Nội dung Chương 2

1. **Đạo hàm riêng, vi phân**
2. **Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp**
3. **Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn**
4. **Đạo hàm theo hướng**
5. **Công thức Taylor, Maclaurint**
6. **Cực trị hàm nhiều biến**

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định nghĩa đạo hàm riêng theo biến x

Cho hàm hai biến $f = f(x, y)$ với điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định.

Xét hàm một biến $F(x) = f(x, y_0)$ theo biến x.

Đạo hàm của hàm một biến $F(x)$ tại x_0 được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm $f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Định nghĩa đạo hàm riêng theo biến y

Cho hàm hai biến $f = f(x, y)$ với điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định.

Xét hàm một biến $F(y) = f(x_0, y)$ theo biến y.

Đạo hàm của hàm một biến $F(y)$ tại y_0 được gọi là đạo hàm riêng theo biến y của hàm $f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

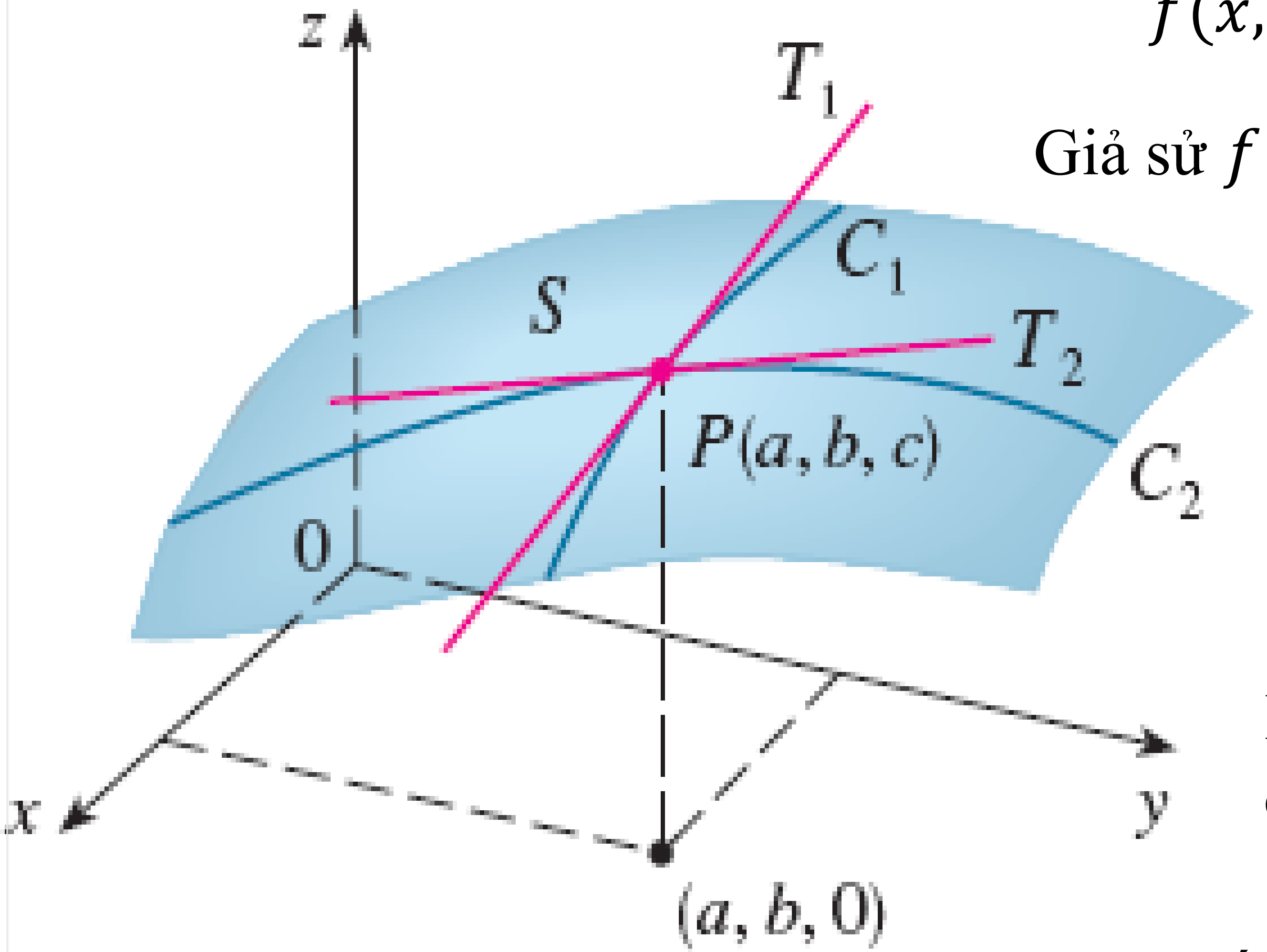
Ghi nhớ

Đạo hàm riêng của $f = f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$ theo x là đạo hàm của hàm một biến $f = f(x, y_0)$.

Đạo hàm riêng của $f = f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$ theo y là đạo hàm của hàm một biến $f = f(x_0, y)$.

Qui tắc tìm đạo hàm riêng

Để tìm đạo hàm riêng của f theo biến x, ta coi f là hàm một biến x, biến còn lại y là hằng số.



$f(x, y)$ biểu diễn bởi mặt S (màu xanh).

Giả sử $f(a, b) = c$, nên điểm $P(a, b, c) \in S$.

Cố định $y = b$. Đường cong C_1 là giao của S và mặt phẳng $y = b$.

Phương trình của đường cong C_1 là $g(x) = f(x, b)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đường cong C_1 là:

$$g'(a) = f'_x(a, b)$$

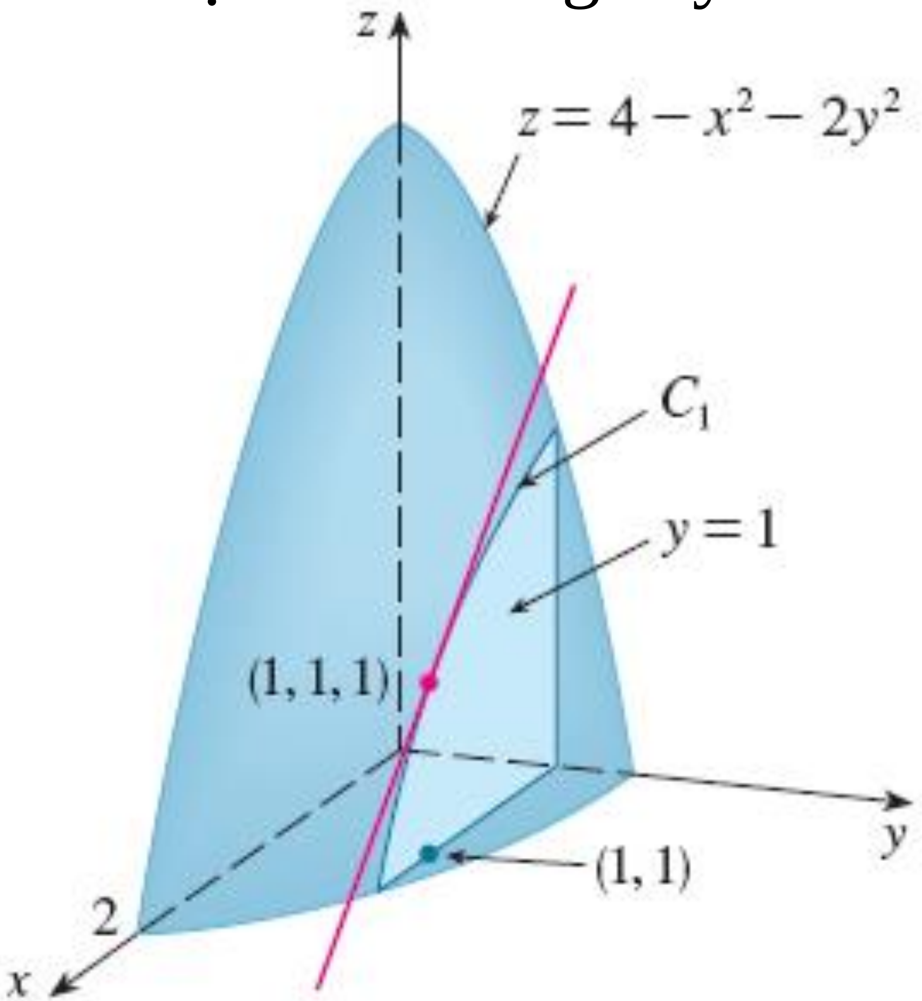
Đạo hàm riêng theo x của $f(x, y)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đường cong C_1 tại $P(a, b, c)$.

Tương tự, đạo hàm riêng theo y của $f(x, y)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_2 với đường cong C_2 tại $P(a, b, c)$.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f'_x(1,1)$ và biểu diễn hình học của đạo hàm riêng này.



$f'_x(x,y) = -2x \rightarrow f'_x(1,1) = -2$

Mặt bậc hai $f(x,y)$.

Mặt phẳng $y = 1$ cắt ngang được đường cong C_1.

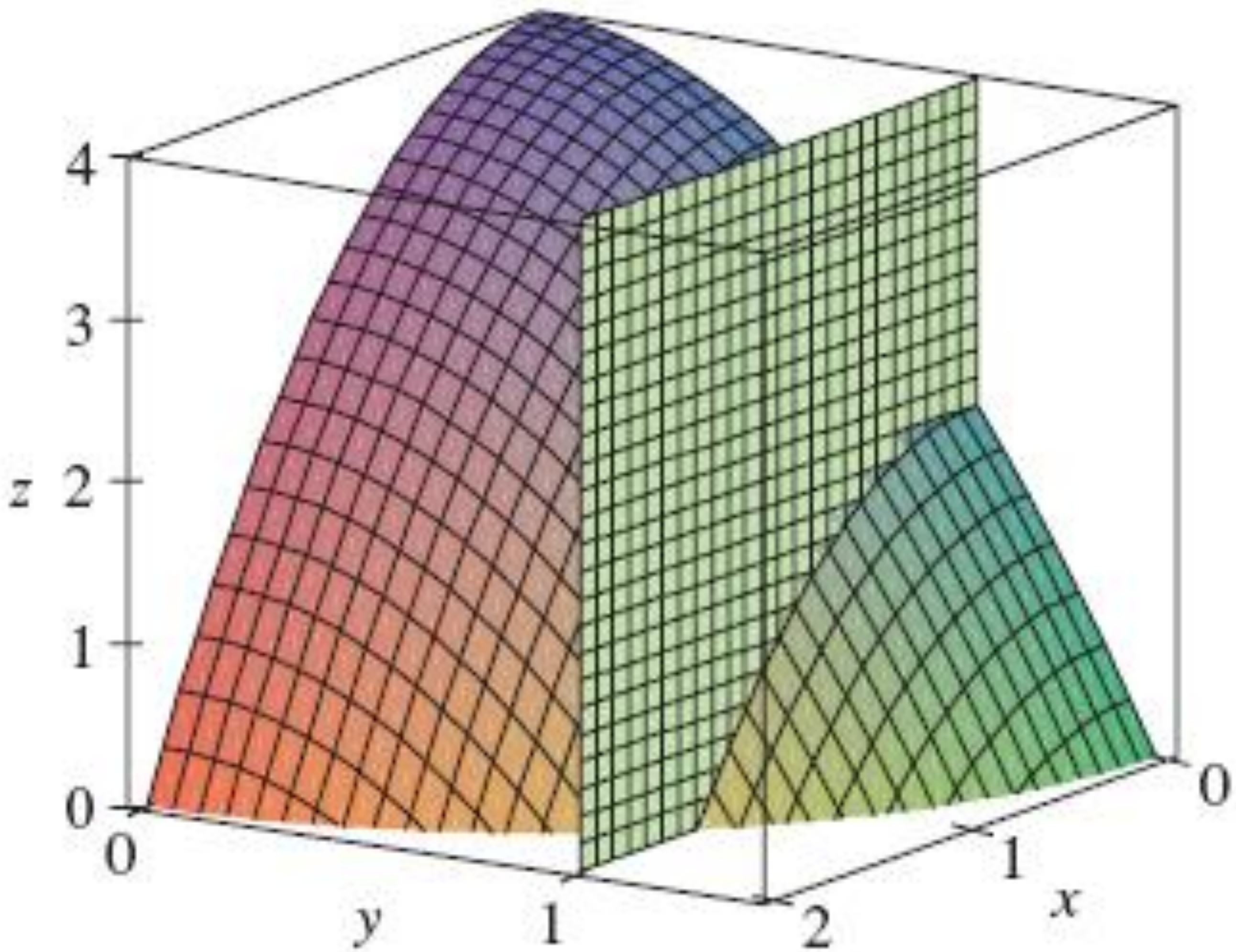
Tiếp tuyến với C_1 tại (1,1,1) là đường thẳng màu hồng.

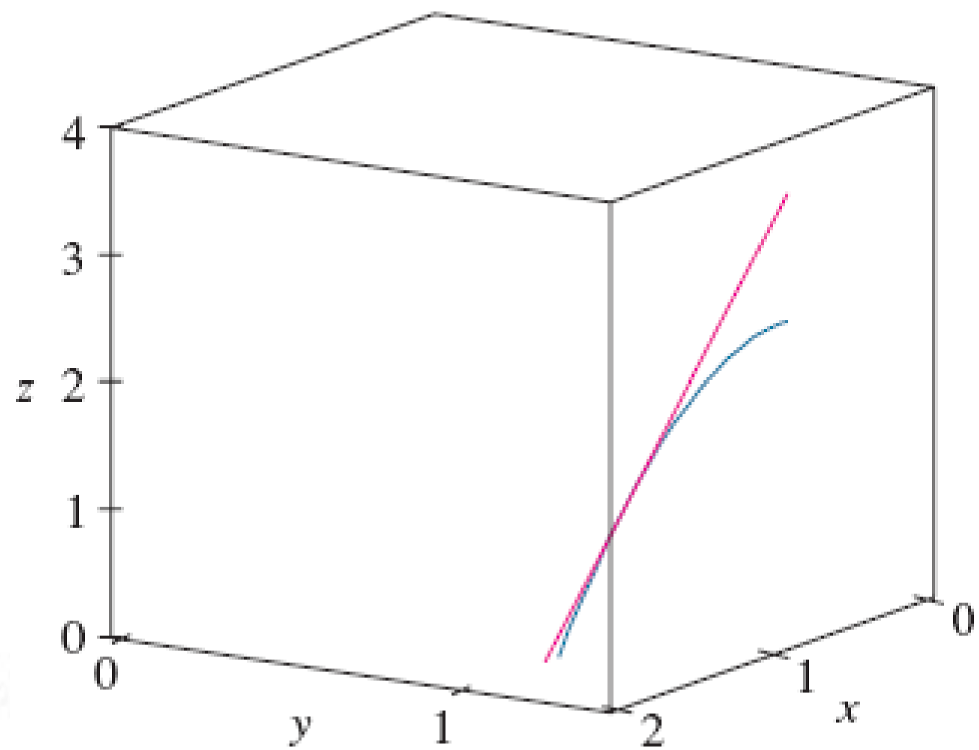
Hệ số góc của tiếp tuyến với C_1 tại (1,1,1) là đạo hàm riêng cần tìm.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Biễu diễn hình học của $f'_x(1,1)$:





1. Đạo hàm riêng, vi phân

Tính chất của đạo hàm riêng

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên tính chất của đạo hàm riêng cũng có tính chất của đạo hàm của hàm một biến.

1) $(\alpha f)'_x = \alpha f'_x$

2) $(f+g)'_x = f'_x + g'_x$

3) $(f \cdot g)'_x = f'_x \cdot g + f \cdot g'_x$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_x = \dfrac{g f'_x - f g'_x}{g^2}$

Hàm một biến: hàm có đạo hàm cấp 1 tại x_0 thì hàm liên tục tại x_0.

Hàm nhiều biến: tồn tại hàm có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (x_0,y_0) nhưng chưa chắc hàm đã liên tục tại điểm này.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2), f'_y(1,2)$, biết $f(x,y) = \ln(x^2 + 2y^2)$

$$f'_x(x,y) = \left(\ln(x^2 + 2y^2)\right)'_x$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2 + 2y^2} \qquad \Rightarrow f'_x(1,2) = \frac{2}{9}$$

$$f'_y(x,y) = \left(\ln(x^2 + 2y^2)\right)'_y$$

$$f'_y(x,y) = \frac{4y}{x^2 + 2y^2} \qquad \Rightarrow f'_y(1,2) = \frac{8}{9}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2), f'_y(1,2)$, biết $f(x,y) = (x+2y)^y$

$$f'_x(x,y) = \left((x+2y)^y\right)'_x$$

$$f'_x(x,y) = y(x+2y)^{y-1} \quad \Rightarrow f'_x(1,2) = 10$$

$$\ln f = y\ln(x+2y)$$

Đạo hàm riêng hai vế theo y, ta có: $\dfrac{f'_y}{f} = \ln(x+2y) + y\cdot\dfrac{2}{x+2y}$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = (x+2y)^y\left[\ln(x+2y) + y\cdot\frac{2}{x+2y}\right]$$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = 25(\ln 5 + \frac{4}{5})$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$

1) Tìm $f'_x(1,1)$ 2) Tìm $f'_x(0,0)$ 3) Tìm $f'_y(0,0)$

1) $f'_x(x,y) = \left(\sqrt{x^2 + y^3}\right)'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} \Rightarrow f'_x(1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) Không thể thay (0,0) vào công thức để tìm $f'_x(0,0)$. Ta sử dụng định nghĩa:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Không tồn tại giới hạn này vì giới hạn trái và giới hạn phải không bằng nhau.

3) Tương tự: $f'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\sqrt{(\Delta y)^3} - 0}{\Delta y}$ khong $\exists$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y) = \int\limits_1^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2}\, dt$

Tìm $f'_x(x,y), f'_y(x,y).$

$$f'_x(x,y) = \left(\int\limits_1^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2}\, dt \right)'_x = e^{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Vì biểu thức đối xứng đối với x và y nên, đổi chỗ x và y cho nhau ta được đạo hàm riêng theo y.

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Tìm $f'_x(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1/(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{\Delta x}$, suy ra $t \to \infty$

$$\Rightarrow f'_x(0,0) = \lim_{t \to \infty} t e^{-t^2} = 0$$ (sử dụng qui tắc Lopital)

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Đạo hàm riêng cấp cao

Cho hàm hai biến $f = f(x, y)$. Đạo hàm riêng theo x và theo y là những hàm hai biến x và y. Ta có thể lấy đạo hàm riêng của hàm $f_x'(x, y)$:

$$\left(f_x'(x,y)\right)'_x = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \qquad \left(f_x'(x,y)\right)'_y = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Tương tự, có thể lấy đạo hàm riêng của hàm $f_y'(x, y)$:

$$\left(f_y'(x,y)\right)'_x = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \qquad \left(f_y'(x,y)\right)'_y = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Tiếp tục quá trình, ta có khái niệm các đạo hàm cấp cao.

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên việc tính đạo hàm riêng cấp cao cũng tương tự tính đạo hàm cấp cao của hàm một biến: dùng công thức Leibnitz và các đạo hàm cấp cao thông dụng.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Chú ý

Nói chung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

nên khi lấy đạo hàm riêng cấp cao ta phải chú ý đến thứ tự lấy đạo hàm.

Định lý

Cho hàm *f*(*x*,*y*) và các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0) và liên tục tại điểm này. Khi đó:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Chứng tỏ rằng hàm $f(x,y) = e^x \sin y$ thỏa phương trình Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$f'_x(x,y) = e^x \sin y \qquad f''_{xx} = e^x \sin y$$

$$f'_y(x,y) = e^x \cos y \qquad f''_{yy} = -e^x \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0.$$

Hàm $f = f(x,y)$ thỏa phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa.

Hàm điều hòa đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết fluid flow, heat conduction, electric potential,….

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Chứng tỏ rằng hàm $u(x, t) = \sin(x - at)$ thỏa phương trình sóng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u'_t(x,t) = -a\cos(x - at) \qquad u''_{tt} = -a^2 \sin(x - at)$$

$$u'_x(x,t) = \cos(x - at) \qquad u''_{xx} = -\sin(x - at)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin(x - at)$$

Phương trình sóng mô tả sự chuyển động của các loại sóng: sóng biển, sóng âm thanh hay sóng chuyển động dọc theo một sợi dây rung.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Chứng tỏ rằng $u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)$ thỏa phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u'_x(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)} \cdot \left(\frac{-2x}{4a^2t)}\right) \quad \Rightarrow u''_{xx}(x,t) = \frac{x^2 - 2a^2t}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}\right)'_t = \frac{x^2 - 2a^2t}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

Tìm $f''_{xx}(0,0)$.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$\Rightarrow h(x,y)=f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng cấp hai:

$$f''_{xx}(0,0) = h'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(0+\Delta x,0) - h(0,0)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f''_{xx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

Tương tự tìm được $f''_{yy}(0,0) = 0$ và $\nexists f''_{xy}(0,0);\ \nexists f''_{yx}(0,0)$

Chú ý: Để tìm đạo hàm riêng cấp hai tại (x_0, y_0) ta phải tìm đạo hàm riêng cấp một $f'_x(x, y)$ tại mọi điểm (tức là tìm hàm $f'_x(x, y)$).

Hàm này có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (0,0) nhưng không liên tục tại đây.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho hàm $u(x,y)=(2x+3y)\ln(x+2y)$. Tìm $\dfrac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(1,2)$.

Sử dụng công thức Leibnitz, coi $f(x,y)$ là hàm một biến theo x.

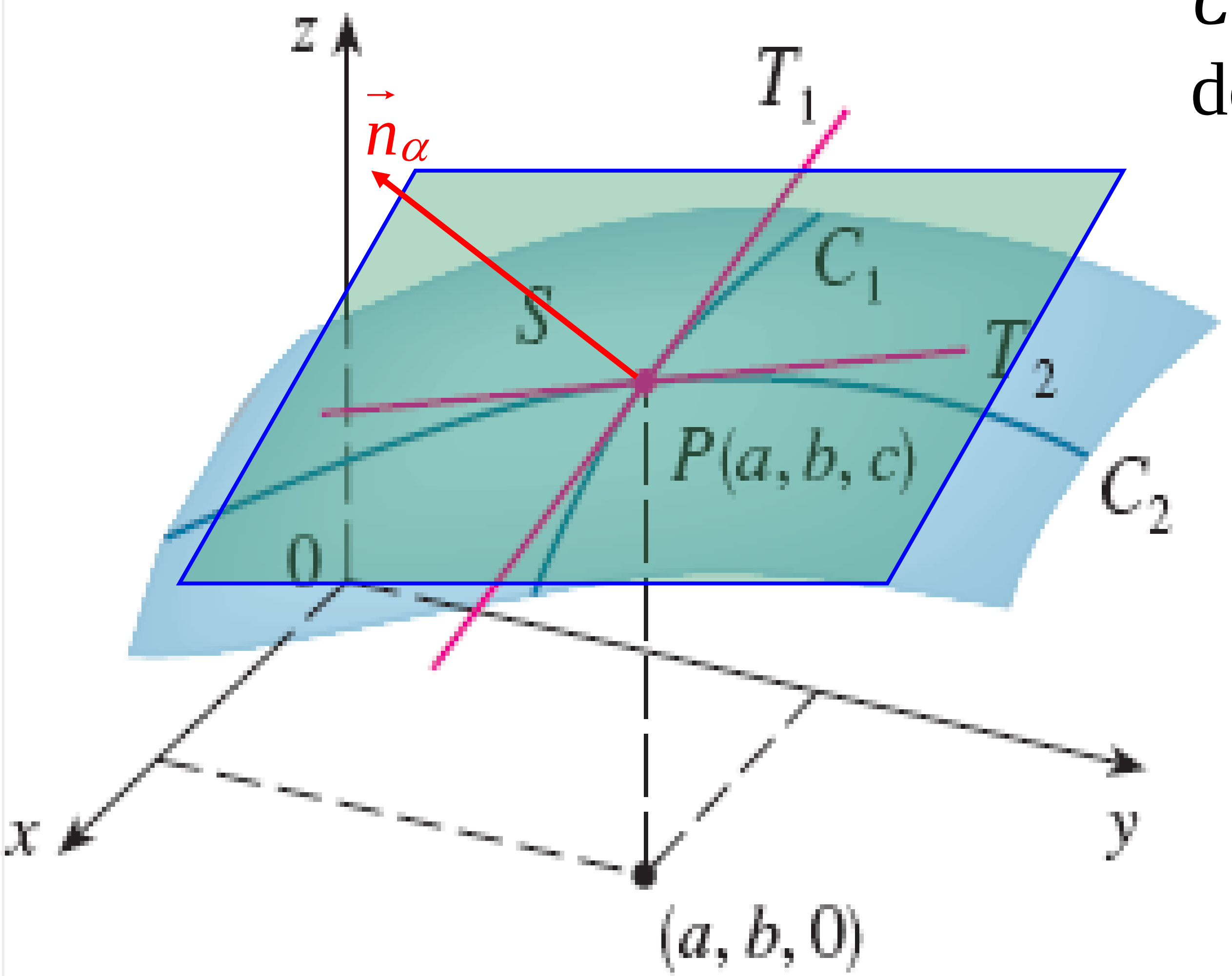
Đặt $u = f\cdot g; f(x,y)=2x+3y; g(x,y)=\ln(x+2y)$

$$\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(x,y)=C_{100}^{0} f_x^{(0)} g_x^{(100)} + C_{100}^{1} f'_x g_x^{(99)} + C_{100}^{2} f''_{xx} g_x^{(98)} + \dots$$

$$f'_x = 2;\ f''_{xx}=0;\quad g_x^{(n)} = \left(\ln(x+2y)\right)_x^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+2y)^n}$$

$$\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(x,y)=C_{100}^{0}(2x+3y)\cdot\frac{(-1)^{99}\cdot 99!}{(x+2y)^{100}} + C_{100}^{1} 2\cdot\frac{(-1)^{98}\cdot 98!}{(x+2y)^{99}} + 0$$

Cho f có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục.



C_1 và C_2 là hai đường cong tạo nên do hai mặt $y = b$ và $x = a$ cắt S.

Điểm P nằm trên cả hai đường này. Giả sử T_1 và T_2 là hai tiếp tuyến với hai đường cong C_1 và C_2 tại P.

Mặt phẳng (α) chứa T_1 và T_2 gọi là mặt phẳng tiếp diện với mặt S tại P. Tiếp tuyến với mọi đường cong nằm trong S, qua P đều nằm trong (α).

$$\vec{u}_{T_1} = \left(1, 0, f'_x(a,b)\right), \vec{u}_{T_2} = \left(0, 1, f'_y(a,b)\right)$$

Phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt S tại $P(a,b,c)$:

$$z - c = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện với paraboloid elliptic:
$z = 2x^2 + y^2$ tại điểm (1,1,3).

$$f'_x = 4x \Rightarrow f'_x(1,1) = 4.$$

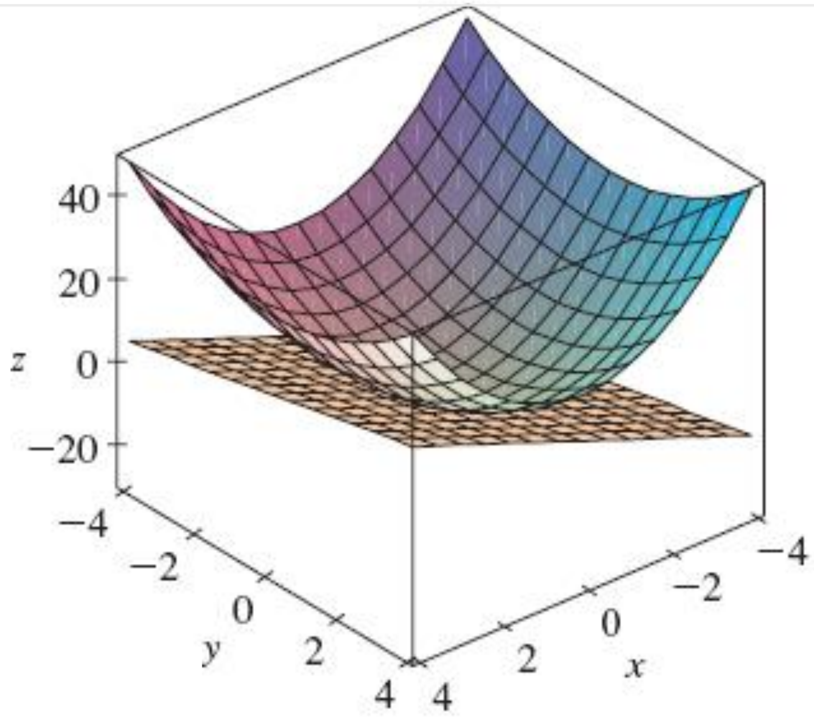
$$f'_y = 2y \Rightarrow f'_y(1,1) = 2.$$

Phương trình mặt phẳng tiếp diện:

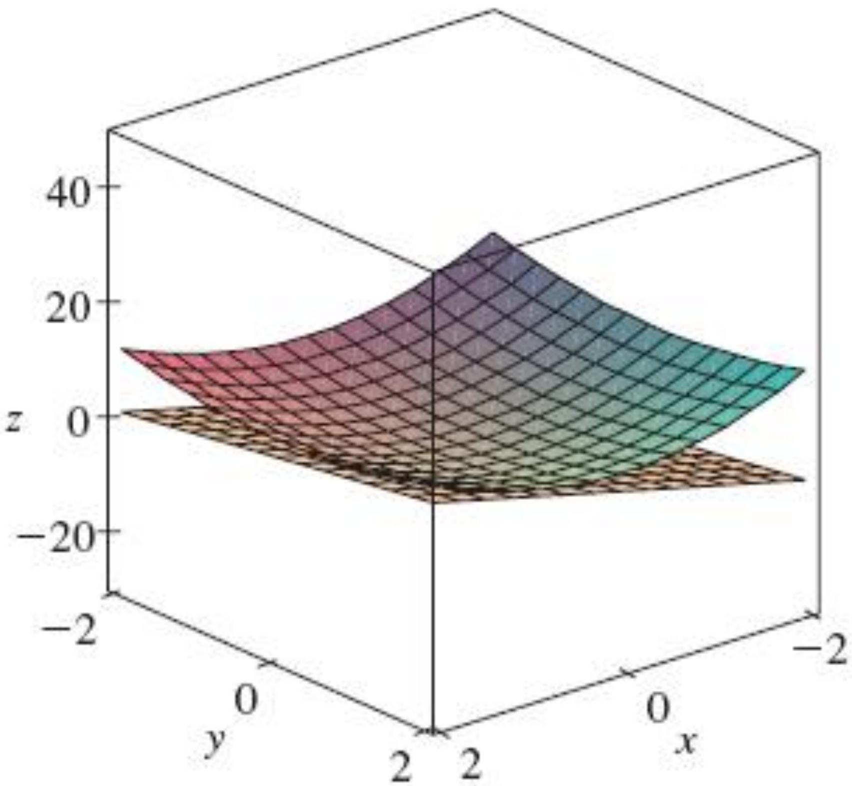
$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

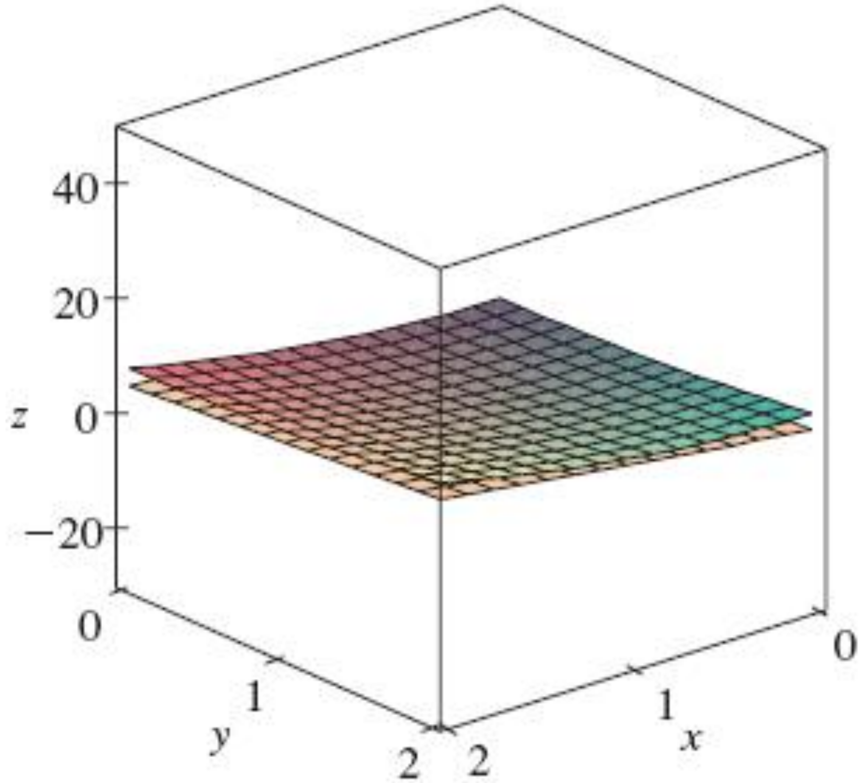
$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$z = 4x + 2y - 3 = L(x, y)$$



Nếu tại điểm tiếp xúc ta phóng to lên thì mặt paraboloid gần trùng với mặt phẳng tiếp diện.





Hàm tuyến tính L(x,y) = 4x +2y – 3 là hàm xấp xỉ tốt cho $f = 2x^2 + y^2$ khi mà (x,y) gần với điểm (1,1).

$$f(x,y) \approx 4x + 2y - 3$$

$$(1.1, 0.95) \quad \Rightarrow f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$$

Gần bằng với giá trị thực: $f(1.1, 0.5) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$

Nếu ta chọn điểm xa điểm (1,1) thì kết quả không còn đúng nữa.

$$(2,3) \qquad \Rightarrow f(2,3) \approx 4(2) + 2(3) - 3 = 11$$

Khác xa với giá trị thực: $f(2,3) = 2(2)^2 + (3)^2 = 17$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định nghĩa

Cho hàm $f = f(x, y)$ và (x_0, y_0) là điểm trong của miền xác định.
Hàm f được gọi là khả vi tại (x_0, y_0) nếu số gia toàn phần:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

có thể biểu diễn được ở dạng: $\Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$

trong đó A, B là các hằng số;

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = o(\rho), \rho \to 0 \;;\; \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Đại lượng $df(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y$ gọi là vi phân của hàm $f = f(x, y)$ tại (x_0, y_0).

Định lý

Định lý (điều kiện cần khả vi)

Nếu hàm $f = f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0), thì:

1. f liên tục tại (x_0, y_0)
2. f có các đạo hàm riêng cấp một tại (x_0, y_0) và
$$A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$$

Định lý (điều kiện đủ)

Nếu hàm $f(x,y)$ xác định trong một lân cận của (x_0,y_0) và có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại (x_0,y_0), thì hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0).

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định lý

Định lý (điều kiện cần và đủ)

Hàm $f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0) khi và chỉ khi $\Delta f(x_0, y_0)$ biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f'_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = o(\rho), \rho \to 0\,; \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ghi nhớ

Vi phân cấp 1 của $f(x,y)$ tại (x_0, y_0):

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

Tính chất của vi phân

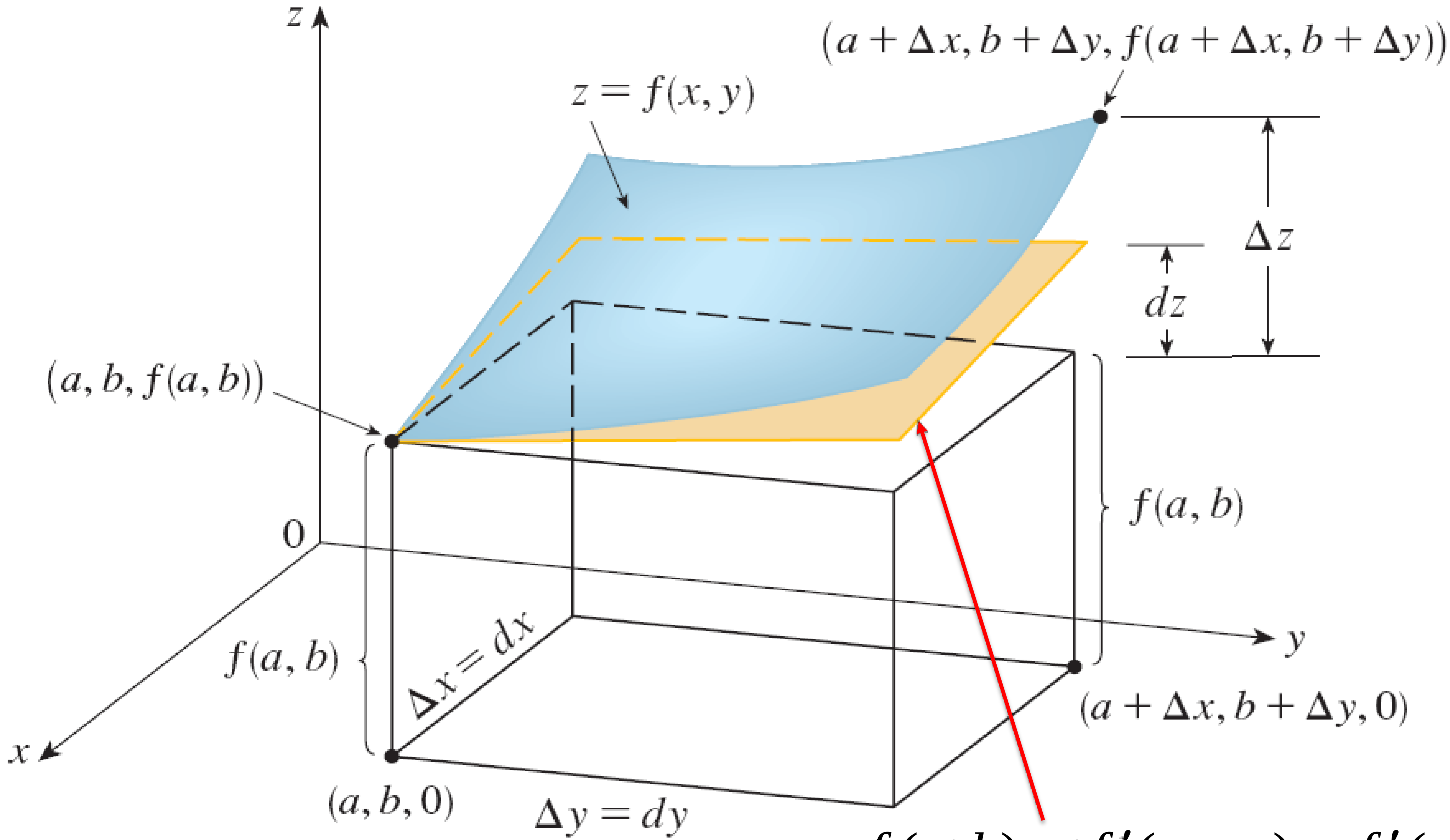
Cho $f(x,y)$ và $g(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0). Khi đó:

1) $d(\alpha f) = \alpha df$

2) $d(f+g) = df + dg$

3) $d(fg) = gdf + fdg$

4) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$



$$z - f(a,b) = f'_x(x-a) + f'_y(y-b)$$

Mặt tiếp diện

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ghi nhớ

Dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

Cho hàm $f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0). Khi đó ta có:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)$$

$$\boxed{f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y \quad (1)}$$

Công thức (1) dùng để tính gần đúng giá trị của f tại (x,y).

Công thức (1) có thể viết lại: $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$

hay ta có: $\Delta f \approx df$.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ghi nhớ

Qui tắc dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

Để tính gần đúng giá trị của hàm f tại điểm cho trước (x, y). Ta thực hiện:

1. Xác định hàm f, chọn một điểm (x_0, y_0) gần với điểm (x,y) sao cho $\Delta x, \Delta y$ nhỏ.
2. Tính giá trị: $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$.
3. Sử dụng công thức:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (1)$$

Chú ý: Nếu điểm (x_0, y_0) xa với điểm (x, y) thì giá trị tính được không phù hợp.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Chứng tỏ $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0). Sử dụng kết quả này để tính gần đúng giá trị $f(1.1, -0.1)$

$$f'_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy};\ f'_y(x,y) = x^2e^{xy}$$

Các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên R^2, nên liên tục trong lân cận của (1,0). Theo định lý (đk đủ khả vi): $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0).

Chọn $x_0 = 1; y_0 = 0 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 1.1 - 1.0 = 0.1$

$$\Delta y = y - y_0 = -0.1 - 0 = -0.1$$

$$f(1.1,-0.1) \approx f(1,0) + f'_x(1,0)\Delta x + f'_y(1,0)\Delta y = 1 + 1(0.1) + 1(-0.1) = 1$$

So sánh với giá trị thực: $f(1.1,-0.1) = (1.1)e^{-0.11} \approx 0.98542$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Cho $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

1) Tìm $df(x,y)$

2) Khi x thay đổi từ 2 đến 2.05, y thay đổi từ 3 đến 2.96, so sánh df và Δf.

1) $df(x,y) = f'_x dx + f'_y dy \Leftrightarrow df(x,y) = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy$

2) Cho $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ $\Rightarrow \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.04, x = 2.05, y = 2.96.$

$df(2,3) = (2.2+3.3)0.05 + (3.2-2.3)(-0.04) = 0.65$

$\Delta f(2,3) = f(2.05, 2.96) - f(2,3)$

$\Delta f(2,3) = \left[2.05)^2 + 3\cdot(2.5)\cdot(2.96) - (2.96)^2\right] - \left[2^2 + 3\cdot 2\cdot 3 - 3^2\right] = 0.6449$

Ta thấy hai giá trị gần giống nhau nhưng d*f* tính dễ hơn.

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Định nghĩa

Vi phân cấp cao

Cho hàm $f = f(x, y)$ khi đó $df(x, y)$ cũng là một hàm hai biến x, y.
Vi phân (nếu có) của vi phân cấp 1 được gọi là vi phân cấp 2.

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)) = d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x dx) + d(f'_y dy)$$

$$= dxd(f'_x) + dyd(f'_y) = dx\left[(f'_x)'_x dx + (f'_x)'_y dy\right] + dy\left[(f'_y)'_x dx + (f'_y)'_y dy\right]$$

$$= f''_{xx} dxdx + f''_{xy} dxdy + f''_{yx} dxdy + f''_{yy} dydy$$

$$\Leftrightarrow d^2 f(x,y) = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2$$

Một cách hình thức, có công thức tính vi phân cấp n. Sử dụng nhị thức Newton:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Công thức vi phân cấp 3 của hàm $f = f(x, y)$:

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right)^3 f + 3\left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} dy \right) f + 3\left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right)\left(\frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f + \left(\frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f$$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

Công thức vi phân cấp 4: $d^4 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^4 f$

$$= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} dx^3 dy + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx^2 dy^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} dx dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} dy^4$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm vi phân cấp hai $d^2 f(1,1)$, biết $f(x,y) = e^{xy}$

$$f'_x = ye^{xy} \Rightarrow f''_{xx} = y^2 e^{xy},\ f''_{xy} = e^{xy}(1+xy)$$

$$f'_y = xe^{xy} \Rightarrow f''_{yy} = x^2 e^{xy}.$$

Vi phân cấp hai:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2$$

$$d^2 f(x,y) = e^{xy}\left(y^2 dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2 dy^2\right)$$

$$d^2 f(1,1) = edx^2 + 4edxdy + edy^2$$

1. Đạo hàm riêng, vi phân

Ví dụ

Tìm vi phân cấp hai $d^2 f(1,1)$, biết $f(x,y) = {}^{y}/_{x}$

$$f'_x = \frac{-y}{x^2} \Rightarrow f''_{xx} = \frac{2y}{x^3},\ f''_{xy} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'_y = \frac{1}{x} \Rightarrow f''_{yy} = 0.$$

Vi phân cấp hai:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2$$

$$d^2 f(x,y) = \frac{2y}{x^3} dx^2 - \frac{2}{x^2} dxdy + 0dy^2$$

$$d^2 f(1,1) = 2dx^2 - 2dxdy$$

Ví dụ

Dùng vi phân cấp 1, tính gần đúng:

$$A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3}$$

Chọn hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$.

Chọn: $x_0 = 1, y_0 = 2.$

$$\Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 1.03 - 1 = 0.03 \quad ; f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} \; ; \; f'_y(x, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}$$

$$\Delta y = y - y_0 = 1.98 - 2 = -0.02$$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f(1.03, 1.98) \approx f(1,2) + f'_x(1,2).(0.03) + f'_y(1,2)(-0.02)$$

$$A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3} = f(1.03, 1.98) \approx 3 + \frac{1}{3}(0.03) + \frac{3.4}{2.3}(-0.02) = 2.97$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Cách tính

Hàm một biến

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Hàm hai biến: Trường hợp 1

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x, y) \end{cases} \Rightarrow f'_x = f'(u) \cdot u'_x \,;\, f'_y = f'(u) \cdot u'_y$$

Trường hợp 2

$$\begin{cases} f = f(u, v) \\ u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = f'_u \cdot u'(x) + f'_v \cdot v'(x)$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm các đạo hàm riêng của hàm hợp $f = f(u) = e^{u^2}, u = \sin(xy)$

$$f = f(x,y) = e^{\sin^2(xy)}$$

$$f'_x = f'(u)\cdot u'_x = 2ue^{u^2}\cdot y\cos(xy) \;\; = 2\sin(xy)e^{\sin^2(xy)}\cdot y\cos(xy)$$

$$f'_y = f'(u)\cdot u'_y = 2ue^{u^2}\cdot x\cos(xy) \;\; = 2\sin(xy)e^{\sin^2(xy)}\cdot x\cos(xy)$$

Tìm f'_x , biết $f = f(u,v) = u^3 v + \ln(uv), u = e^x, v = \sin^2 x$

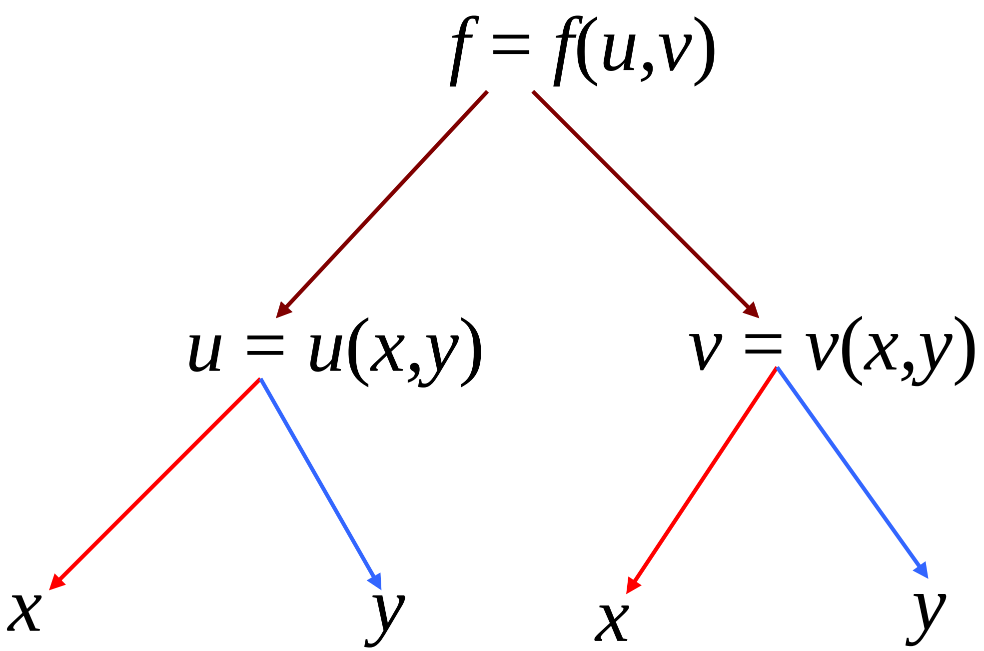
$$\frac{df}{dx} = f'(x) = f'_u\cdot u'(x) + f'_v\cdot v'(x) \;\; = \left(3u^2 v + \frac{1}{u}\right)e^x + \left(u^3 + \frac{1}{v}\right)\sin(2x)$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Cách tính

Trường hợp 3 (Quy tắc dây chuyền)

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} f'_x &= f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \\ f'_y &= f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \end{aligned}$$



f'_x

f'_y

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f'_x, f'_y của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = x^2 + y^2, v(x,y) = xy$

$$f = f(x,y) = e^{(x^2+y^2)xy}$$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = ve^{uv} \cdot 2x + ue^{uv} \cdot y$$

$$f'_x = xye^{(x^2+y^2)xy} \cdot 2x + (x^2 + y^2)e^{(x^2+y^2)xy} \cdot y$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = ve^{uv} \cdot 2y + ue^{uv} \cdot x$$

$$f'_y = xye^{(x^2+y^2)xy} \cdot 2y + (x^2 + y^2)e^{(x^2+y^2)xy} \cdot x$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Cách tính

Trường hợp 4

$$\begin{cases} f = f(x,y) \\ y = y(x) \end{cases}$$

$f = f(x,y)$ là một hàm hai biến theo x và y. Khi đó ta có khái niệm đạo hàm riêng theo x:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Thay $y = y(x)$ vào ta được hàm một biến theo x:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Trong trường hợp này vừa tồn tại đạo hàm df/dx của f theo x như là đạo hàm của hàm một biến x, vừa tồn tại đạo hàm riêng $\partial f/\partial x$ của f theo x.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{df}{dx}$ của hàm $f = f(x,y) = e^{xy} + x^2 y, y = y(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(e^{xy} + x^2 y\right)'_x = ye^{xy} + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(e^{xy} + x^2 y\right)'_y = xe^{xy} + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = ye^{xy} + 2xy + (xe^{xy} + x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Đạo hàm cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \qquad f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x = \left(f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x\right)'_x$$

f'_u là hàm hợp hai biến u, v

$$= \left(f'_u \cdot u'_x\right)'_x + \left(f'_v \cdot v'_x\right)'_x = \left(f'_u\right)'_x \cdot u'_x + f'_u \left(u'_x\right)'_x + \left(f'_v\right)'_x \cdot v'_x + f'_v \left(v'_x\right)'_x$$

$$= \left[\left(f'_u\right)'_u \cdot u'_x + \left(f'_u\right)'_v \cdot v'_x\right] \cdot u'_x + f'_u \cdot u''_{xx} + \left[\left(f'_v\right)'_u \cdot u'_x + \left(f'_v\right)'_v \cdot v'_x\right] \cdot v'_x + f'_v \cdot v''_{xx}$$

$$= f''_{uu} \cdot \left(u'_x\right)^2 + f''_{uv} \cdot v'_x \cdot u'_x + f'_u \cdot u''_{xx} + f''_{vu} \cdot v'_x \cdot u'_x + f''_{vv} \cdot \left(v'_x\right)^2 + f'_v \cdot v''_{xx}$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u,v) = u^2 + 2v, u(x,y) = xy^2, v(x,y) = x + 3y$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 2u.y^2 + 2.1 \Rightarrow f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = \left(2u.y^2 + 2\right)'_y$$

$$f''_{xy} = \left(2u.y^2\right)'_y = 2u'_y.y^2 + 2u.2y$$

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = xy + y^2, v(x,y) = 2x + y$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = ve^{uv}.y + ue^{uv}.2 \Rightarrow f''_{xy} = \left(ve^{uv}.y + ue^{uv}.2\right)'_y$$

$$= e^{uv}.y + v\left(e^{uv}\right)'_y.y + ve^{uv} + 2(x+2y)e^{uv} + 2u\left(e^{uv}\right)'_y$$

$$\left(e^{uv}\right)'_y = \left(e^{uv}\right)'_u.u'_y + \left(e^{uv}\right)'_v.v'_y = ve^{uv}.(x+2y) + ue^{uv}.1$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Đạo hàm cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x,y) \end{cases} \qquad f'_x = f'(u)\cdot u'_x$$

$f'(u)$ là hàm hợp một biến u.

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (f'(u)\cdot u'_x)'_x = (f'(u))'_x \cdot u'_x + f'(u)\cdot(u'_x)'_x$$

$$= \left[(f'(u))'(u)\cdot u'_x\right]\cdot u'_x + f'(u)\cdot u''_{xx} = f''(u)\cdot(u'_x)^2 + f'(u)\cdot u''_{xx}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (f'(u)\cdot u'_x)'_y = (f'(u))'_y \cdot u'_x + f'(u)\cdot(u'_x)'_y$$

$$= \left[(f'(u))'(u)\cdot u'_y\right]\cdot u'_x + f'(u)\cdot u''_{xy} = f''(u)\cdot u'_x\cdot u'_y + f'(u)\cdot u''_{xy}$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u) = \ln u;\ u(x,y) = xy^2 + e^y$

$$f'_x = f'(u)\cdot u'_x = \frac{1}{u}.y^2 \Rightarrow f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = \left(\frac{1}{u}.y^2\right)'_y$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{1}{u}\right)'_y.y^2 + \frac{1}{u}.2y = -\frac{1}{u^2}(2xy + e^y).y^2 + \frac{1}{u}.2y$$

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(x^2 + e^y)$

Đặt $u(x,y) = x^2 + e^y \Rightarrow f'_x = f'(u)\cdot u'_x = f'(u).2x$

$$f''_{xy} = \left(f'(u).2x\right)'_y = 2x.f''(u).e^y$$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp một của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

u, v là hai biến hàm, x và y là hai biến độc lập.

Khi thay $u(x,y), v(x,y)$ vào ta được hàm f theo hai biến x, y độc lập.

$$df = f'_x dx + f'_y \cdot dy = \left(f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \right) dx + \left(f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \right) dy$$

$$= f'_u \left(u'_x dx + u'_y dy \right) + f'_v \left(v'_x dx + v'_y dy \right) = f'_u du + f'_v dv$$

$$df = f'_u du + f'_v dv \quad (1)$$

$$df = f'_x dx + f'_y dy \quad (2)$$

Tùy theo bài toán mà ta dùng công thức (1) hoặc (2). Thường dùng công thức số (1)

Hai công thức giống nhau. Trong (1) là biến hàm, trong (2) là biến độc lập. Nên ta nói: vi phân cấp một có tính bất biến.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm df của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = xy^2; v(x,y) = 2x + 3y$

$$df = f'_u du + f'_v dv \qquad du = y^2 dx + 2xy dy \qquad dv = 2dx + 3dy$$

$$df = ve^{uv}(y^2 dx + 2xy dy) + ue^{uv}(2dx + 3dy) = e^{uv}(vy^2 + 2u)dx + e^{uv}(2vxy + 3u)dy$$

Tìm df của hàm hợp $f = f(u) = \dfrac{1}{u}, u(x,y) = \ln(x + 2y)$

$$df = f'(u)du = -\frac{1}{u^2}\left(u'_x dx + u'_y dy\right) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{x+2y}dx + \frac{2}{x+2y}dy\right)$$

Chú ý: Trong hai ví dụ này ta đều có thể dùng: $df = f'_x dx + f'_y dy$

nhưng việc tính toán phức tạp hơn.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm df của hàm hợp $f = f(x^2 + 2y, e^{xy})$

Đặt $u = x^2 + 2y; v = e^{xy}$

Ta có $f = f(u,v)$; $u(x,y) = x^2 + 2y, v(x,y) = e^{xy}$

$du = 2xdx + 2dy \qquad dv = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

$df = f'_u du + f'_v dv$

$df = f'_u(2xdx + 2dy) + f'_v(ye^{xy}dx + xe^{xy}dy)$

Chú ý: Có thể dùng $df = f'_x dx + f'_y dy$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad d^2 f = d(df) = d(f'_u du + f'_v dv)$$

$$= d\left(f'_u\, du\right) + d\left(f'_v\, dv\right)$$

Chú ý ở đây u, v là biến hàm nên *du*, *dv* không là hằng số.

$$d^2 f = d\left(f'_u\right)\cdot du + f'_u \cdot d(du) + d\left(f'_v\right)\cdot dv + f'_v \cdot d(dv)$$

f'_u, f'_v là những hàm hợp hai biến

$$d\left(f'_u\right) = \left(f'_u\right)'_u du + \left(f'_u\right)'_v dv \qquad d\left(f'_v\right) = \left(f'_v\right)'_u du + \left(f'_v\right)'_v dv$$

$$d\left(du\right) = d^2u, d\left(dv\right) = d^2v$$

Vi phân cấp hai không còn tính bất biến.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x,y) \end{cases} \qquad \begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d\big(f'(u)du\big) \\ &= d\big(f'(u)\big)\cdot du + f'(u)\cdot d(du) \end{aligned}$$

$$d^2 f = \big(f'(u)\big)'(u)\cdot du\cdot du + f'(u)d^2u \;=\; f''(u)\cdot du^2 + f'(u)\cdot d^2u$$

Tóm lại:

Để tìm đạo hàm riêng (vi phân) cấp hai của hàm hợp ta lấy đạo hàm (vi phân) của đạo hàm (vi phân) cấp một và phải biết phân biệt là hàm hợp mấy biến.

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm $d^2 f$ của hàm hợp:

$$f = f(u,v) = 2u + v^2; u(x,y) = xy + 2x; v(x,y) = x^2 + y^2$$

$$df = f'_u du + f'_v dv = 2\left[(y+2)dx + xdy\right] + 2v\left[2xdx + 2ydy\right]$$

$$d^2 f = d(df) = d\left[2\left[(y+2)dx + xdy\right] + 2v\left[2xdx + 2ydy\right]\right]$$

$$d^2 f = d\left[2\left((y+2)dx + xdy\right)\right] + d\left[2v\left(2xdx + 2ydy\right)\right]$$

$$d^2 f = 2d\left((y+2)dx\right) + 2d\left(xdy\right) + 2\left(2xdx + 2ydy\right)dv + 2vd\left(2xdx + 2ydy\right)$$

$\bullet d((y+2)dx) = dxd(y+2) = dxdy$ $\qquad$ $\bullet d(xdy) = dxdy$

$\bullet d\left(2xdx + 2ydy\right) = d(2xdx) + d(2ydy) = 2dx^2 + 2dy^2$

2. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm $d^2 f$ của hàm hợp $f = f(x^2 + 3y)$

Đặt $u = x^2 + 3y$

Ta có $f = f(u)$; $u(x, y) = x^2 + 3y$

$$df = f'(u)du = f'(u)(2xdx + 3dy)$$

$$d^2 f = d(df) = d(f'(u)(2xdx + 3dy))$$

$$d^2 f = (2xdx + 3dy)\cdot d(f'(u)) + f'(u)\cdot d(2xdx + 3dy)$$

$$\bullet d(f'(u)) = f''(u)du = f''(u)\cdot(2xdx + 3dy)$$

$$\bullet d(2xdx + 3dy) = d(2xdx) + d(3dy) = 2dxdx + 0 = 2dx^2$$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Định nghĩa

Giả sử phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn $y = y(x)$

sao cho $F(x, y(x)) = 0$ với mọi x thuộc miền xác định.

Sử dụng quy tắc dây chuyền ta có:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm $y'(x)$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$xy + x^2 + y^2 = e^{xy}$$

Cách 1. Đạo hàm hai vế phương trình, chú ý y là hàm theo x.

$$y + x \cdot y' + 2x + 2y \cdot y' = e^{xy}(y + x \cdot y') \quad \Rightarrow y'(x) = \frac{ye^{xy} - 2x - y}{x + 2y - xe^{xy}}$$

Cách 2. Sử dụng công thức. Chú ý ở đây sử dụng đạo hàm riêng!

$$F(x, y) = xy + x^2 + y^2 - e^{xy} \equiv 0$$

$$F'_x = y + 2x - ye^{xy}; F'_y = x + 2y - xe^{xy}$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y + 2x - ye^{xy}}{x + 2y - xe^{xy}}$$

Chú ý: Cần phân biệt đạo hàm theo x ở hai cách. Cách 1, đạo hàm hai vế coi y là hàm theo x. Cách 2, đạo hàm riêng của F theo x, coi y là hằng.

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Định nghĩa

Giả sử phương trình $F(x, y, z) = 0$ xác định một hàm ẩn $z = z(x, y)$

sao cho $F\left(x, y, z(x, y)\right) = 0$ với mọi (x, y) thuộc miền xác định của z.

Sử dụng quy tắc dây chuyền. Chú ý x, y là hai biến độc lập, z là hàm theo x, y.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{F'_x}{F'_z}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{F'_y}{F'_z}}$$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm z'_x , biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$x + y - z = e^{z-x-y}$$

Cách 1. Đạo hàm hai vế phương trình theo x, chú ý y là hằng, z là hàm theo *x*.

$$1 - z'_x = e^{z-x-y}(z'_x - 1) \Rightarrow z'_x = \frac{1 + e^{z-x-y}}{1 + e^{z-x-y}} = 1.$$

Cách 2. Sử dụng công thức. Chú ý ở đây x là biến, y và z là hằng!

$$F(x, y, z) = x + y - z - e^{z-x-y} \equiv 0$$

$$F'_x = 1 + e^{z-x-y}; F'_z = -1 - e^{z-x-y}$$

$$\Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1 + e^{z-x-y}}{-1 - e^{z-x-y}} = 1.$$

Tương tự tìm đạo hàm riêng của z theo y.

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Định lý (về hàm ẩn)

Cho hàm $F(x,y)$ thỏa các điều kiện sau:

1) Xác định, liên tục trong hình tròn mở $B(M_0, r)$ tâm $M_0(x_0, y_0)$ bán kính r

2) $F((x_0, y_0)) = 0$ 3) $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

4) Tồn tại trong $B(M_0, r)$ các đạo hàm riêng liên tục $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$

Khi đó $F(x,y) = 0$ xác định trong lân cận U của x_0 một hàm $y = y(x)$ thỏa mãn:

$y_0 = y(x_0)$ và $F(x, y(x)) = 0$ trong U. Ngoài ra $y = y(x)$ khả vi, liên tục trong U

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Chú ý

Đạo hàm riêng cấp hai của hàm ẩn: $z = z(x, y)$

1) Tìm đạo hàm riêng cấp 1 (bằng 1 trong hai cách)

2) $z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(-\dfrac{F'_x}{F'_z}\right)'_y$. Chú ý: x là hằng, y là biến, z là hàm theo y.

Vi phân cấp 1 của hàm ẩn $z = z(x, y)$: $dz = z'_x dx + z'_y dy$

Vi phân cấp 2 của hàm ẩn $z = z(x, y)$

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2$$

Chú ý. Vì $z = z(x, y)$ là hàm hai biến độc lập x và y. Nên vi phân cấp một, cấp hai hoặc cấp cao của hàm ẩn cũng giống như vi phân cấp 1 và cấp hai của hàm $f = f(x, y)$ trong phần 1.

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm $dz(1,1)$, biết $z = z(x,y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0, \quad z(1,1) = -2.$$

$$F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 \equiv 0$$

$$F'_x = 3x^2 - 3yz \qquad F'_y = 6y^2 - 3xz + 2 \qquad F'_z = 3z^2 - 3xy$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy} \quad \Rightarrow z'_x(1,1) = \frac{1.(-2) - 1.1}{4 - 1} = -1$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6y^2 - 3xz + 2}{3z^2 - 3xy} \qquad \Rightarrow z'_y(1,1) = -\frac{14}{9}$$

Vi phân cấp 1: $dz = z'_x dx + z'_y dy = -dx - \frac{14}{9} dy$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm z''_{xy}, biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^{x+y+z}$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - e^{x+y+z} \equiv 0$$

$$F'_x = 2x - e^{x+y+z} = 2x - x^2 - y^2 - z^2; \quad F'_z = 2z - e^{x+y+z} = 2z - x^2 - y^2 - z^2.$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{2x - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z}$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{2x - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z}\right)'_y$$

Đạo hàm theo y; x là hằng, y là biến, z là hàm theo y.

$$= \frac{(-2y - 2z \cdot z'_y) \cdot \mathrm{M} - \mathrm{T} \cdot (2y + 2z \cdot z'_y - 2 \cdot z'_y)}{\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2z\right)^2}$$

3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3$$

$$F(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 - 2z + 3 \equiv 0$$

$$F'_x = yz + 2x \qquad F'_y = xz + 2y \qquad F'_z = xy - 2$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz + 2x}{xy - 2} = \frac{yz + 2x}{2 - xy}$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)'_y = \left(\frac{yz + 2x}{2 - xy}\right)'_y$$

x là hằng, y là biến,

z là hàm theo y.

$$= \frac{(z + yz'_y) \cdot (2 - xy) - (yz + 2x) \cdot (-x)}{(2 - xy)^2}$$

Bài tập

1. Tìm đạo hàm riêng của các hàm sau.

   a. $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2};\quad f_{xy}$

   b. $f(x,y)=e^{xy^2};\quad f_{xx};f_{xy}$

   c. $f(x,y)=e^{x^2-y};\quad f_{xy}$

   d. $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y};\quad f_{xy};f_{xx}$

   e. $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y};\quad f_{xy}(1,0)$

   f. $f(x,y)=\ln(x^2+y);\quad f_{xy}(0,1);f_{xx}(1,0)$

   g. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases};\quad f_{xy}(0,0);$

   h. $f(x,y)=e^{2x+3y};\quad f_{xxy};f_{xyx}$

   i. $f(x,y)=\ln(2x+3y);\quad \dfrac{\partial^{10}f}{\partial x^{10}}$

   j. $f(x,y)=(2x+1)e^{x+2y};\quad \dfrac{\partial^{10}f}{\partial x^{10}}$

Bài tập

1. Tính $\dfrac{dz}{dt}$

   a. $z = \sin x \cos y;\ x = \pi t, y = \sqrt{t}$

   b. $z = x\ln(x+2y);\ x = \sin t, y = \cos t$

   c. $z = xe^{\frac{y}{x}};\ x = t^2, y = 1-t, z = 1+2t$

   d. $z = z(te^t, t^2 + \sin t)$

2. Tính các đạo hàm tương ứng:

   a. $f(u,v) = \dfrac{u}{v} + e^{uv};\ \ u = x^2y + 2x;\ \ v = ye^{xy}$. Tính f_x, f_y

   b. $f = \arctan(\sqrt{u});\ u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$. Tìm f_x, f_y

   c. $f = e^{xy} + \ln(xy);\ y = \sin^3 x$. Tìm $\dfrac{df}{dx};\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$

   d. $f = f(3x+4y, xy+e^y)$. Tìm f_x, f_y

   e. $f = f(2x+y)$. Tìm f_{xx}, f_{xy}

   f. $f = f(2x^2+y, xy)$. Tìm f_{xx}, f_{xy}

   g. $\begin{cases} f = f(u) = u^3 + \sin u; \\ u = 2xy + e^x \end{cases}$. Tìm f_{xx}, f_{xy}

Bài tập

1. Tính các đạo hàm của các hàm ẩn sau

   a) $e^{x+y} + x^2 = y^2 + 2x$

   b) $\cos(xy) + 2x - y^2 = 2$

   c) $\cos(x - y) = xe^y$

   d) $xy + x\sin y = y^3$

   e) $e^{x+y+z} + 2x - 3y = z^2 + 1$

   f) $xe^y + yz + ze^x = 0$

   g) $xyz = \sin(x + y + z)$

   h) $\ln(x + yz) = x^2 + y^2 - z$

   i) $xy + x - 2y = e^{2x+3y}; \;\; y''(x)$

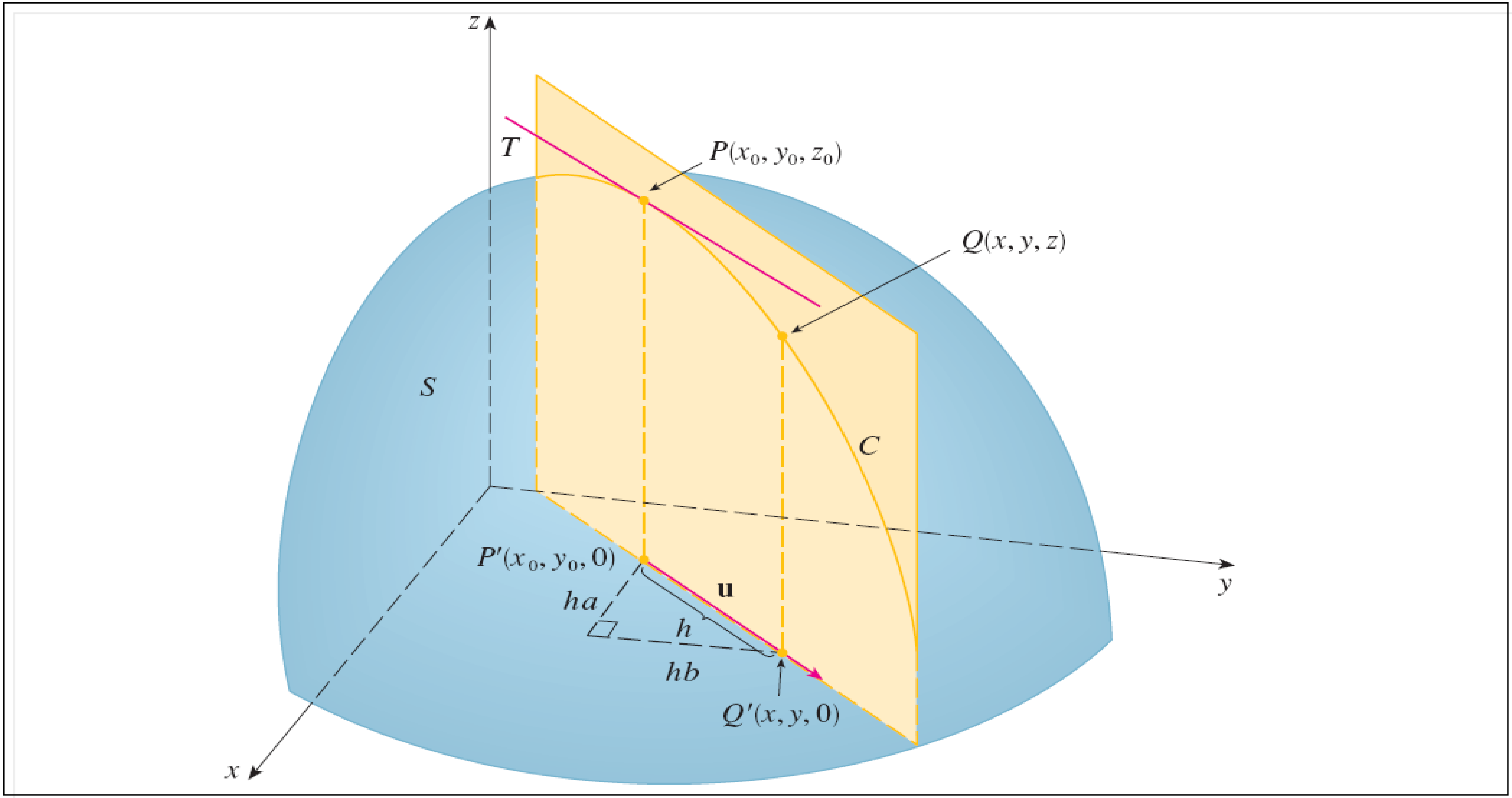
   j) $x^3 + xy = y^2 - 2y; \;\; y''(x)$

   k) $xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3; \;\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

   l) $e^{x+y+z} = x + 2y - 3z; \;\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

4. Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa



4. Đạo hàm theo hướng

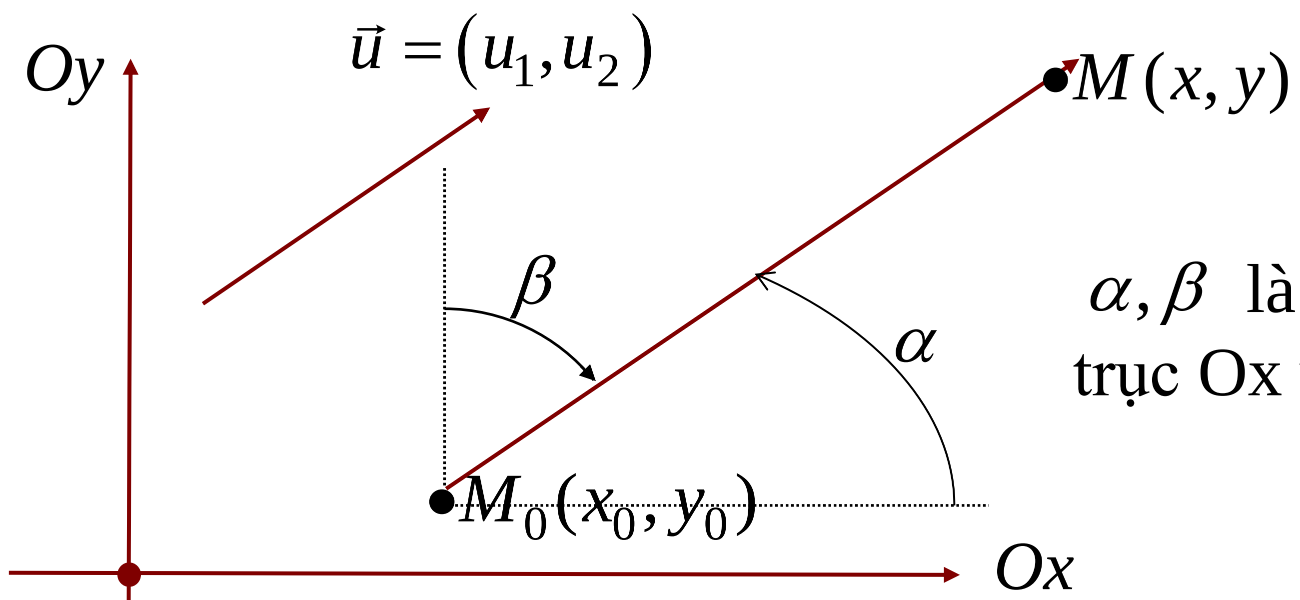
Định nghĩa

$f = f(x,y)$

Véctơ đơn vị cùng phương, chiều với $\vec{u}$

$$\vec{l_0} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (l_1, l_2)$$

$$\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta)$$



α, β là góc tạo bởi $\vec{u}$ và chiều dương trục Ox và Oy tương ứng.

Véctơ M_0M cùng phương, chiều với $\vec{u}$: $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases}$, $t > 0$

Đạo hàm của hàm f theo hướng véctơ $\vec{u}$ tại điểm M_0 là giới hạn (nếu tồn tại):

$$f'_{\vec{u}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{MM_0}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa

$$M_0M = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = t \qquad f'_{\vec{u}}(M_0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$f'_{\vec{u}}(M_0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t} = f'_+(0)$$

Theo quy tắc dây chuyền: $f'(t) = f'_x\cdot x'(t) + f'_y\cdot y'(t)$

Do đó: $f'_{\vec{u}}(M_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cdot\cos\beta$

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0) = \Big(\big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\big), (\cos\alpha, \cos\beta)\Big)$$

$\overrightarrow{\text{grad}f}(x_0,y_0) = \big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\big)$ véctơ gradient của f tại M_0 .

$$\boxed{f'_{\vec{u}}(M_0) = \left(\overrightarrow{\text{grad}f}(x_0,y_0), \vec{l_0}\right)}$$

Tích vô hướng của véctơ gradient tại M_0 với véctơ đơn vị.

4. Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa

Tương tự, ta có định nghĩa đạo hàm của *f*=*f*(x,y,z) tại M_0 theo hướng $\vec{u}$:

$$f'_{\vec{u}}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta + f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma$$

$$\boxed{f'_{\vec{u}}(M_0) = \left(\overrightarrow{\text{grad}f}(x_0, y_0, z_0), \vec{l_0}\right)}$$

Trong đó: véctơ đơn vị cùng hướng với $\vec{u}$ là: $\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

α, β, γ là các góc tạo bởi $\vec{u}$ và chiều dương trục Ox, Oy và Oz tương ứng.

Véctơ gradient của *f*(x,y,z) tại M_0 là: $\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\right)$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y) = xy^2 - 3x^4y^5$ tại điểm $M_0(1,1)$ theo hướng của véctơ $\vec{u} = (1,-2)$

Véctơ đơn vị cùng hướng với $\vec{u}$ là: $\vec{l_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta)$

$$f'_x = y^2 - 12x^3y^5 \Rightarrow f'_x(1,1) = -11$$

$$f'_y = 2xy - 15x^4y^4 \Rightarrow f'_y(1,1) = -13$$

$$f'_{\vec{l_0}}(1,1) = f'_x(1,1)\cdot\cos\alpha + f'_y(1,1)\cdot\cos\beta = -\frac{11}{\sqrt{5}} + \frac{26}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ tại điểm $M_0(1,2)$ theo hướng của véctơ tạo với chiều dương trục Ox một góc 30^0.

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \vec{l_0} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$f'_x = 3x^2 - 3y \Rightarrow f'_x(1,2) = -3$$

$$f'_y = -3x + 8y \Rightarrow f'_y(1,2) = 13$$

$$f'_{\vec{l_0}}(1,2) = f'_x(1,2)\cdot\cos\alpha + f'_y(1,2)\cdot\cos\beta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{2}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ tại điểm $M_0 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ theo hướng véctơ pháp tuyến ngoài của đường tròn: $x^2 + y^2 = 2x$ tại M_0.

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow \vec{n} = \left(F'_x, F'_y\right) = (2x-2, 2y) = (-1, \sqrt{3})$$

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$f'_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_x(M_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad f'_y = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_y(M_0) = \frac{1}{2}$$

$$f'_{\vec{l_0}}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y,z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$ tại điểm $M_0(3,3,1)$ theo hướng của véctơ l=(2,1,2).

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$f'_x = 3x^2 + 2y^2 \quad \Rightarrow f'_x(3,3,1) = 45$$

$$f'_y = 4xy + 3z^2 \quad \Rightarrow f'_y(3,3,1) = 39$$

$$f'_z = 6yz \quad \Rightarrow f'_z(3,3,1) = 18$$

$$f'_{\vec{l}}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta + f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma = 55$$

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y,z) = x^2 - 3yz + 4$ tại điểm $M_0(1,2,-1)$ theo hướng của véctơ tạo với các trục tọa độ những góc nhọn bằng nhau.

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Leftrightarrow 3\cos^2\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f'_x = 2x \quad \Rightarrow f'_x(1,2,-1) = 2$$

$$f'_y = -3z \quad \Rightarrow f'_y(1,2,-1) = 3$$

$$f'_z = -3y \Rightarrow f'_z(1,2,-1) = -6$$

$$f'_{\vec{l}}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta + f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Đạo hàm theo hướng

Chú ý

Cho hàm $f = f(x, y, z)$.

Đạo hàm của f tại M_0 theo hướng của véctơ (1,0,0) là:

$$f'_{\vec{i}}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(M_0)\cdot\cos\beta + f'_z(M_0)\cdot\cos\gamma = f'_x(M_0)$$

Vậy đạo hàm theo hướng véctơ (1,0,0) tại M_0 là đạo hàm riêng theo x tại đó, nếu đạo hàm riêng theo x tồn tại.

Nếu đạo hàm riêng theo x không tồn tại, thì đạo hàm theo hướng vẫn có thể có.

(vì theo định nghĩa, đạo hàm theo hướng là giới hạn một phía).

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tìm đạo hàm của $f(x,y,z)=|x|+2yz$ tại điểm $M_0(0,1,\ 1)$ theo hướng của véctơ (1,0,0).

Véctơ đơn vị là: $\vec{l_0} = (1,0,0)$.

Không tồn tại đạo hàm riêng theo x tại M_0.

Tìm đạo hàm của f theo hướng của véctơ (1,0,0) bằng định nghĩa:

$$f'_{\vec{l}}(0,1,1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

$$f'_{\vec{l}}(0,1,1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t,1,1) - f(0,1,1)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|+2-2}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1.$$

Lý do: trong định nghĩa đạo hàm theo hướng, M dần đến bên phải của M_0.

4. Đạo hàm theo hướng

Chú ý

Theo công thức tính đạo hàm đạo hàm theo hướng:

$$f'_{\vec{u}}(M_0) = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0), \vec{l_0}\right) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0)\right\| \cdot \left\|\vec{l_0}\right\| \cdot \cos\theta$$

$$\leq \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0)\right\| \cdot \left\|\vec{l_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0)\right\|$$

Đạo hàm của f tại M_0 đạt giá trị lớn nhất theo hướng của véctơ $\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0)$.

Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng là: $\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0)\right\|$.

Đạo hàm của f tại M_0 đạt giá trị nhỏ nhất theo hướng ngược với $\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0)$.

Giá trị nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng là: $-\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M_0)\right\|$.

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y,z) = xyz + 2xy^2 + yz^3$ và một điểm $M_0 = (1,1,2)$.

1) Tìm hướng mà đạo hàm của f theo hướng đó tại M_0 đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất này.

2) Tìm hướng mà đạo hàm của f theo hướng đó tại M_0 đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất này.

1) Hướng cần tìm là hướng của véctơ gradf (M_0):

$$\overrightarrow{\text{grad}f}(M_0) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0) \right)$$

Giá trị lớn nhất bằng độ lớn véctơ gradf (M_0): $f'_{\text{grad}f(M_0)} = \left\| \overrightarrow{\text{grad}f}(M_0) \right\|$.

2) Hướng cần tìm là ngược hướng của véctơ gradf (M_0).

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = \ln(xyz)$ và một điểm $M_0 = (1,-2,-3)$.

1) Tìm giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng của f tại M_0.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng của f tại M_0.

Đạo hàm theo hướng của hàm f tại M_0 là một hàm phụ thuộc vào hướng của véctơ $l = (l_1, l_2, l_3)$.

Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng bằng độ lớn véctơ gradf (M_0).

Giá trị lớn nhất đạt được khi lấy đạo hàm theo hướng của véctơ gradf (M_0).

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$ và một điểm $M_0 = (1,0)$.

Tìm hướng mà đạo hàm của f theo hướng đó tại M_0 có giá trị bằng 1.

Giả sử hướng cần tìm là hướng của véctơ đơn vị: $\vec{l}_0 = (a,b), a^2 + b^2 = 1.$

$$f'_{\vec{l}_0}(M_0) = f'_x(M_0)\cdot a + f'_y(M_0)\cdot b$$

$f'_x = 2x + y\cos(xy) \Rightarrow f'_x(M_0) = 2.$ $\quad f'_y = x\cos(xy) \Rightarrow f'_y(M_0) = 1.$

$f'_{\vec{l}_0}(M_0) = 2a + b = 1.$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}; \begin{cases} a = 4/5 \\ b = -3/5 \end{cases}$$

Vậy có hai hướng:

$\vec{l}_0 = (0,1)$ hoặc $\vec{l}_0 = (4/5, -3/5).$

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y.$

Tìm tất cả các điểm mà tốc độ thay đổi nhanh nhất của hàm f tại những điểm này là theo hướng của véctơ $\vec{i} + \vec{j}$.

Giả sử điểm cần tìm là $M(a,b)$.

Tốc độ thay đổi nhanh nhất của f tại M là theo hướng của véctơ gradf(M):

$$\overrightarrow{\text{grad}f}(M) = \left(f'_x(a,b), f'_y(a,b) \right) \quad = (2a-2, 2b-4).$$

Mà grad$f$(M) cùng hướng với véctơ i + j = (1,0) + (0,1) = (1,1).

$$(2a-2, 2b-4) = t(1,1)\,,\, t>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + t/2 \\ b = 2 + t/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + s \\ b = 2 + s \end{cases}, \; s > 0$$

Tập hợp các điểm là nửa đường thẳng.

4. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Nhiệt độ *T* tại một điểm (x,y,z) được cho bởi công thức:

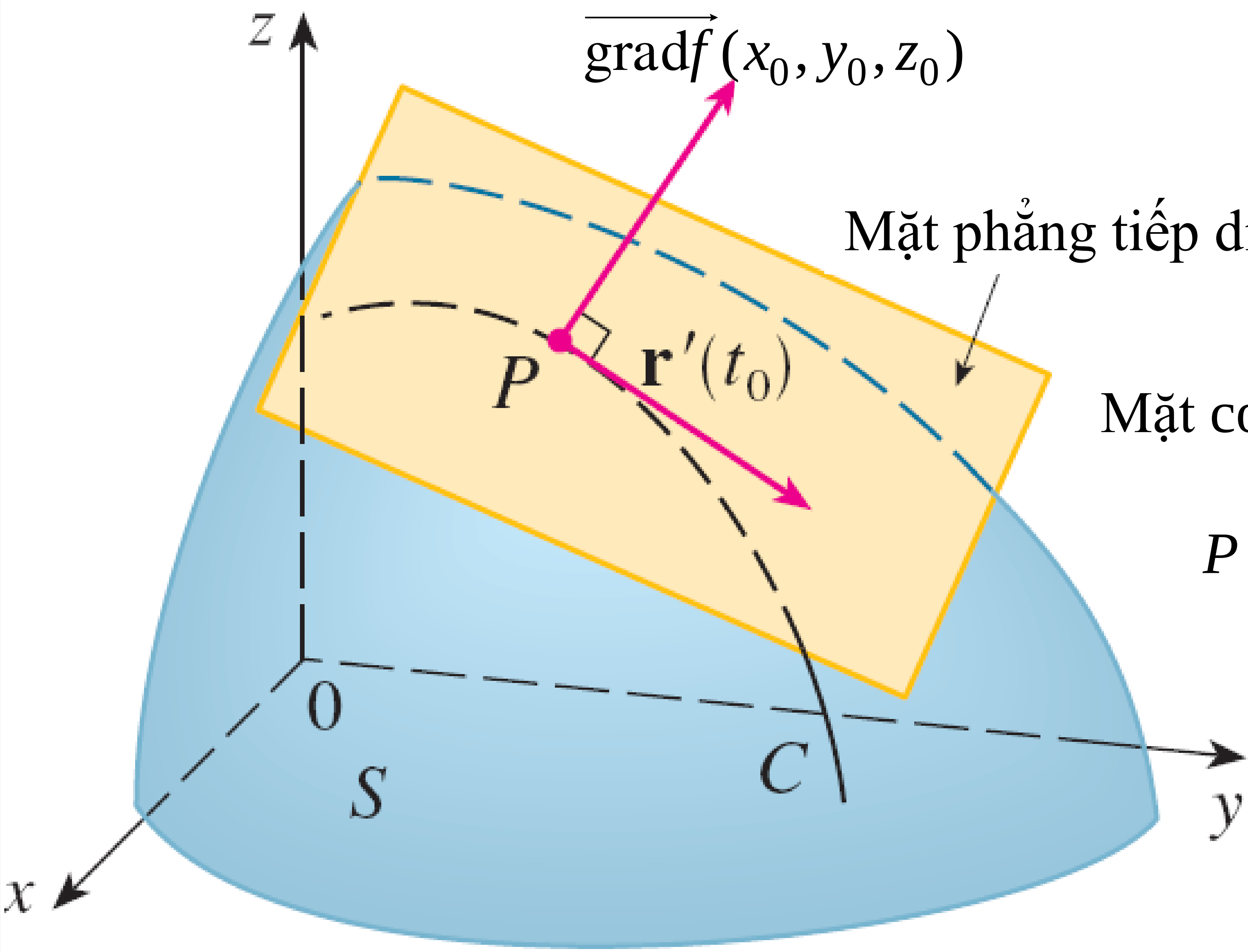
$$T(x,y,z) = 200 \cdot e^{-x^2-3y^2-9z^2}.$$

T tính bằng ^{0}C; x, y, z tính bằng mét.

1) Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ tại điểm *P*(2,-1,2) theo hướng đến điểm (3,-3,3).

2) Tìm hướng mà nhiệt độ thay đổi nhanh nhất tại điểm *P*(2,-1,2).

3) Tìm giá trị lớn nhất của tốc độ thay đổi tại điểm *P*(2,-1,2).



Mặt cong *S* có ptrình: f(x,y,z) = 0.

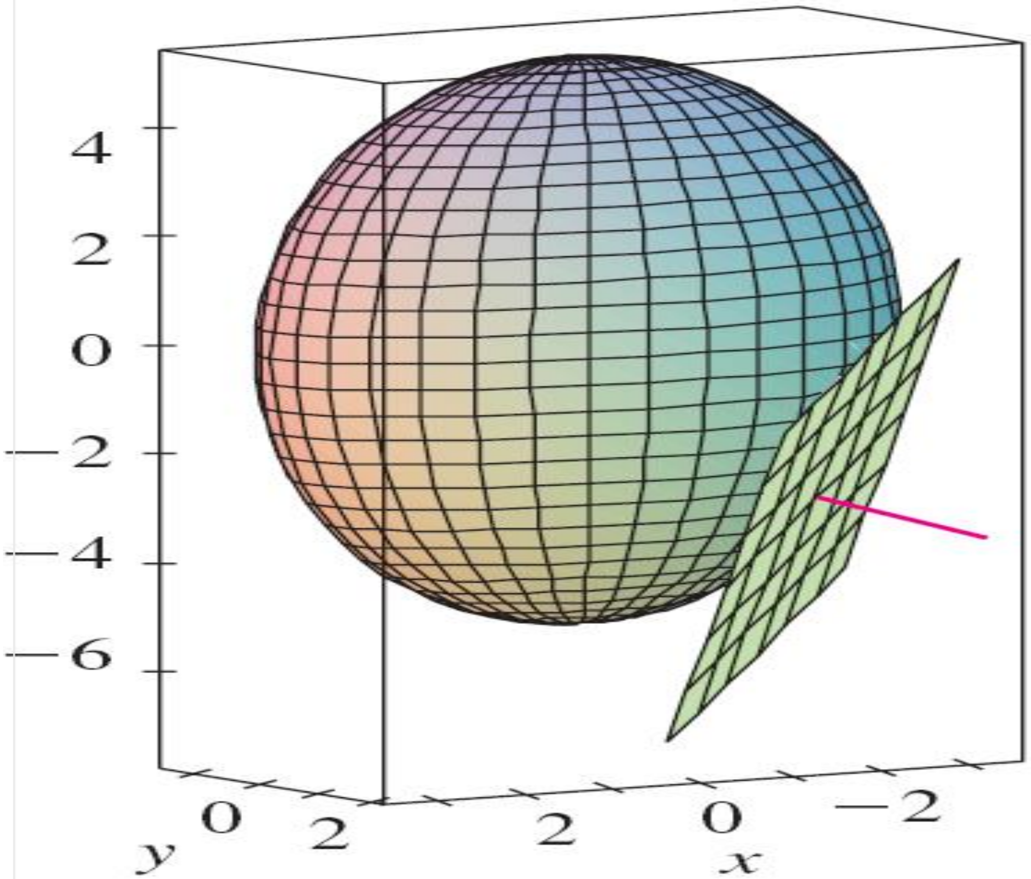
P là một điểm thuộc mặt *S*.

Phương trình mặt phẳng tiếp diện tại *P* với *S*:

$$f_x'(P)(x-x_0)+f_y'(P)(y-y_0)+f_z'(P)(z-z_0)=0.$$

Véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện chính là vectơ grad*f*(*P*).

Viết phương trình mặt tiếp diện và phương trình của pháp tuyến với mặt $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ tại điểm P(-2, 1, -3).



$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}-3=0.$$

$$F'_x=\frac{x}{2};F'_y=2y;F'_z=\frac{2z}{9}.$$

Phương trình mặt tiếp diện:

$$-1(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0.$$

$$3x-6y+2z+18=0.$$

Phương trình pháp tuyến qua P và có VTCP (-1, 2, -2/3): $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2/3}.$

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Định nghĩa

Cho hàm $f = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp (n+1) trong lân cận V của điểm $M_0 = (x_0, y_0)$.

Công thức Taylor của *f* đến cấp n tại điểm M_0 là:

$$f(x,y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f}{k!}(x_0, y_0) + R_n(\Delta x, \Delta y).$$

trong đó $R_n(\Delta x, \Delta y)$ là phần dư cấp n.

Khai triển Taylor tại điểm $M_0(0,0)$ được gọi là khai triển Maclaurint.

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Định nghĩa

Có hai cách thường dùng để biểu diễn phần dư:

1) Nếu cần đánh giá phần dư, thì sử dụng phần dư ở dạng Lagrange:

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x, x_0 + \theta \cdot \Delta y).$$

trong đó $0 < \theta < 1$.

2) Nếu không quan tâm phần dư, thì sử dụng phần dư ở dạng Peano:

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^n).$$

trong đó: $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ứng dụng khai triển Taylor

1) Xấp xỉ hàm đã cho với một đa thức (một hoặc nhiều biến) trong lân cận một điểm cho trước.

2) Tính đạo hàm cấp cao của f tại một điểm cho trước.

3) Tính giới hạn của hàm số (giới hạn kép nếu hàm 2 biến).

4) Tính gần đúng với sai số cho trước (vi phân cấp một không làm được điều này).

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + 2xy$ và một điểm $M_0 = (1,2)$.

Tìm công thức khai triển Taylor của f(x,y) tại M_0 đến cấp hai.

$$f(x,y) = f(1,2) + \frac{df(1,2)}{1!} + \frac{d^2 f(1,2)}{2!} + o(\rho^2)$$

$$f(x,y) = f(1,2) + \frac{f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2)}{1!} +$$

$$+ \frac{f''_{xx}(1,2)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + f''_{yy}(1,2)(y-2)^2}{2!} + o(\rho^2)$$

trong đó: $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$.

Tính tất cả các đạo hàm riêng trong công thức và thay vào biểu thức trên.

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Chú ý

Tìm khai triển Taylor bằng công thức trên ta phải tính các đạo hàm riêng cấp cao. Do đó, trong đa số trường hợp ta sẽ sử dụng cách sau.

Tìm khai triển Taylor của $f = f(x,y)$ tại $M_0(x_0,y_0)$:

1) Đặt: $X = x - x_0, Y = y - y_0 \Leftrightarrow x = X + x_0, y = Y + y_0$.

2) Tìm khai triển Maclaurint của hàm $f(X,Y)$, sử dụng khai triển Maclaurint của hàm một biến.

3) Đổi $f(X,Y)$ sang $f(x,y)$ (đổi biến $X = x - x_0, Y = y - y_0$).

4) Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các bậc của: $(x - x_0), (y - y_0)$.

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Tìm khai triển Taylor đến cấp hai của $f(x,y)=\dfrac{1}{2x+3y}$ tại $M_0=(1,2)$.

Đặt $X=x-1, Y=y-2 \Leftrightarrow x=X+1;\ y=Y+2.$

$$f=\frac{1}{2(X+1)+3(Y+2)}=\frac{1}{2X+3Y+8}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+2X/8+3Y/8}$$

Sử dụng khai triển hàm một biến: $g(t)=\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2+o(t^2)$, $t=\dfrac{2X}{8}+\dfrac{3Y}{8}$

$$f=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{2X}{8}+\frac{3Y}{8}\right)+\left(\frac{2X}{8}+\frac{3Y}{8}\right)^2\right]+o(\rho^2)\ ,\ \rho=\sqrt{X^2+Y^2}$$

Khai triển, bỏ bậc cao hơn 2, đổi biến lại, sắp xếp theo thứ tự.

$$f=\frac{1}{8}-\frac{2}{8^2}(x-1)-\frac{3}{8^2}(y-2)+\frac{4}{8^3}(x-1)^2+\frac{12}{8^3}(x-1)(y-2)+\frac{9}{8^3}(y-2)^2+o(\rho^2).$$

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Tìm khai triển Taylor đến cấp ba của $f(x,y) = \ln(x+y)$ tại $M_0 = (1,1)$.

Đặt $X = x-1, Y = y-1 \Leftrightarrow x = X+1; y = Y+1.$

$$f = \ln(2+X+Y) = \ln\left[2\cdot\left(1+\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}\right).$$

Sử dụng khai triển hàm một biến: $g(t) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, $t = \frac{X+Y}{2}$

$$f = \ln 2 + \frac{X+Y}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{X+Y}{2}\right)^3 + o(\rho^3).$$

Khai triển, bỏ bậc cao hơn 3, đổi biến, sắp xếp theo thứ tự:

$$f = \ln 2 + \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(x-1)(y-1)}{4} - \frac{(y-1)^2}{8} + \ldots\ldots$$

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Tìm khai triển Maclaurint đến cấp ba của $f(x,y) = e^x \sin y$.

Sử dụng khai triển Maclaurint của hàm một biến:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4).$$

$$f(x,y) = e^x \sin y = \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right] \cdot \left[y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4)\right].$$

$$f(x,y) = y - \frac{y^3}{6} + xy - \frac{xy^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} - \frac{x^2 y^3}{36} + \frac{x^3 y}{6} - \frac{x^3 y^3}{36} + o(\rho^3),\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Khai triển, bỏ bậc cao hơn 3, sắp xếp theo thứ tự:

$$f(x,y) = y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} + o(\rho^3).$$

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Tính giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$

Cách 1: Sử dụng khai triển hàm hai biến: $f(x,y) = x\sin y - y\sin x$

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{df(0,0)}{1!} + \frac{d^2f(0,0)}{2!} + o(\rho^2), \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= f(0,0) + \frac{f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y}{1!} +$$

$$+ \frac{f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2}{2!} + o(\rho^2)$$

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Tính giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$

Vì các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 tại (0,0) đều bằng 0 do đó: $f(x,y) = o(\rho^2)$

Vậy: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{o\left(\rho^2\right)}{\rho^2} = 0$

5. Công thức Taylor, Maclaurint

Ví dụ

Tính giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$

Cách 2: Sử dụng khai triển hàm một biến:

$$f(x,y) = \frac{x\left(y - \frac{y^3}{3!} + o\left(y^3\right)\right) - y\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\cdot 3!} + \frac{x\cdot o\left(y^3\right) - y\cdot o\left(x^3\right)}{x^2+y^2}$$

Ví dụ

Tính giới hạn: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$

Ta có:

$$0 \le \left|\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\cdot 3!}\right| \le \left|\frac{x^2-y^2}{2\cdot 3!}\right| \to 0, (x,y)\to(0,0)$$

$$0 \le \left|\frac{x\cdot o\left(y^3\right)-y\cdot o\left(x^3\right)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x\cdot o\left(y^3\right)-y\cdot o\left(x^3\right)}{2xy}\right| \le \left|\frac{x\cdot o\left(y^3\right)}{2xy}\right| + \left|\frac{y\cdot o\left(x^3\right)}{2xy}\right|$$

$$= \left|\frac{o\left(y^3\right)}{2y}\right| + \left|\frac{o\left(x^3\right)}{2x}\right| \to 0, (x,y)\to(0,0)$$. Do đó: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Cực trị không điều kiện

Định nghĩa

Hàm $f = f(x, y)$ đạt cực đại địa phương tại $f = f(x, y)$, nếu tồn tại một lân cận của (x_0, y_0): $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, với mọi (x, y) thuộc lân cận đó.

Tức là: $\exists B(M_0, r): \forall M \in B(M_0, r): f(M) \leq f(M_0)$.

Định nghĩa tương tự cho cực tiểu địa phương.

Điểm dừng: các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0.

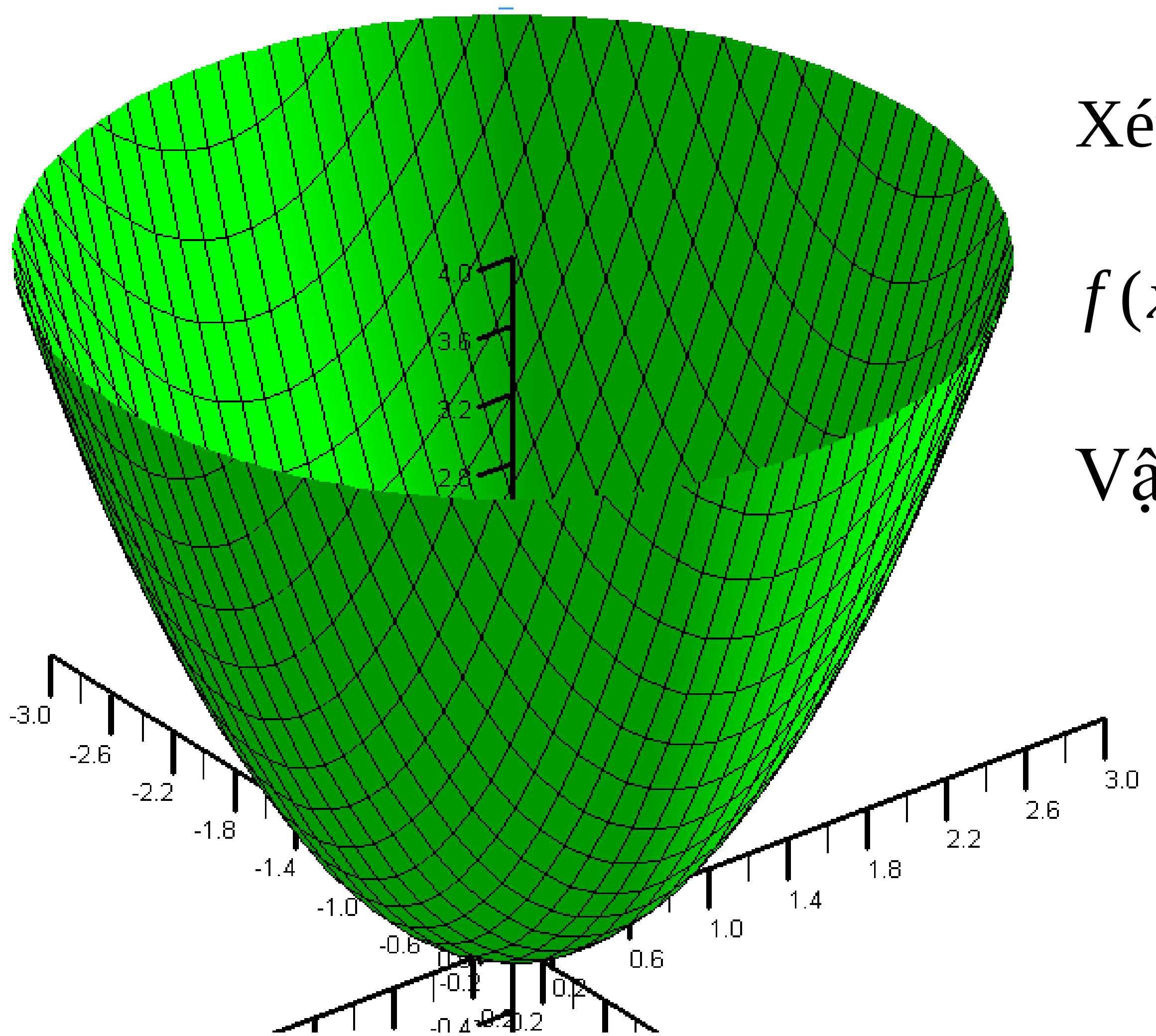
Điểm tới hạn: các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0 hoặc không tồn tại.

Điểm cực trị: hàm đạt cực đại địa phương hoặc cực tiểu địa phương.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu tại (0,0).



Xét $f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 \geq 0$

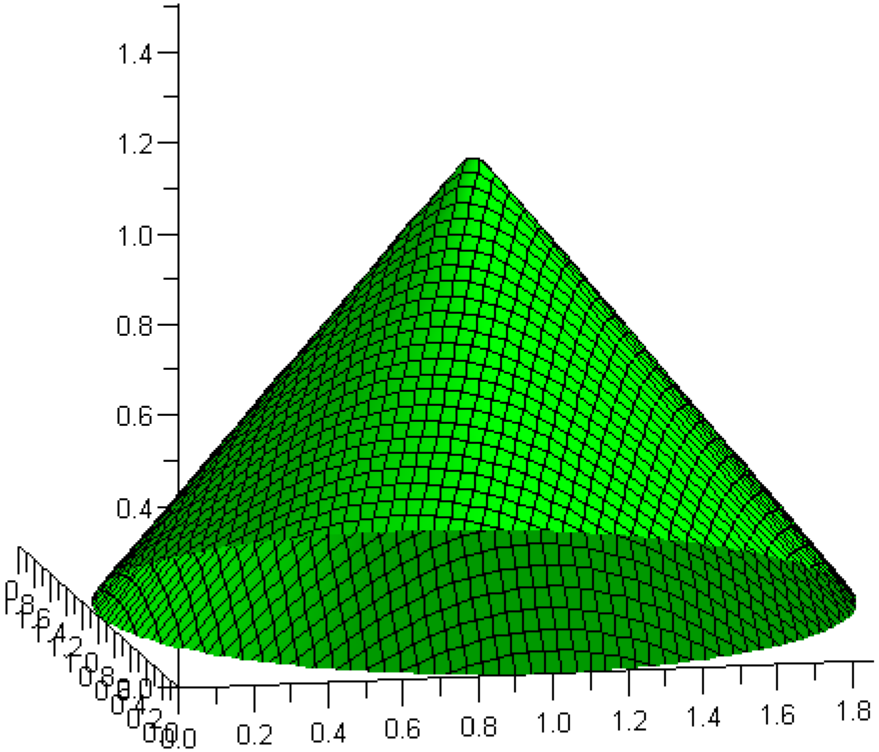
$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Vậy điểm (0,0) là điểm cực tiểu.

Ví dụ

Khảo sát cực trị của $f(x,y) = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ tại (1,1).

$$f(x,y) - f(1,1) = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 1 = -\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \le 0$$



$$\Leftrightarrow f(x,y) \le f(1,1)$$

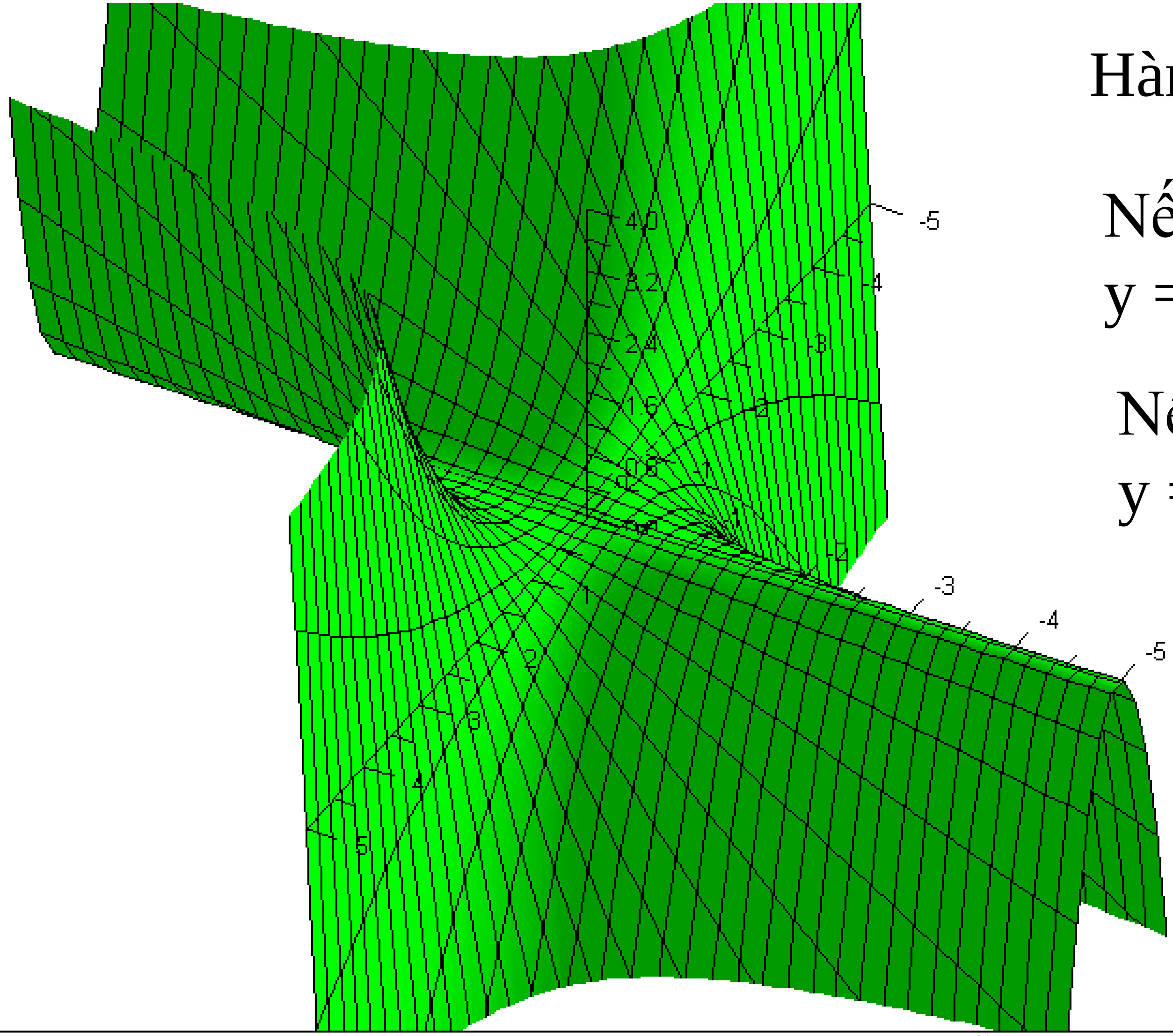
$$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$$

Vậy hàm đạt cực đại tại (1,1).

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Khảo sát cực trị của $f(x, y) = xy^2$ tại điểm (0,0).



Hàm không đạt cực trị tại (0,0).

Nếu dần về (0,0) theo đường thẳng y = x (x > 0) thì f (x,y) > 0.

Nếu dần về (0,0) theo đường thẳng y = x (x < 0) thì f (x,y) < 0.

Trong mọi lân cận của (0,0) đều tìm được điểm (x,y) mà f (x,y) > 0 và điểm (x,y) mà f (x,y) < 0.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị không điều kiện

Định lý điều kiện cần của cực trị

Hàm f đạt cực trị tại $M_0(x_0, y_0)$ thì tại đó:

1) Không tồn tại đạo hàm riêng cấp 1, hoặc

2) $\exists\ f'_x(x_0, y_0) = 0, \exists\ f'_y(x_0, y_0) = 0$

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị không điều kiện

Định lý điều kiện đủ của cực trị

Cho $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm $f = f(x, y)$ và f có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp 2 trong lân cận của điểm M_0.

1) $d^2 f(M_0) > 0$: M_0 là điểm cực tiểu.

2) $d^2 f(M_0) < 0$: M_0 là điểm cực đại.

3) $d^2 f(M_0)$ không xác định dấu thì M_0 không phải là điểm cực trị.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị không điều kiện

Sơ đồ khảo sát cực trị của hàm hai biến $f = f(x, y)$:

1) Tìm điểm dừng $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots$

2) Tính tất cả các đạo hàm riêng cấp hai $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$.

3) Khảo sát từng điểm dừng.

$$P_1(x_1, y_1):\quad A = f''_{xx}(P_1), B = f''_{xy}(P_1), C = f''_{yy}(P_1), \Delta = AC - B^2$$

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ là điểm cực tiểu
- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ là điểm cực đại
- $\Delta < 0 \Rightarrow P_1$ không là điểm cực trị
- $\Delta = 0$: chưa kết luận được

phải khảo sát bằng định nghĩa

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị không điều kiện

Chú ý:

1) Sơ đồ này không cho phép khảo sát cực trị tại điểm mà các đạo hàm riêng không tồn tại (điểm tới hạn, nhưng không phải là điểm dừng). Những điểm này phải khảo sát bằng định nghĩa.

2) Sơ đồ này chỉ áp dụng cho hàm hai biến.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Khảo sát cực trị của hàm: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

1) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} f'_x = 2x + y - 2 = 0 \\ f'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(1,0)$

2) Tìm đạo hàm riêng cấp 2: $f''_{xx} = 2,\ f''_{xy} = 1,\ f''_{yy} = 2$

3) Khảo sát từng điểm dừng: $P_1(1,0): A = f''_{xx}(P_1) = 2; B = f''_{xy}(P_1) = 1$

$$C = f''_{yy}(P_1) = 2; \Delta = AC - B^2 = 3 > 0$$

Kết luận cho điểm dừng P_1: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ là điểm cực tiểu, $f_{ct} = f(P_1) = -1$

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Khảo sát cực trị của hàm: $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

1) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(1,1), P_2(-1,-1), P_3(0,0)$

2) Tìm đạo hàm riêng cấp 2: $f''_{xx} = 12x^2 - 2,\ f''_{xy} = -2,\ f''_{yy} = 12y^2 - 2$

3) Khảo sát từng điểm dừng: $P_1(1,1): A = f''_{xx}(P_1) = 10; B = -2$

$$C = f''_{yy}(P_1) = 10; \Delta = AC - B^2 = 10^2 - 4 > 0$$

Kết luận cho điểm dừng P_1: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow P_1$ là điểm cực tiểu, $f_{ct} = f(P_1) = -2.$

Tương tự P_2 là điểm cực tiểu.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Tại điểm dừng $P_3(0,0): \Delta = AC - B^2 = 0$ chưa kết luận được.

Khảo sát bằng định nghĩa: $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Xét dấu của Δf trong lân cận của (0,0):

Chọn dãy: $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n \to +\infty} (0,0)$

Khi đó: $\Delta f(x_n, y_n) = \dfrac{1}{n^4} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1-n^2}{n^4} < 0$

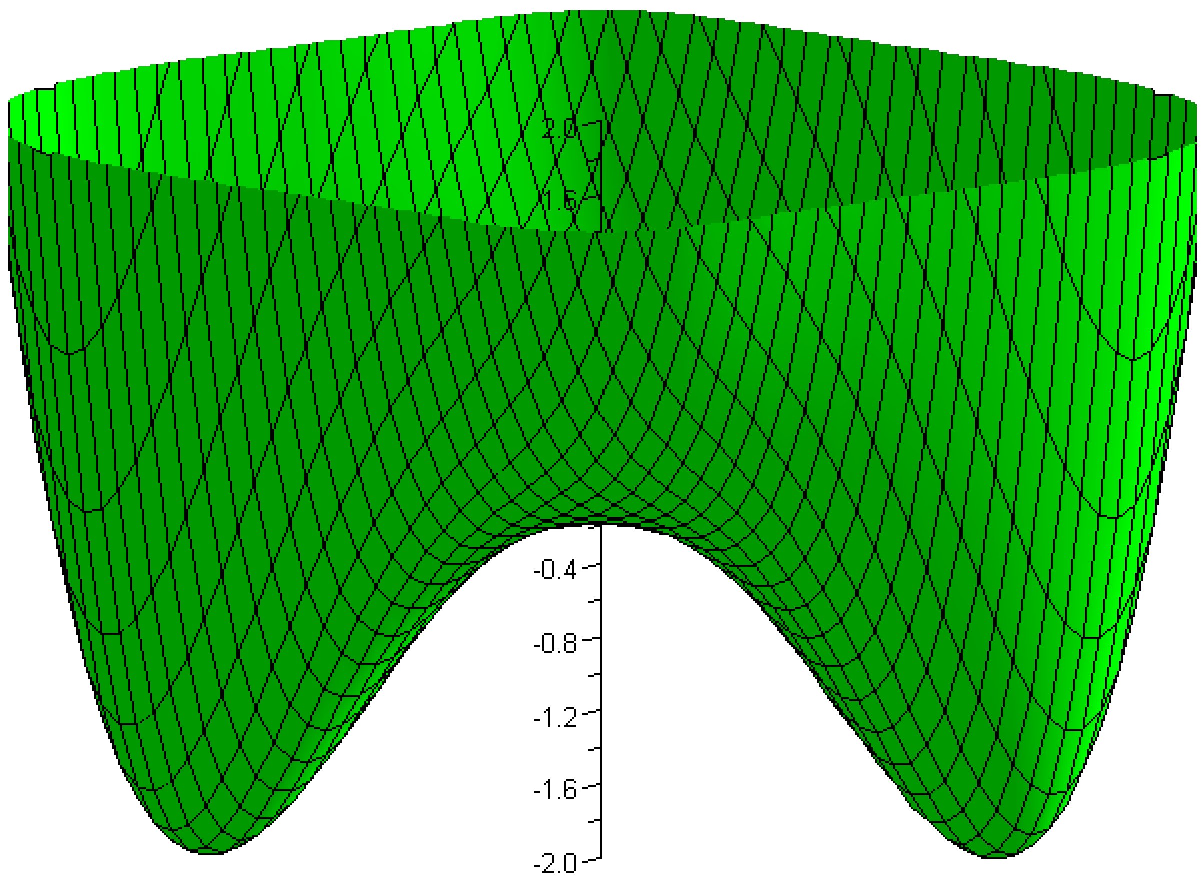
Chọn dãy: $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{-1}{n}\right) \xrightarrow{n \to +\infty} (0,0)$

Khi đó: $\Delta f(x_n, y_n) = \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{2}{n^4} > 0$

Vậy hàm không đạt cực trị tại (0,0).

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ



Ví dụ

Khảo sát cực trị của hàm: $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$

1) Tìm điểm dừng: $\begin{cases} f'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$ Không có điểm dừng.

Dùng định nghĩa ta thấy đạo hàm riêng theo x, theo y tại (0,0) không tồn tại.

Do đó (0,0) là điểm tới hạn, nhưng không phải là điểm dừng.

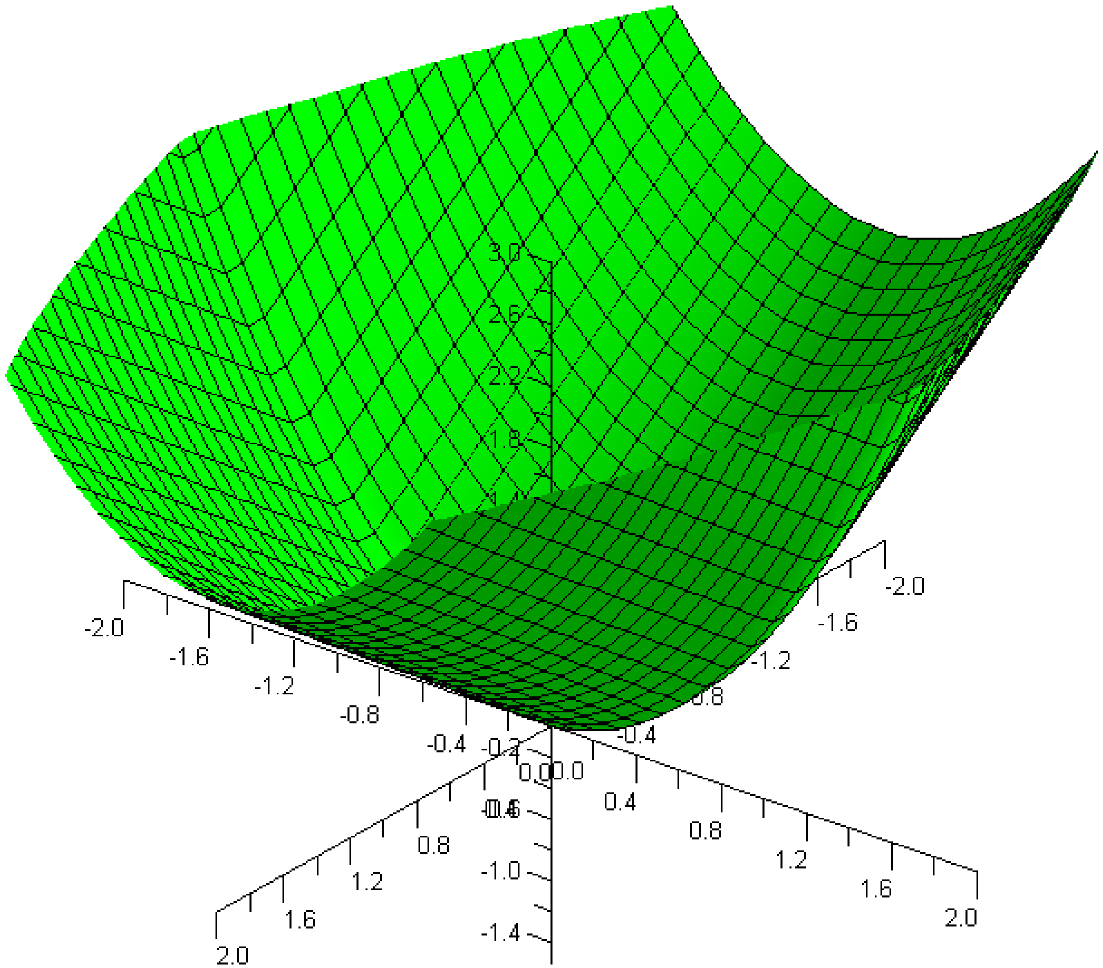
$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = \sqrt{x^2+y^2} \ge 0$ $\Delta f(0,0) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$

Suy ra (0,0) là điểm cực tiểu.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Ví dụ

Khảo sát cực trị của $f(x,y) = |x| + y^2$ tại điểm (0,0).



Không tồn tại $f'_x(0,0)$

Điểm (0,0) không là điểm dừng.

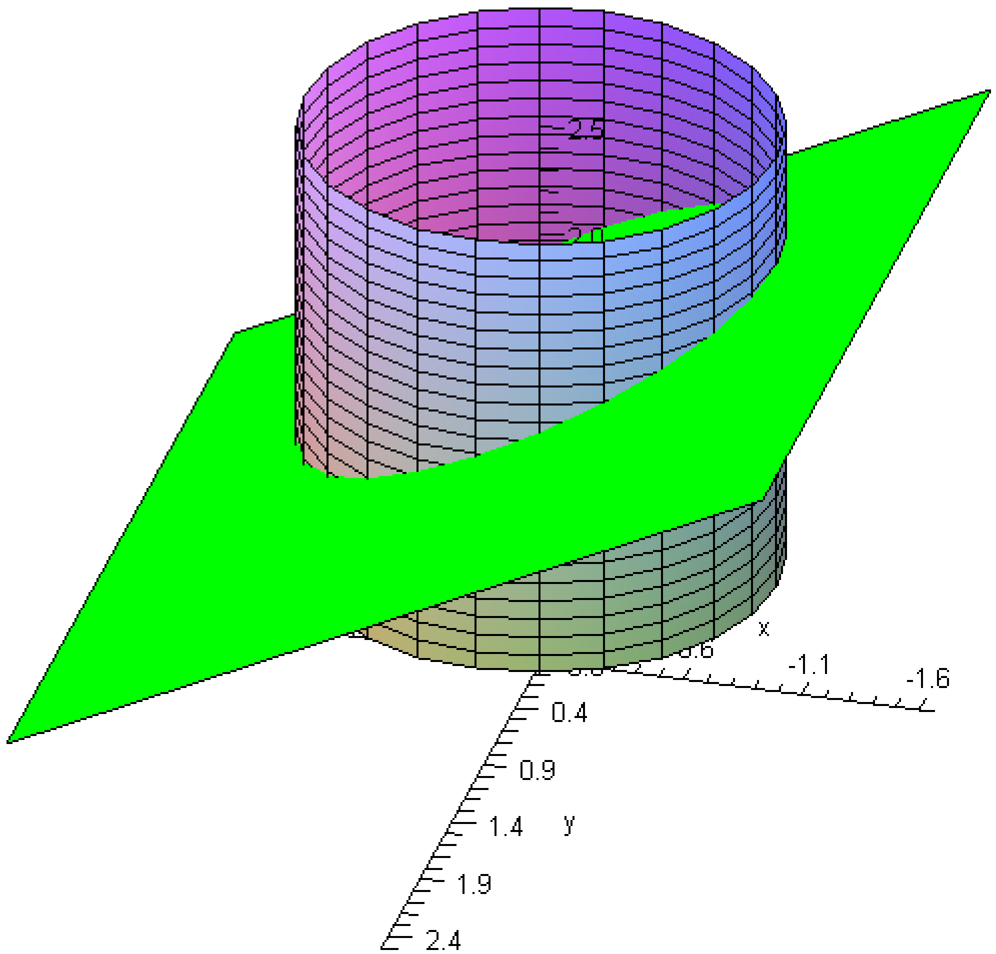
Điểm (0,0) là điểm tới hạn.

$$f(x,y) - f(0,0) = |x| + y^2 \geq 0$$

Do đó (0,0) là điểm cực tiểu.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị có điều kiện



Đồ thị của $f(x, y) = 2 - x - 2y$

là mặt phẳng.

Không có cực trị $\forall (x, y) \in R^2$.

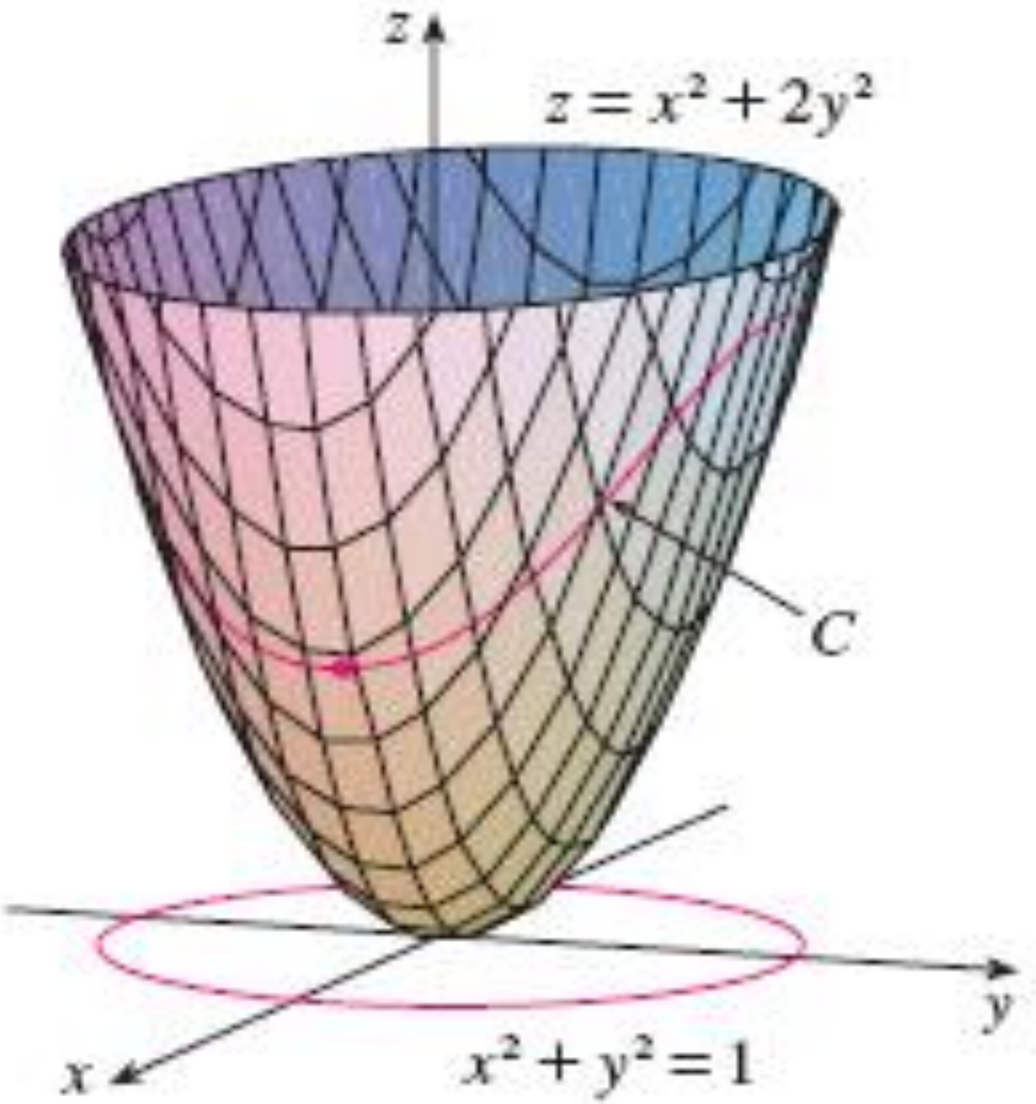
Xét điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$

Khảo sát cực trị trên đường Ellipse là giao của mặt phẳng và mặt trụ.

Tồn tại cực trị có điều kiện.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị có điều kiện



Hàm số: $z = x^2 + 2y^2$

Xét điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$

Khảo sát cực trị trên đường cong C là giao của mặt cong z(x,y) và mặt trụ.

Tồn tại cực trị có điều kiện.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị có điều kiện

Định nghĩa

Hàm $f = f(x,y)$ đạt cực đại tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ nếu tồn tại một lân cận của (x_0,y_0): $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$, với mọi (x,y) thuộc lân cận đó và thỏa mãn điều kiện $\varphi(x,y) = 0$.

Tức là: $\exists B(M_0,r): \forall M \in B(M_0,r):\ f(M) \le f(M_0)\ ;\ \varphi(M) = 0$

Định nghĩa tương tự cho cực tiểu có điều kiện.

Cực trị có điều kiện

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ được gọi là điểm kỳ dị của đường cong $\varphi(x, y) = 0$ nếu $\varphi'_x(M_0) = 0; \varphi'_y(M_0) = 0$

Định lý (điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ thỏa các điều kiện:

1) M_0 không là điểm kỳ dị của đường cong $\varphi(x, y) = 0$

2) $f(x, y), \varphi(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong lân cận của M_0

3) Hàm $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ đạt cực trị tại M_0

Khi đó tồn tại một số λ thỏa mãn: $\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda\varphi'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$

6. Cực trị hàm nhiều biến

Cực trị có điều kiện

Số λ được gọi là nhân tử Lagrange.

Hàm $L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$ được gọi là hàm Lagrange.

Định lý (điều kiện đủ của cực trị có điều kiện)

Giả sử $f(x,y), \varphi(x,y)$ khả vi liên tục đến cấp 2 trong lân cận của M_0

Trong lân cận của M_0 thỏa mãn các điều kiện trong định lý điều kiện cần.

- $d^2L(M_0) > 0 \Rightarrow M_0$ là điểm cực tiểu có điều kiện.
- $d^2L(M_0) < 0 \Rightarrow M_0$ là điểm cực đại có điều kiện.
- $d^2L(M_0)$ không xác định dấu $\Rightarrow M_0$ không là điểm cực trị.

Sơ đồ khảo sát cực trị của $f = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$

1) Lập hàm Lagrange: $L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$

Tìm điểm dừng của $L(x,y)$: $\begin{cases} L'_x(x,y)=0 \\ L'_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(x_1,y_1),\lambda_1 \\ P_2(x_2,y_2),\lambda_2 \\ \cdots \end{cases}$

2) Tính tất cả các đạo hàm riêng cấp hai $L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy}$.

3) Khảo sát từng điểm dừng.

$$P_1(x_1,y_1),\lambda_1: \; d^2L(P_1) = L''_{xx}(P_1)dx^2 + 2L''_{xy}(P_1)dxdy + L''_{yy}(P_1)dy^2$$

Dựa vào định lý điều kiện đủ để kết luận.

Tương tự khảo sát các điểm dừng còn lại.

Chú ý:

1) Để khảo sát $d^2L(P_1)$ ta có thể sử dụng điều kiện:

$$\varphi(x,y)=0 \quad \Rightarrow d\varphi(x,y)=0 \quad \Rightarrow d\varphi(P_1)=0$$

$\Rightarrow \varphi'_x(P_1)dx+\varphi'_y(P_1)dy=0.$ Từ đây ta có dx theo dy (hoặc dy theo dx).

Thay vào biểu thức của $d^2L(P_1)$, ta có một hàm theo dx^2 (hoặc dy^2).

2) Trong bài toán cực trị có điều kiện: dx và dy khác 0.

3) Nếu từ $\varphi(x,y)=0 \to y=y(x)$ hoặc $x=x(y)$, khi đó hàm $f(x,y)$ sẽ thành hàm 1 biến theo x hoặc y. Khảo sát cực trị của hàm 1 biến này.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2$ với điều kiện $x^2 + 4y^2 = 25$

1) Hàm Lagrange: $L(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 12x + 2y + 8\lambda y = 0 \\ \varphi(x,y) = x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 : P_1(3,-2), P_2(-3,2) \\ \lambda_2 = -\dfrac{17}{4} : P_3(4,\dfrac{3}{2}), P_4(-4,-\dfrac{3}{2}) \end{array}$$

2) Tìm đạo hàm riêng cấp 2: $L''_{xx} = 4 + 2\lambda, L''_{xy} = 12, L''_{yy} = 2 + 8\lambda$

3) Khảo sát từng điểm dừng: $P_1(3,-2), \lambda_1 = 2:$

$$d^2L(P_1) = L''_{xx}(P_1)dx^2 + 2L''_{xy}(P_1)dxdy + L''_{yy}(P_1)dy^2 = 8dx^2 + 24dxdy + 18dy^2$$

$$= 2(2dx + 3dy)^2 > 0$$

$\rightarrow P_1$ là điểm cực tiểu có điều kiện.

Tìm cực trị của hàm $f(x,y)=6-5x-4y$ với điều kiện $x^2-y^2=9$

1) Hàm Lagrange: $L(x,y)=6-5x-4y+\lambda(x^2-y^2-9)$

$$\begin{cases} L'_x=-5+2\lambda x=0 \\ L'_y=-4-2\lambda y=0 \\ \varphi(x,y)=x^2-y^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} P_1(5,-4),\lambda_1=1/2 \\ P_2(-5,4),\lambda_2=-1/2 \end{matrix}$$

2) Tìm đạo hàm riêng cấp 2: $L''_{xx}=2\lambda, L''_{xy}=0, L''_{yy}=-2\lambda$

3) Khảo sát từng điểm dừng: $P_1(5,-4),\lambda_1=1/2:$

$$d^2L(P_1)=L''_{xx}(P_1)dx^2+2L''_{xy}(P_1)dxdy+L''_{yy}(P_1)dy^2=dx^2-dy^2$$

từ điều kiện: $d\varphi(P_1)=0 \Rightarrow 10dx+8dy=0 \Rightarrow dy=-\dfrac{5}{4}dx$

$d^2L(P_1)=dx^2-\left(\dfrac{-5}{4}dx\right)^2=-\dfrac{9}{16}dx^2<0 \quad \to P_1$ là điểm cực đại có điều kiện.

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Định nghĩa

Số a được gọi là giá trị lớn nhất của hàm f trên một tập đóng và bị chặn D, nếu $\forall M \in D: f(M) \leq a$ và $\exists M_0 \in D: f(M_0) = a$

Tương tự ta có định nghĩa giá trị nhỏ nhất.

Nhắc lại: Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f = f(x)$ trên $[a, b]$:

1) Tìm điểm tới hạn thuộc (a, b): $x_1, x_2, \ldots$

Loại các điểm không thuộc (a, b). Tính giá trị của f tại những điểm còn lại.

2) Tính giá trị $f(a), f(b)$.

3) So sánh giá trị của f ở bước 1) và bước 2). Kết luận.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Định lý Weierstrass

Hàm nhiều biến f liên tục trên tập đóng, bị chặn D thì đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các điểm tới hạn trong D, hoặc tại các điểm biên của D.

Để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm nhiều biến f trên D:

1) Tìm trong D (các điểm trong của D) (bài toán tìm cực trị không điều kiện)

Tìm điểm tới hạn của f : $P_1, P_2, \ldots$

Loại các điểm không là điểm trong của D. Tính giá trị của f tại những điểm còn lại.

2) Tìm cực trị của f trên biên D (bài toán tìm cực trị có điều kiện).

3) So sánh giá trị của f ở bước 1) và bước 2). Kết luận.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Chú ý:

1) Tìm trên biên D: giả sử biên D cho bởi phương trình $\varphi(x, y) = 0$

Tìm trên biên D tức là tìm cực trị của $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$

Lập hàm Lagrange: $L(x, y) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y)$

Tìm điểm dừng của L: $\begin{cases} L'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1(x_1, y_1) \\ Q_2(x_2, y_2) \\ \cdots \end{cases}$

Tính giá trị của f tại các điểm $Q_1, Q_2, \ldots$

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Chú ý:

2) Trường hợp đặc biệt, biên của D là những đoạn thẳng.

Tìm trên từng đoạn thẳng. Giả sử tìm trên đoạn AB có phương trình:

$$ax + by = c \quad (b \neq 0) \quad \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Thay vào hàm $f(x, y)$ ta có hàm một biến x, tìm GTLN, GTNN của hàm này.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x,y)=(x-6)^2+(y+8)^2$

trên miền D: $x^2+y^2\le 25$

1) Tìm trong D: $\begin{cases} f'_x = 2(x-6)=0 \\ f'_y = 2(y+8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(6,-8)\notin D$

2) Tìm trên biên của D: $\varphi(x,y)=x^2+y^2-25=0$

Lập hàm Lagrange: $L(x,y)=(x-6)^2+(y+8)^2+\lambda(x^2+y^2-25)$

6. Cực trị hàm nhiều biến

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Tìm điểm dừng của L: $\begin{cases} L'_x = 2(x-6)+2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2(y+8)+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow Q_1(3,-4); Q_2(-3,4)$

$f(Q_1) = f(3,-4) = 25 \qquad f(Q_2) = f(-3,4) = 225$

3) So sánh giá trị của f ở bước 1) và bước 2). Kết luận.

Giá trị lớn nhất là 225 đạt tại (-3,4).

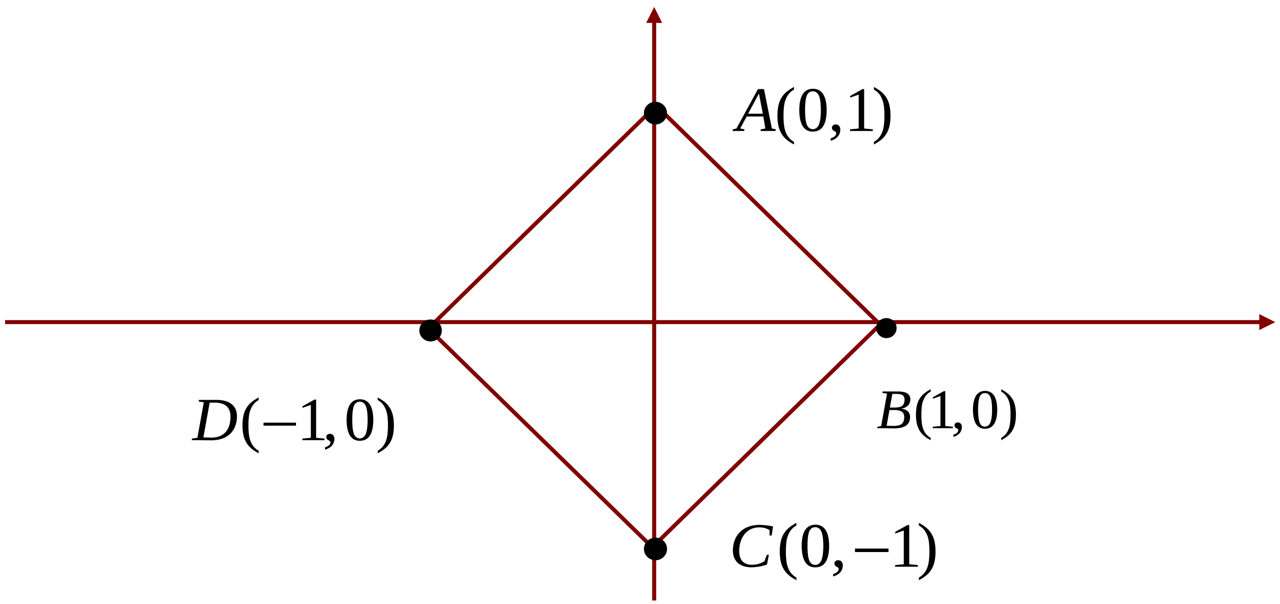
Giá trị nhỏ nhất là 25 đạt tại (3,-4).

6. Cực trị hàm nhiều biến

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

trên miền D: $|x| + |y| \le 1$



1) Tìm trong D: $\begin{cases} f'_x = 2x - y = 0 \\ f'_y = -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(0,0) \in D \Rightarrow f(P_1) = 0$

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

2) Tìm trên biên của D. Có 4 cạnh. Tìm trên từng cạnh một.

Trên AB: phương trình AB là: $y = 1 - x,\ x \in [0,1]$

$$f = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 3x^2 - 3x + 1$$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm một biến trên [0,1].

$$f' = 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in [0,1]$$

Trên AB có 3 điểm cần xét: A(0,1), B(1,0) và $Q_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Tính giá trị của f tại 3 điểm này: $f(A) = 1;\ f(B) = 1;\ f(Q_1) = \frac{1}{4}$

Tương tự tìm trên 3 cạnh còn lại.

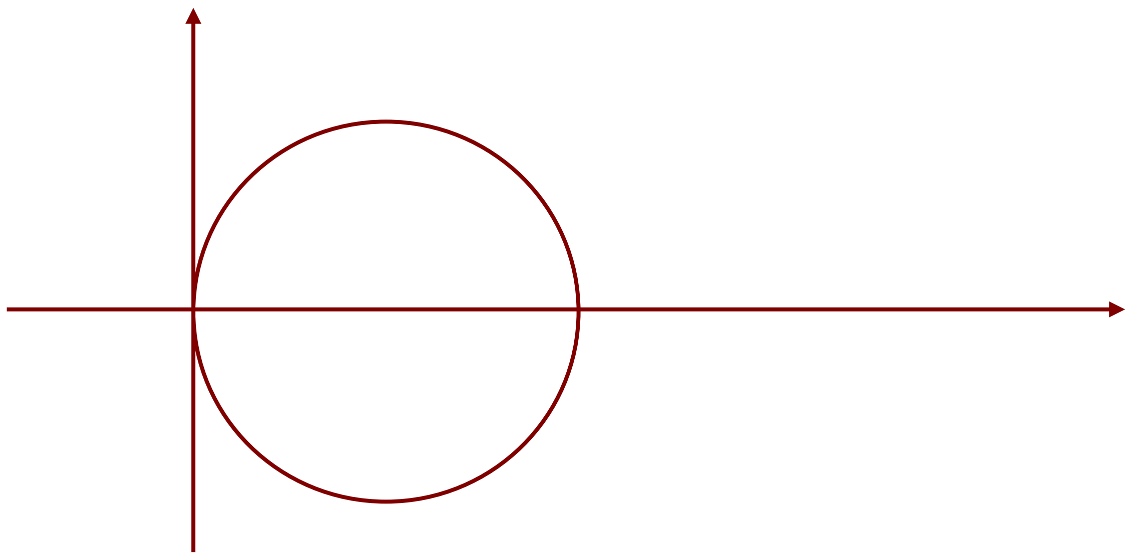
3) So sánh, kết luận: GTLN: 1; GTNN: 0.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 - y^2$

trên miền D: $x^2 + y^2 \le 2x$



1) Tìm trong D: $\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(0,0)$ loại vì không là điểm trong của D.

6. Cực trị hàm nhiều biến

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

2) Tìm trên biên D: $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 2x = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2x - x^2$$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm một biến:

$$f = x^2 - (2x - x^2) = 2x^2 - 2x \quad \text{trên } [0,2]$$

$$f' = 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2};\ f(0) = 0;\ f(2) = 4$$

3) So sánh, kết luận: Giá trị lớn nhất là 4; giá trị nhỏ nhất là $\frac{-1}{2}$

Chú ý: có thể lập hàm Lagrange.

Bài tập

1. Tìm các đạo hàm theo hướng tương ứng
   a. $f(x,y)=x^3y+ye^x;\ (2,1);\ \vec{l}=(1,3)$
   b. $f(x,y)=\sin(x+y);\ M_0(\frac{\pi}{4},0);\ \vec{l}=(1,2)$
   c. $f(x,y)=xe^{-2y};\ M_0(2,5);\ \vec{l}=(0,2)$
   d. $f(x,y)=2xy^2-x^4y;\ M_0(1,2);\ \vec{l}=(2,3)$
2. Tìm tất cả các điểm mà tốc độ thay đổi nhanh nhất của hàm $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y$ tại điểm đó là theo hướng của véctơ $\vec{i}+\vec{j}$
3. Tìm các đạo hàm theo hướng tương ứng
   a. $f(x,y,z)=x^2yz+ye^{xz}+z^2;\ (2,1,0);\ \vec{l}=(1,1,-1)$
   b. $f(x,y,z)=xe^{xyz};\ \mathrm{M}_0(1,1,2);\ \vec{l}=(1,0,2)$
   c. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2;\ M_0(1,0,2);\ \vec{l}=(1,1,-1)$
   d. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\ M_0(1,2,-1);\ \vec{l}=(1,1,2)$
4. Tìm hướng mà đạo hàm của f tăng nhanh nhất tại điểm đã cho.
   a. $f(x,y)=xy+x^3y^2;\ M_0(2,1)$
   b. $f(x,y)=y+\frac{x}{y};\ M_0(1,-2)$
   c. $f(x,y,z)=x^2yz+y^2z+z^3;\ M_0(0,1,2)$
5. Tìm hướng mà đạo hàm theo hướng đó của hàm $f(x,y)=xy+x^2-y^3$ tại điểm $M_0(1,1)$ có giá trị bằng 1.
6. Tìm hướng mà đạo hàm theo hướng đó của $f(x,y,z)=xyz+z^2-x^2$ tại điểm $M_0(1,1,-1)$ có giá trị bằng 1.

Bài tập

Tìm cực trị tự do của các hàm sau

a. $z(x,y)=(x-1)^2+2y^2$

b. $z(x,y)=(x-1)^2-2y^2$

c. $z(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$

d. $z(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$

e. $z(x,y)=x^3+3xy^2-39x-36y+26$

f. $z(x,y)=x^2y^2(6-x-y);\;\; x>0, y>0$

g. $z(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2+25$

h. $z(x,y)=x^2+xy+y^2-12x-3y$

i. $z(x,y)=3(x^2+y^2)-x^3+4y$

j. $z(x,y)=3x^3+y^3-3y^2-x-1$

k. $z(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

l. $z(x,y)=x^2+y^2-32\ln(xy)$

m. $z(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2, x\neq 0.$

Bài tập

Tìm cực trị có điều kiện

a. $f(x,y)=4x+6y;\ \ x^2+y^2=13$

b. $f(x,y)=x^2y;\ \ x^2+2y^2=6$

c. $f(x,y)=6-5x-4y;\ \ x^2-y^2=9$

d. $f(x,y)=5-3x-4y;\ \ x^2+y^2=25$

e. $f(x,y)=1-4x-8y;\ \ x^2-8y^2=8$

f. $f(x,y)=x^2+y^2+xy;\ \ x^2+y^2=1$

g. $f(x,y)=2x^2+12xy+y^2;\ \ x^2+4y^2=25$

h. $f(x,y)=2x^2+3y^2+4z^2;\ \ x+y+z=13$

Bài tập

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên miền D

1) $f(x,y)=1+4x-5y$, D là tam giác với các đỉnh (0,0), (2,0) và (0,3)

2) $f(x,y)=3+xy-x-2y$, D là tam giác với các đỉnh (1,0), (5,0) và (1,4)

3) $f(x,y)=x^2+y^2+x^2y+4$, $D=\{(x,y)\mid\ |x|\le 1, |y|\le 1\}$

4) $f(x,y)=4x+6y-x^2-y^2$, $D=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 4, 0\le y\le 5\}$

5) $f(x,y)=(x-6)^2+(y+8)^2$, $D=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2\le 25\}$

6) $f(x,y)=x^2-y^2$, $D=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2\le 25\}$

7) $f(x,y)=(y^2-x^2)e^{1-x^2+y^2}$, $D=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2\le 4\}$

8) $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ in the region $x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3$

9) $f(x,y)=1+x+2y$ trên miền D

a. $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$; b. $x\ge 0, y\le 0, x-y\le 1$

10) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ trên miền D $0\le x\le 2; -1\le y\le 2$