

GIẢI TÍCH II

**Trường Đại học Công nghệ
Đại học Quốc gia Hà nội**

Giảng viên: TS. Nguyễn Văn Quang

E-mail: nvquang.imech@gmail.com

Giải tích II

Đánh giá kiểm tra:

□ A: Điểm thành phần (40%)

- Điểm chuyên cần, điểm bài tập: 10%
- Điểm thi giữa kỳ: 30%

□ B: Điểm thi cuối kỳ (60%)

□ Điểm kết thúc môn học = $A*0.4 + B*0.6$

Giải tích II

Tài liệu:

1. Nguyễn Đình Trí. Toán học cao cấp, tập 3. NXB Giáo dục, 2006.
2. Nguyễn Thủy Thanh. Bài tập giải tích, tập 1,2,3. NXB Giáo dục, 2002.
3. Trần Đức Long. Bài tập Giải tích, tập 1,2,3. NXB ĐHQGHN, 2005.
4. Nguyễn Thừa Hợp. Giải tích, tập 1,2,3. NXB ĐHQGHN, 2004.
5. James Stewart. Calculus, 7th Edition, 2010.

Giải tích II

Nội dung:

- Chương 1: Mở đầu, giới hạn, liên tục
- Chương 2: Đạo hàm, vi phân
- Chương 3: Tích phân bội hai
- Chương 4: Tích phân bội ba
- Chương 5: Tích phân đường
- Chương 6: Tích phân mặt
- Chương 7: Phương trình vi phân

Nội dung Chương 1

1. Hàm hai biến

2. Mặt bậc hai

TailieuVNU.com Tổng hợp & Sưu tầm

3. Giới hạn

4. Liên tục

1. Hàm hai biến

Định nghĩa

Cho $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Hàm hai biến là một ánh xạ:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Ký hiệu: $f = f(x, y)$.

D được gọi là miền xác định của f .

Miền giá trị của f : $E = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y) \in D : a = f(x, y)\}$

Nếu f cho bởi biểu thức đại số: Miền xác định là tập hợp tất cả các giá trị của x và y , sao cho biểu thức có nghĩa.

Miền giá trị là tập hợp tất cả các số thực mà hàm có thể nhận được.

1. Hàm hai biến

Ví dụ

Hàm hai biến:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - y}$$

Miền xác định: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq y\}$

$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 2} = \sqrt{6}$$

2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Phương trình tổng quát mặt bậc hai trong hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ là:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

Từ Đại số tuyến tính, để vẽ mặt bậc hai:

- 1) Đưa dạng toàn phương (màu đỏ) về dạng chính tắc bằng biến đổi trực giao.
- 2) Tìm phép biến đổi, xác định trục tọa độ mới.
- 3) Vẽ hình.

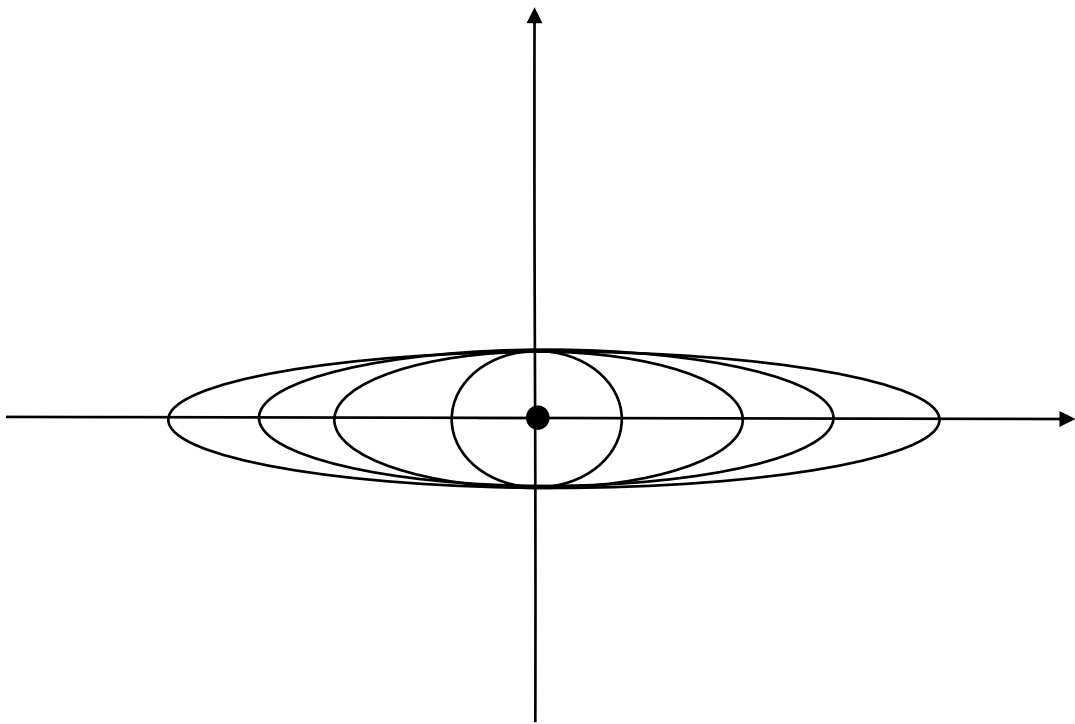
2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Xét đồ thị của hàm số: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Tập hợp tất cả các điểm (x, y) của miền xác định D_f , sao cho:

$f(x, y) = k$ được gọi là đường mức, trong đó k là hằng số cho trước.



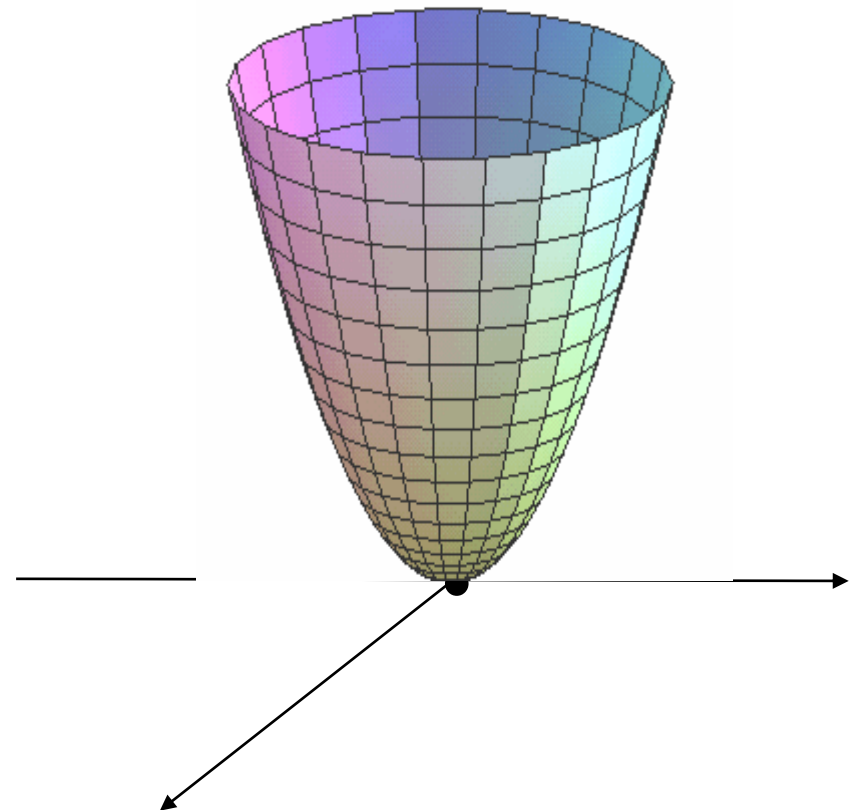
$$k = 0$$

$$k = 1$$

$$k = 2$$

$$k = 3$$

$$k = 4$$

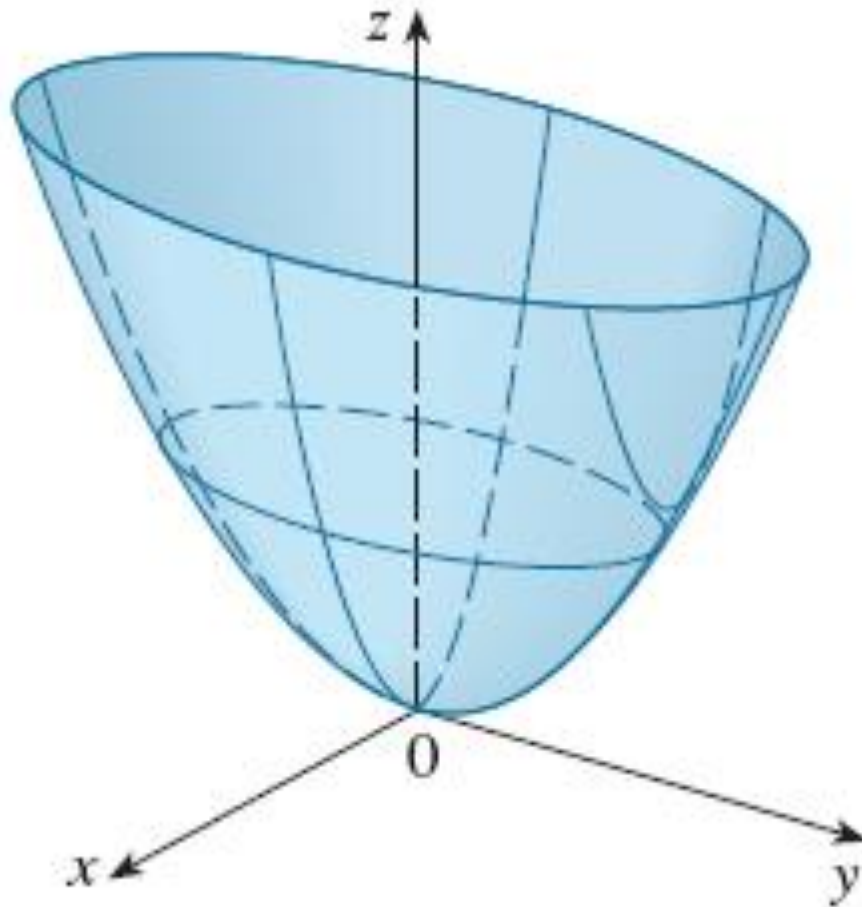


2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt paraboloid elliptic:

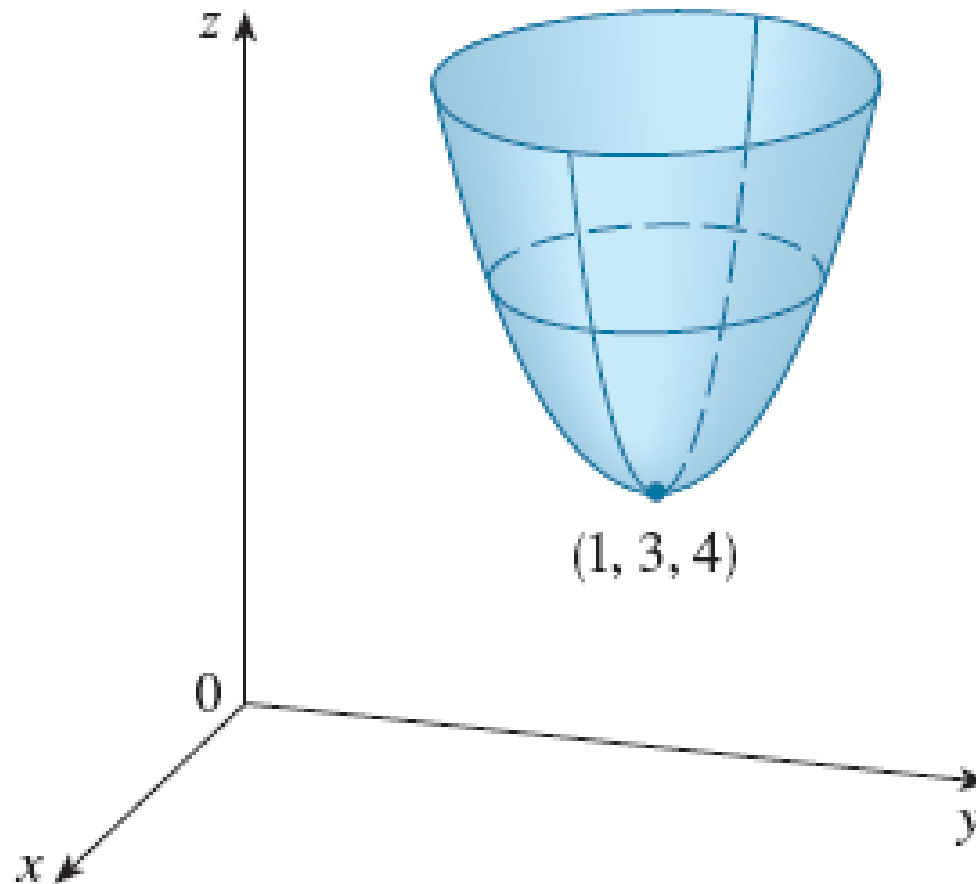
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

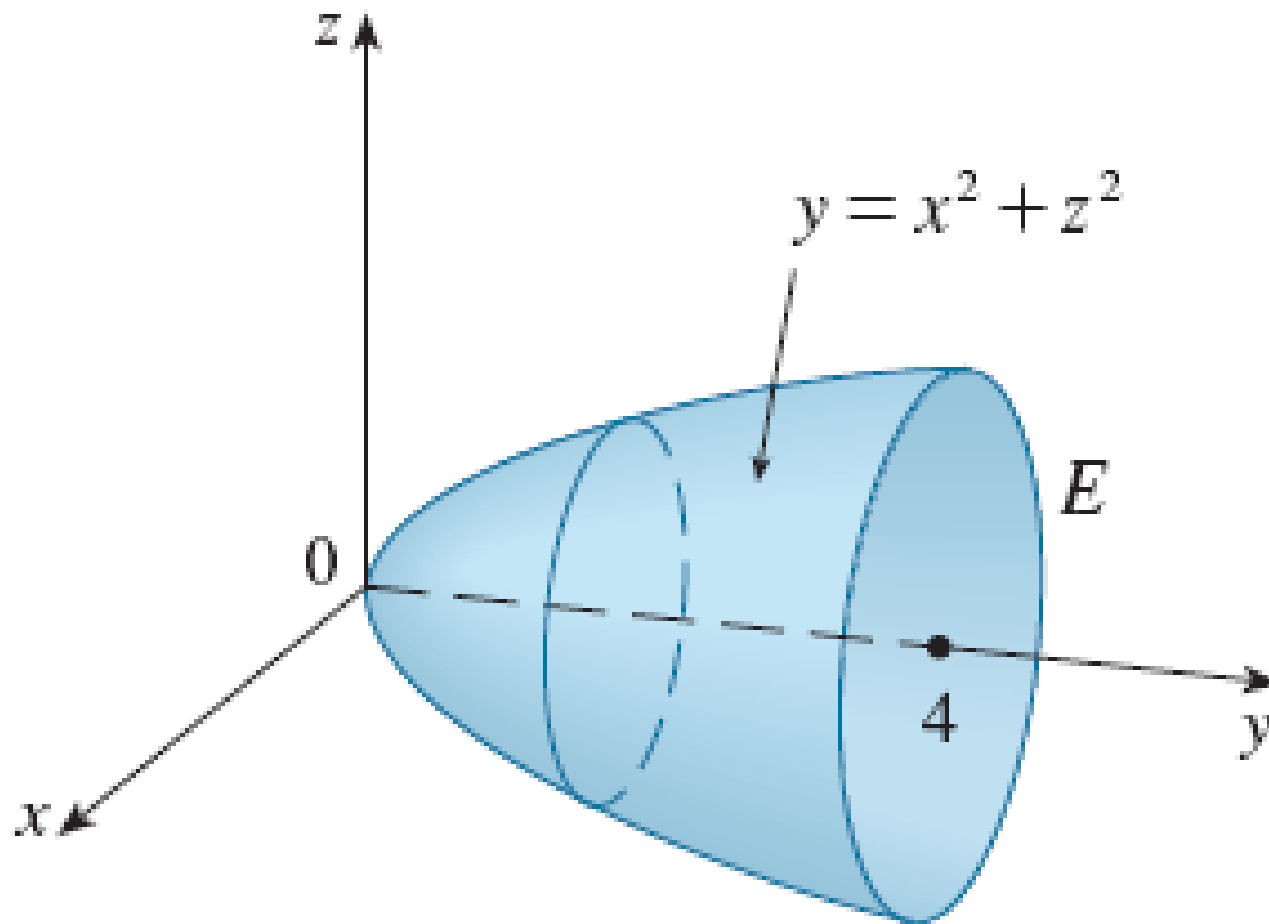
Mặt paraboloid elliptic: $z = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4$



2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt paraboloid elliptic: $y = x^2 + z^2$



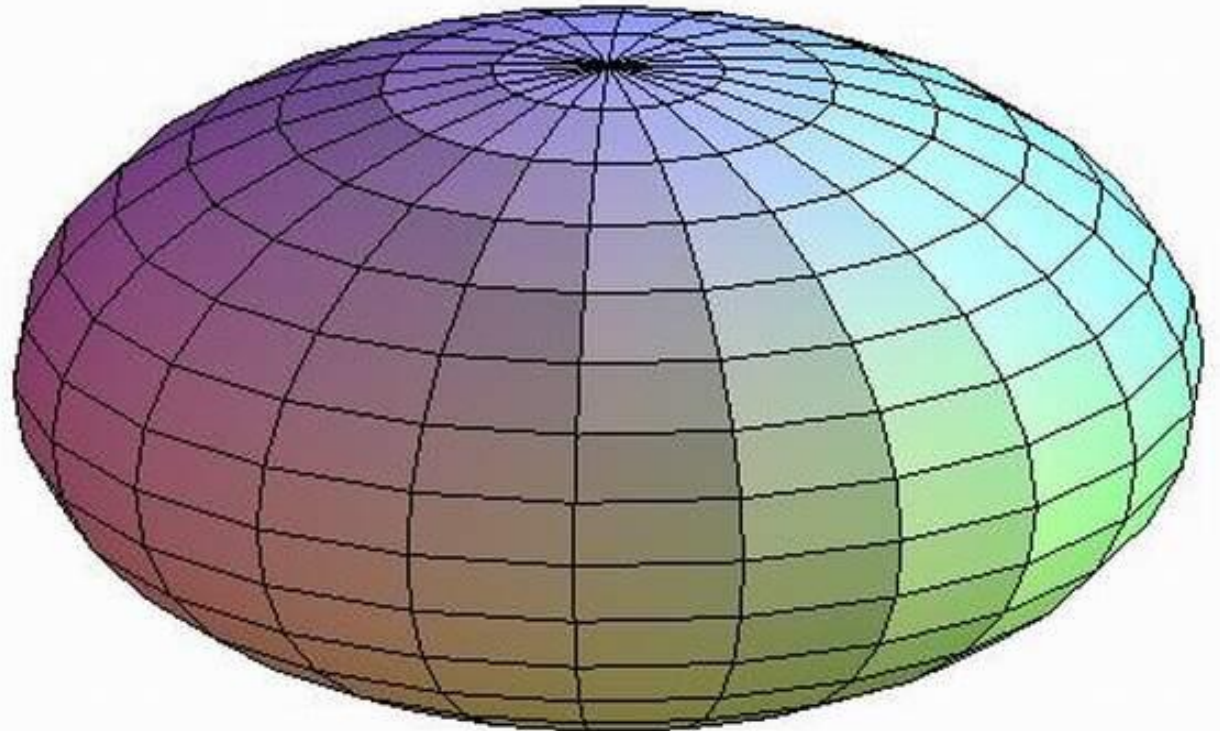
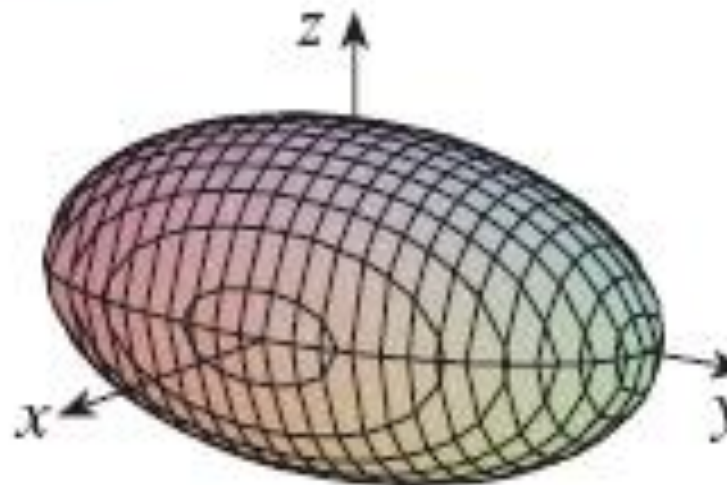
2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ellipsoid



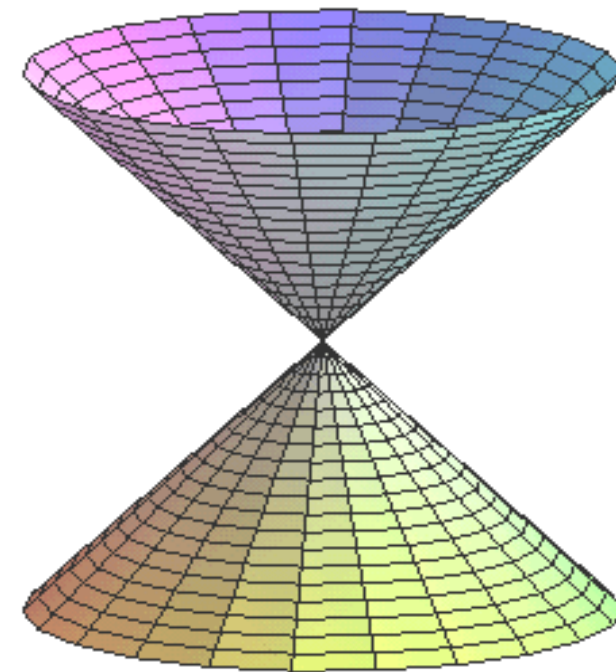
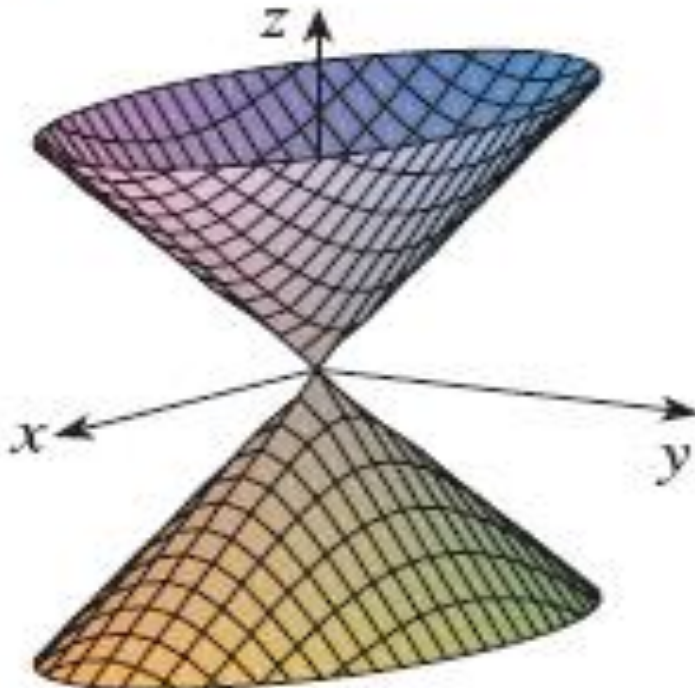
2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt nón hai phía:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Cone

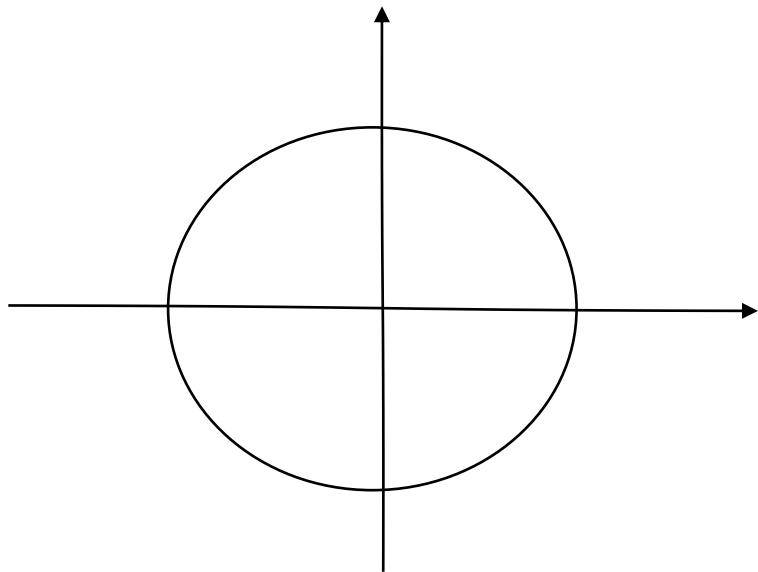


2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Xét đồ thị của hàm số: $x^2 + y^2 = 1$.

Ta thấy với mọi k , đường mức luôn là đường tròn bán kính bằng 1.



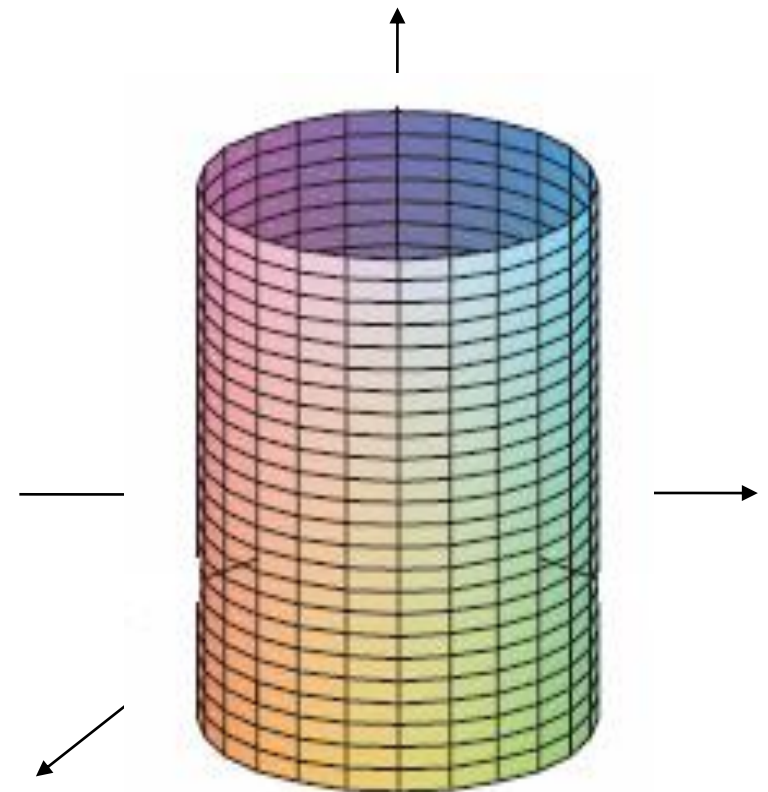
$$k = 2$$

$$k = 1$$

$$k = 0$$

$$k = -1$$

$$k = -2$$

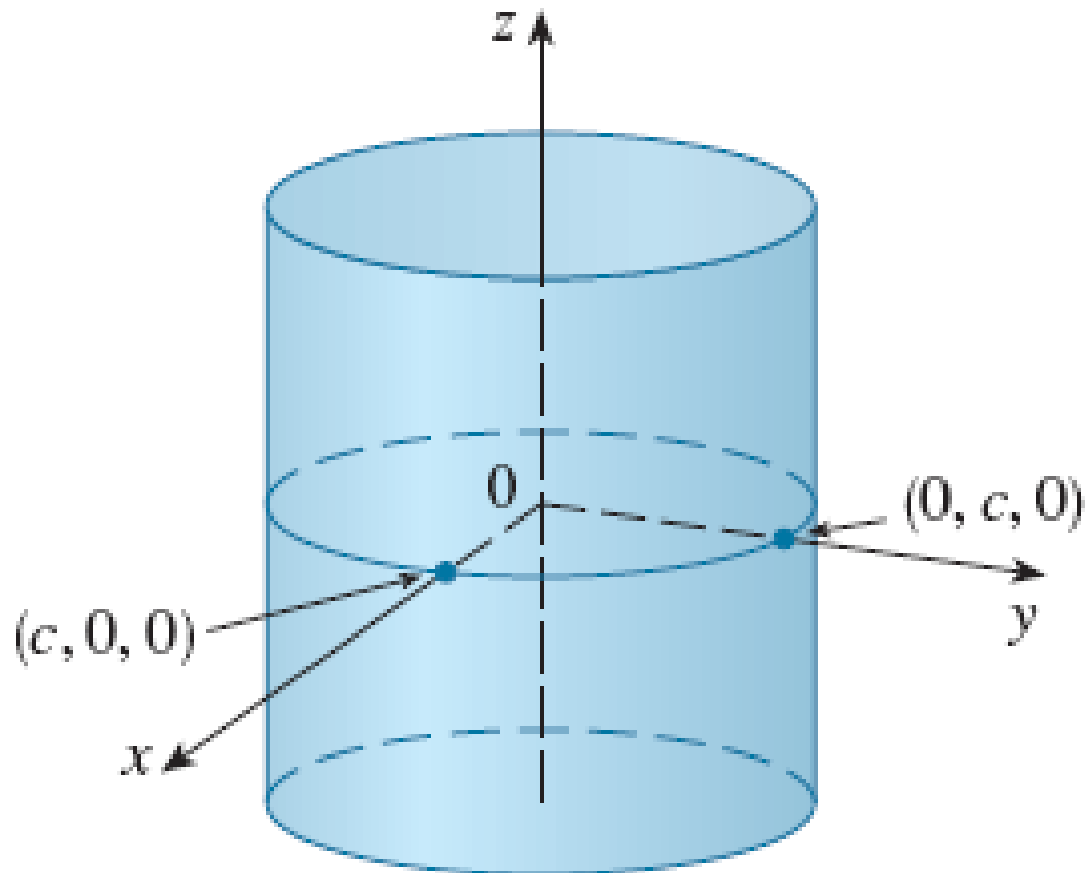


2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt trụ: trong phương trình thiếu hoặc x , hoặc y , hoặc z .

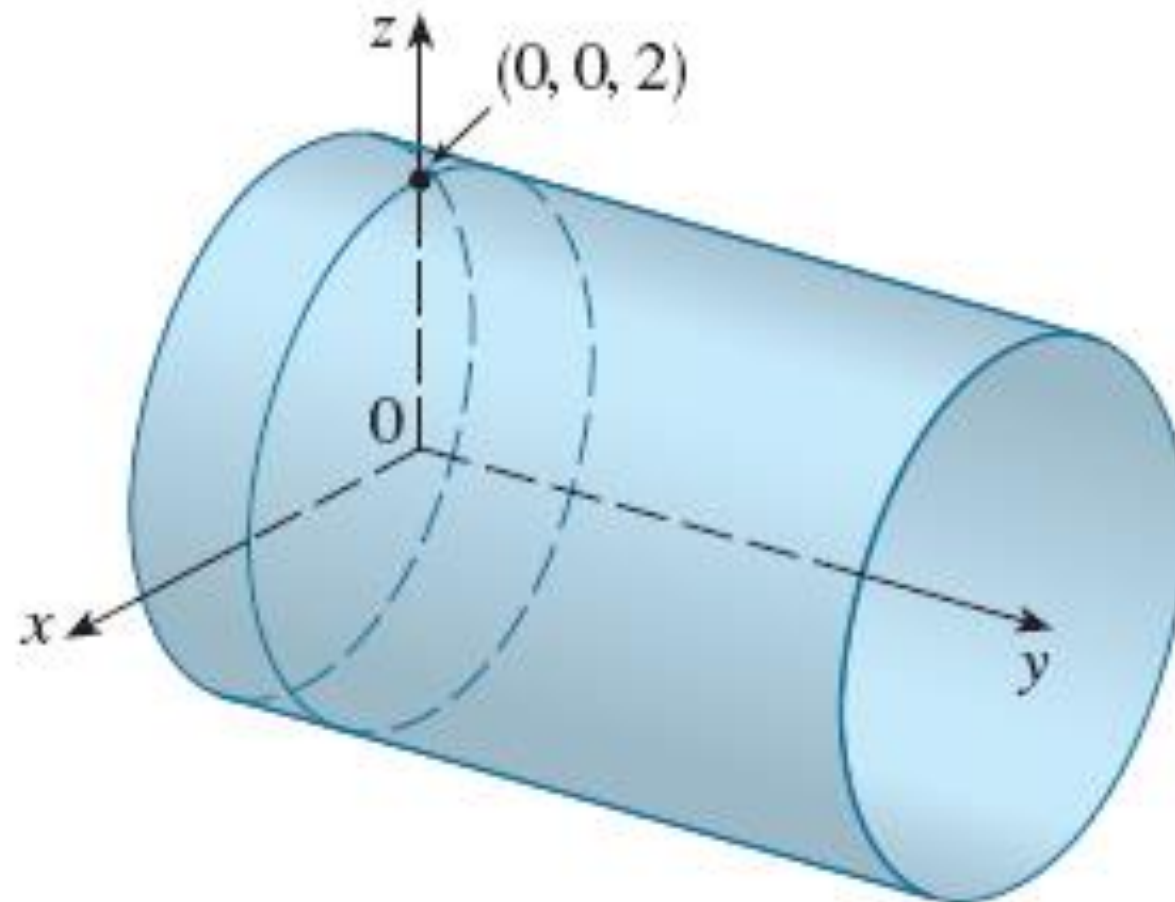
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

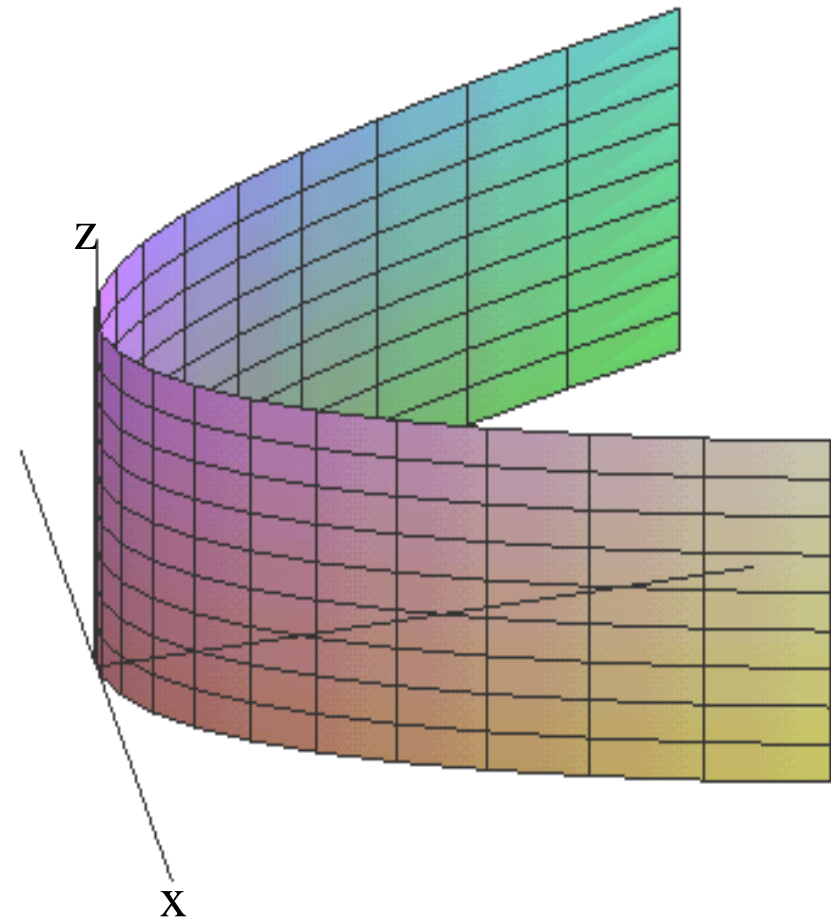
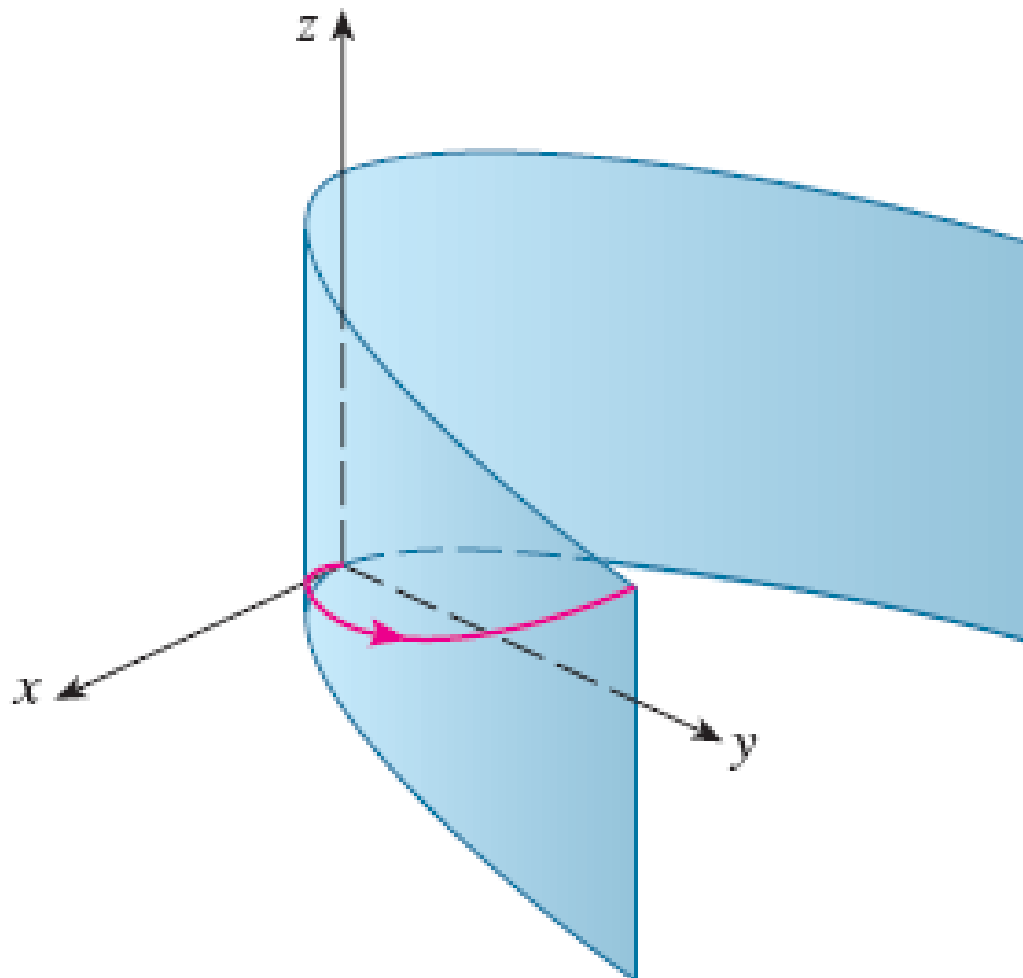
Mặt trụ: $x^2 + z^2 = 4$



2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

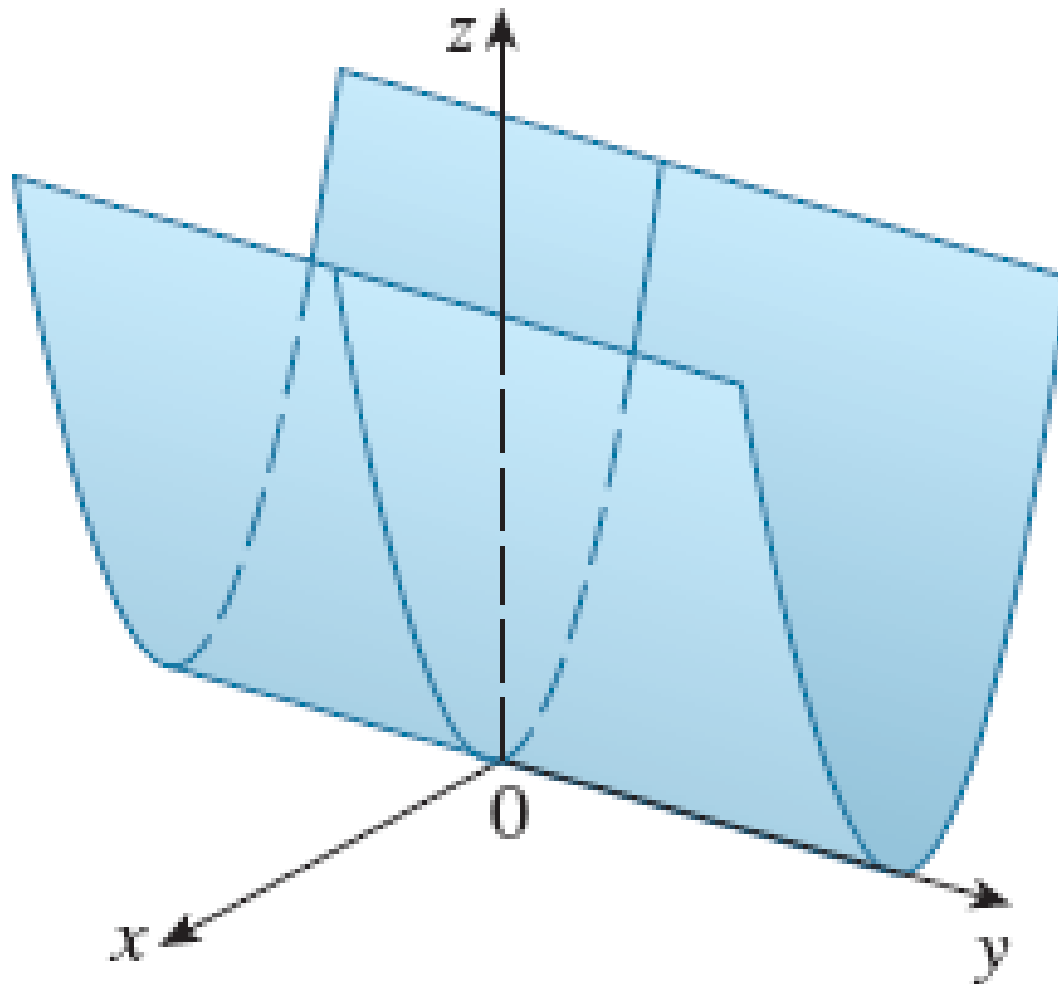
Mặt trụ: $y = x^2$



2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

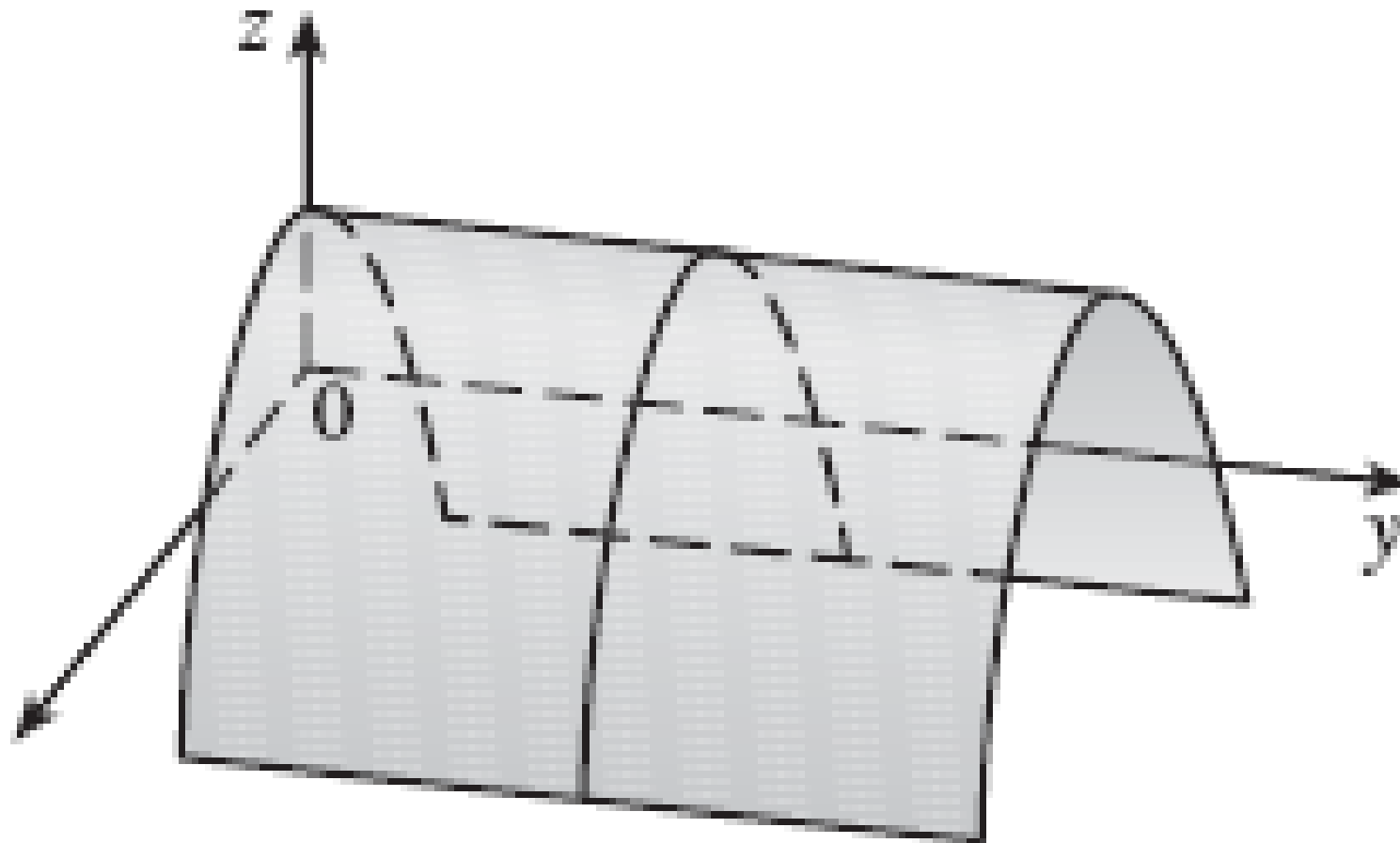
Mặt trụ: $z = x^2$



2. Mặt bậc hai

Nhắc lại

Mặt trụ: $z = 2 - x^2$



3. Giới hạn

Ví dụ

Cho 2 hàm số $f(x, y)$, $g(x, y)$ hãy xét các giá trị của nó khi (x, y) tiến tới $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

3. Giới hạn

Ví dụ

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

TABLE I Values of $f(x, y)$

| $x \backslash y$ | -1.0 | -0.5 | -0.2 | 0 | 0.2 | 0.5 | 1.0 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -1.0 | 0.455 | 0.759 | 0.829 | 0.841 | 0.829 | 0.759 | 0.455 |
| -0.5 | 0.759 | 0.959 | 0.986 | 0.990 | 0.986 | 0.959 | 0.759 |
| -0.2 | 0.829 | 0.986 | 0.999 | 1.000 | 0.999 | 0.986 | 0.829 |
| 0 | 0.841 | 0.990 | 1.000 | | 1.000 | 0.990 | 0.841 |
| 0.2 | 0.829 | 0.986 | 0.999 | 1.000 | 0.999 | 0.986 | 0.829 |
| 0.5 | 0.759 | 0.959 | 0.986 | 0.990 | 0.986 | 0.959 | 0.759 |
| 1.0 | 0.455 | 0.759 | 0.829 | 0.841 | 0.829 | 0.759 | 0.455 |

© 2007 Thomson Higher Education

3. Giới hạn

Ví dụ

$$g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

TABLE 2 Values of $g(x, y)$

| $x \backslash y$ | -1.0 | -0.5 | -0.2 | 0 | 0.2 | 0.5 | 1.0 |
|------------------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| -1.0 | 0.000 | 0.600 | 0.923 | 1.000 | 0.923 | 0.600 | 0.000 |
| -0.5 | -0.600 | 0.000 | 0.724 | 1.000 | 0.724 | 0.000 | -0.600 |
| -0.2 | -0.923 | -0.724 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | -0.724 | -0.923 |
| 0 | -1.000 | -1.000 | -1.000 | | -1.000 | -1.000 | -1.000 |
| 0.2 | -0.923 | -0.724 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | -0.724 | -0.923 |
| 0.5 | -0.600 | 0.000 | 0.724 | 1.000 | 0.724 | 0.000 | -0.600 |
| 1.0 | 0.000 | 0.600 | 0.923 | 1.000 | 0.923 | 0.600 | 0.000 |

© 2007 Thomson Higher Education

3. Giới hạn

Nhận xét

- $f(x, y), g(x, y)$ đều không xác định tại $(0,0)$.
- Khi (x, y) dần đến $(0,0)$: các giá trị của $f(x, y)$ dần tới 1, các giá trị của $g(x, y)$ không tiến tới bất kỳ một giá trị nào.
- Dự đoán:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ không tồn tại.}$$

3. Giới hạn

Định nghĩa giới hạn kép

Cho hàm hai biến $f = f(x, y)$, $M_0(x_0, y_0) \in R^2$ sao cho M_0 là điểm tụ của D_f .

- Ta nói giới hạn của hàm f khi (x, y) dần đến điểm M_0 bằng a , nếu:

$$\forall (x_n, y_n) \in D_f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x_0, y_0) \Rightarrow f(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Ký hiệu của giới hạn (kép): $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = a$

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall (x, y) \in D_f, (x, y) \neq (x_0, y_0), \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$

Khi đó: $|f(x, y) - a| < \varepsilon$.

Ký hiệu khác của giới hạn (kép): $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a$

3. Giới hạn

Tính chất của giới hạn

$$1. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g$$

$$2. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g$$

$$3. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)}, \text{ nếu } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g \neq 0$$

4. Nếu $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ và

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h = M, \text{ thì } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g = M.$$

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn nếu tồn tại hoặc chứng minh không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| x + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|$$

0

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn nếu tồn tại, hoặc chứng tỏ giới hạn không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq 3|y|, \text{ vì } \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

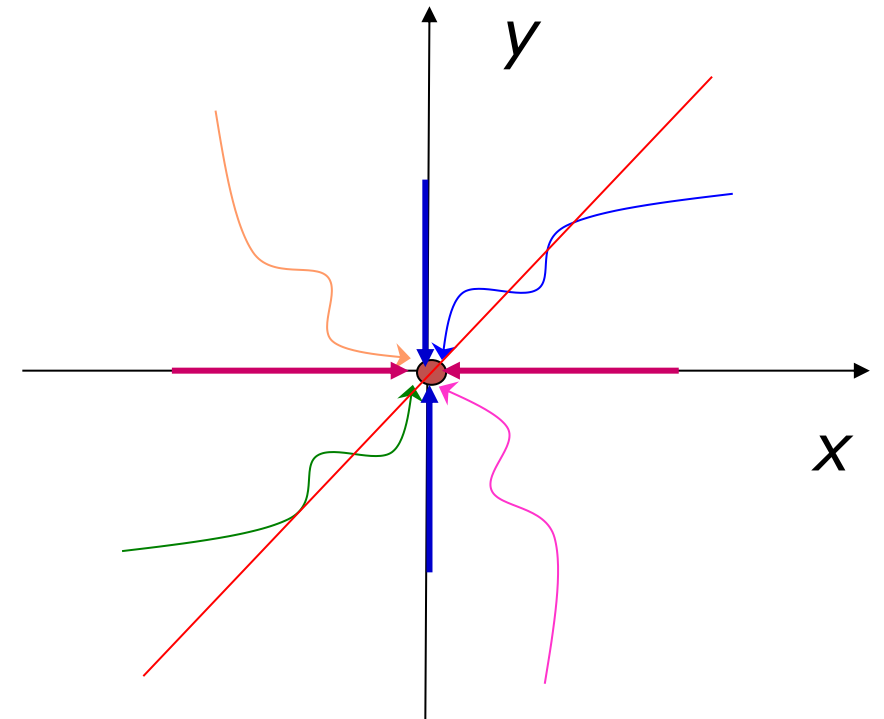
Đọc theo trục Ox :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$$

Đọc theo trục $y = x$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Do đó: không tồn tại giới hạn (kép).



3. Giới hạn

Chú ý

Nếu (x, y) tiến tới (a, b) theo ít nhất 2 cách khác nhau, mà giá trị hàm $f(x, y)$ dần tới các giới hạn khác nhau thì:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

không tồn tại.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$$

Chọn dãy $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$. Khi đó: $f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 1$

Chọn dãy thứ hai $(x'_n, y'_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$

Khi đó $f(x'_n, y'_n) = f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 2$.

Vậy tồn tại hai dãy dần đến $(0,0)$ nhưng giá trị của f tại những điểm đó tiến đến hai số khác nhau, suy ra không tồn tại giới hạn đã cho.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Chọn $y = kx$, khi đó:

$$f(x, y) = f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2}$$

$f(x, y)$ là một đại lượng phụ thuộc vào k , mà k thay đổi nên không tồn tại giới hạn.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$

Chọn dãy $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$. Khi đó: $f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0$.

Chọn dãy thứ hai $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$

Khi đó $f(x'_n, y'_n) = f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Vậy tồn tại hai dãy dần đến $(0,0)$ nhưng giá trị của f tại những điểm đó tiến đến hai số khác nhau, suy ra không tồn tại giới hạn đã cho.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

Chọn dãy $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$. Khi đó: $f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0$.

Chọn dãy thứ hai $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$

Khi đó $f(x'_n, y'_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1$.

Vậy tồn tại hai dãy dần đến $(0, 0)$ nhưng giá trị của f tại những điểm đó tiến đến hai số khác nhau, suy ra không tồn tại giới hạn đã cho.

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1+xy}}$$

Đặt $t = xy$, khi đó $(x, y) \rightarrow (0,0)$ thì $t \rightarrow 0$:

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - \sqrt[3]{1+t}} = -3$$

3. Giới hạn

Ví dụ

Tìm giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại:

$$I = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y + 9} - 3}$$

Đặt $t = x^2 + y$, khi đó $(x, y) \rightarrow (0,0)$ thì $t \rightarrow 0$:

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t + 9} - 3} = 6$$

4. Liên tục

Định nghĩa

Hàm số $f(x, y)$ được gọi là liên tục tại (x_0, y_0) , nếu:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Hàm được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm trên miền D .

Tổng, hiệu, tích của hai hàm liên tục là hàm liên tục.

Thương của hai hàm liên tục là hàm liên tục (nếu hàm ở mẫu khác 0).

Hàm hợp của hai hàm liên tục là hàm liên tục (tại những điểm thích hợp).

4. Liên tục

Định nghĩa

Các hàm sau đây được gọi là **hàm sơ cấp cơ bản**:

1) Hàm mũ; 2) Hàm lũy thừa; 3) Hàm lượng giác; 4) Hàm lượng giác ngược; 5) Hàm logarit; 6) Hàm hằng.

Hàm thu được từ các hàm sơ cấp cơ bản bằng **hữu hạn** các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia, lấy hàm hợp được gọi là **hàm sơ cấp**.

Các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia, lấy hàm hợp các **hàm sơ cấp** là **hàm sơ cấp**.

Định lý

Hàm sơ cấp liên tục trên tập xác định.

4. Liên tục

Ví dụ

Khảo sát tính liên tục của hàm sau R^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} = \frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \qquad \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$0 \leq \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| + |y| \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1 \cdot 0 = 0 = f(0, 0)$$

Suy ra f liên tục tại $(0, 0)$. Vậy hàm đã cho liên tục trên R^2 .

4. Liên tục

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số liên tục tại điểm $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ta có $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ không tồn tại.

Vậy hàm không liên tục tại $(0,0)$. Không tồn tại a .