **R** = (-∞,+∞).

5.11. Chứng minh rằng, chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên đoạn [-1,1].

5.12. Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (b) $2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \frac{16x^{20}}{7} + \ldots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$

5.13. Tìm tổng của các chuỗi:

(a) $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} + \frac{3x^2}{a^3} + \frac{4x^3}{a^4} + \ldots$ với $a > 0$ (b) $\frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^4}{4a^3} + \ldots$ với $a > 0$

(c) $\frac{1.2}{a^2} + \frac{2.3x}{a^3}. + \frac{3.4x^2}{a^4} + \ldots$ với $a > 0$ (d) $-2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 - \ldots$

5.14. Khai triển hàm f(x) thành chuỗi lũy thừa

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ theo lũy thừa của x (b) f(x) = lnx theo lũy thừa của (x – 1)

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ theo lũy thừa của (x – 2) (d) f(x) = ln(x + a) với a > 0, theo lũy thừa của