

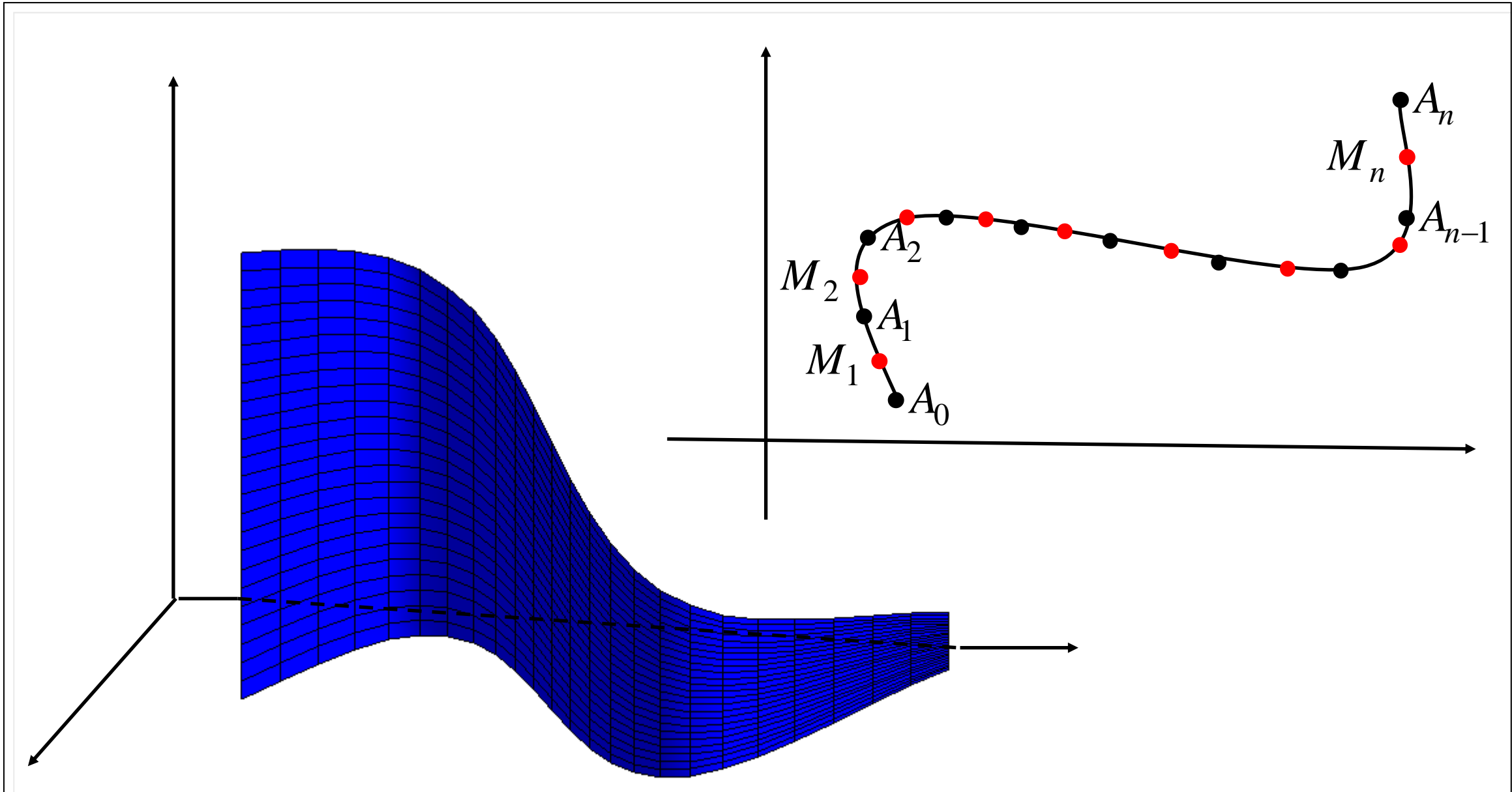
Nội dung Chương 5

1. Tích phân đường loại 1

2. Tích phân đường loại 2

1. Tích phân đường loại 1

Định nghĩa



1. Tích phân đường loại 1

Định nghĩa

Xét hàm $f = f(x, y)$ xác định trên đường cong C .

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm A_0, A_1, \dots, A_n .

Độ dài tương ứng L_1, L_2, \dots, L_n .

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i)$.

Lập tổng Riemann:
$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot L_i$$

$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia C , và cách lấy điểm M_i

$$I = \int_C f(x, y) dl$$

được gọi là **tích phân đường loại một** của $f = f(x, y)$ trên cung C .

1. Tích phân đường loại 1

Tính chất

1) Hàm $f(x,y)$ liên tục trên cung C thì khả tích trên C .

$$2) \quad L(C) = \int_C dl \quad 3) \quad \int_C \alpha \cdot fdl = \alpha \int_C fdl \quad 4) \quad \int_C (f + g)dl = \int_C fdl + \int_C gdl$$

5) Tích phân đường loại một **không phụ thuộc** chiều lấy tích phân trên C .

6) Nếu C được chia làm hai cung C_1 và C_2 rời nhau:

$$\int_C fdl = \int_{C_1} fdl + \int_{C_2} fdl$$

$$7) \quad \forall (x, y) \in C, f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \int_C fdl \leq \int_C gdl$$

8) Định lý giá trị trung bình: Nếu $f(x,y)$ liên tục trên cung tròn C có độ dài L . Khi đó tồn tại điểm M_0 thuộc cung C , sao cho:

$$\int_C fdl = f(M_0) \cdot L$$

1. Tích phân đường loại 1

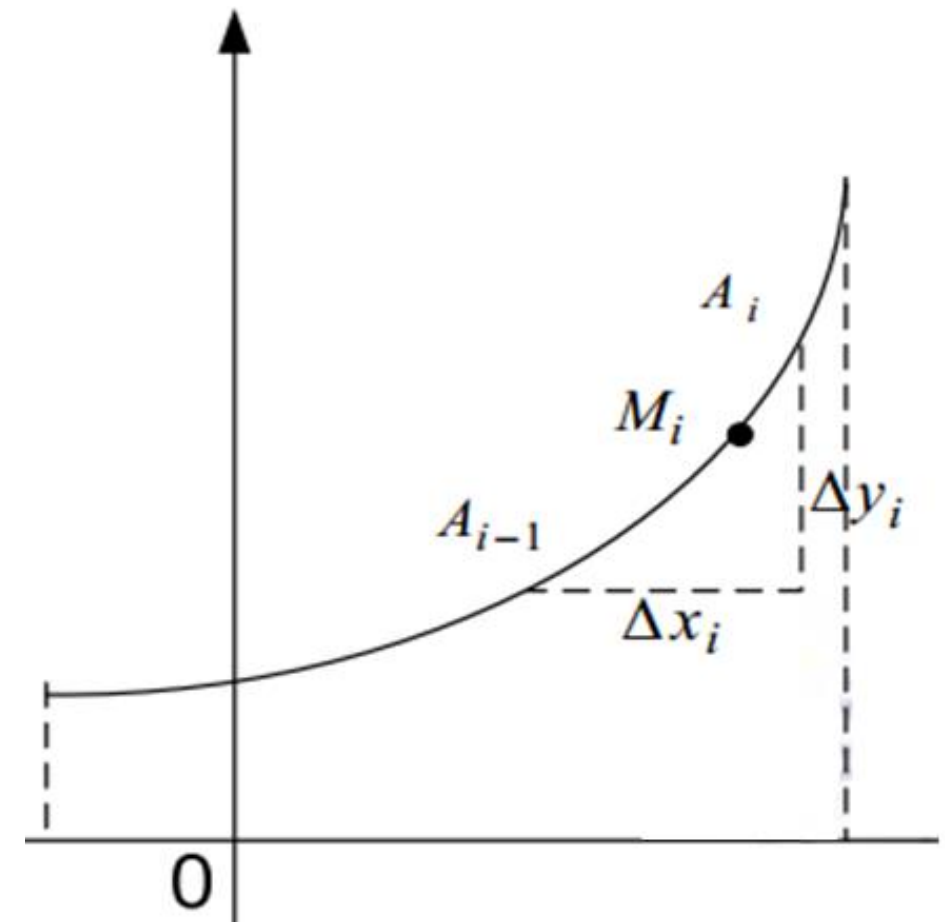
Cách tính

$f = f(x, y)$ xác định trên đường cong C có phương trình: $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$.

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm A_0, A_1, \dots, A_n .

Độ dài tương ứng L_1, L_2, \dots, L_n .

$$\begin{aligned}L_i &\approx |A_{i-1}A_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\end{aligned}$$



1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Theo công thức Lagrange (Định lý giá trị trung bình) đối với $y(x)$ trong đoạn $[x_{i-1}, x_i]$, ta tìm được một giá trị $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho:

$$y(x_i) - y(x_{i-1}) = y'(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \Delta y_i = y'(x_i^*) \cdot \Delta x_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_i &\approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [y'(x_i^*) \cdot \Delta x_i]^2} \\ &= \sqrt{1 + [y'(x_i^*)]^2} \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + [y'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x_i \quad (\text{do } \Delta x_i > 0) \end{aligned}$$

1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Sau khi thực hiện phép chia đường cong C , khi đó:

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy một điểm $M_i(x_i^*, y(x_i^*))$.

$$\begin{aligned} \text{Lập tổng Riemann: } I_n &= \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot L_i \\ &\approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y(x_i^*)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \Rightarrow I = \int_C f(x, y) dl = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y(x_i^*)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x_i \right] \\ &= \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx \end{aligned}$$

1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Cung C cho bởi phương trình: $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$

$$\int_C f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx$$

Tương tự, cung C cho bởi phương trình: $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$

$$\int_C f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \cdot \sqrt{1 + [x'(y)]^2} \cdot dy$$

1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Cung C cho bởi phương trình tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$

Khi đó:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}; dx = x'(t)dt; \sqrt{1 + [y'(x)]^2} = \frac{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}{x'(t)}$$

$$\int_C f(x, y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \cdot dt$$

1. Tích phân đường loại 1

Cách tính

Cung C cho trong hệ tọa độ cực: $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$

Khi đó, phương trình tham số của cung C : $x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$

$$\Rightarrow [x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2 = r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2$$

$$\int_C f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f[r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi] \cdot \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2} \cdot d\varphi$$

1. Tích phân đường loại 1

Định nghĩa

Tương tự , ta có định nghĩa tích phân đường trong không gian.

$f = f(x, y, z)$ xác định trên đường cong C trong không gian.

C cho bởi phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$I = \int_C f(x, y, z) dl$$

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \cdot dt$$

1. Tích phân đường loại 1

Ví dụ

Tính $I = \int_C x^3 dl$, trong đó C là cung parabol $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$

$$I = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{58}{15}$$

1. Tích phân đường loại 1

Ví dụ

Tính $I = \int_C 2xdl$, trong đó $C = C_1 \cup C_2$, với $C_1: y = x^2$, từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ và C_2 là đường thẳng từ $(1,1)$ đến $(1,2)$.

$$\begin{aligned} I &= \int_C 2xdl = \int_{C_1} 2xdl + \int_{C_2} 2xdl = \int_0^1 2x \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx + \\ &\quad + \int_1^2 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1 + [x'(y)]^2} \cdot dy \\ &= \int_0^1 2x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} \cdot dx + \int_1^2 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1 + (0)^2} \cdot dy = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2 \end{aligned}$$

Tính $I = \int_C (2 + x^2 y) dl$, với C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

Có thể dùng công thức $I = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \cdot dx$

nhưng việc tính toán phức tạp.

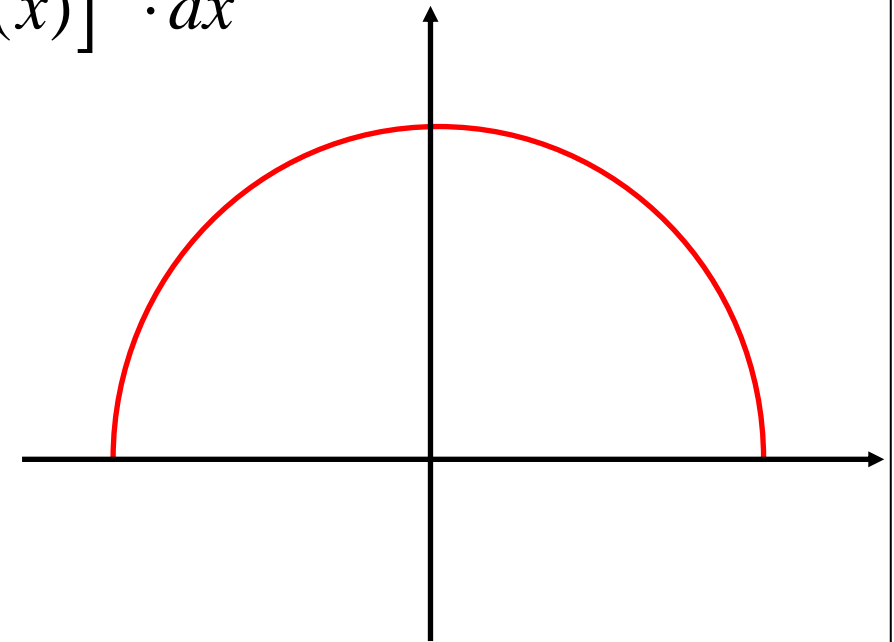
Viết phương trình tham số cung C .

Đặt: $x = r \cos t$; $y = r \sin t$

Vì $x^2 + y^2 = 1$, nên $r = 1$.

Phương trình tham số của nửa trên đường tròn: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \pi$

$$I = \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \cdot \sin t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \cdot \sin t) dt = 2\pi + \frac{2}{3}$$



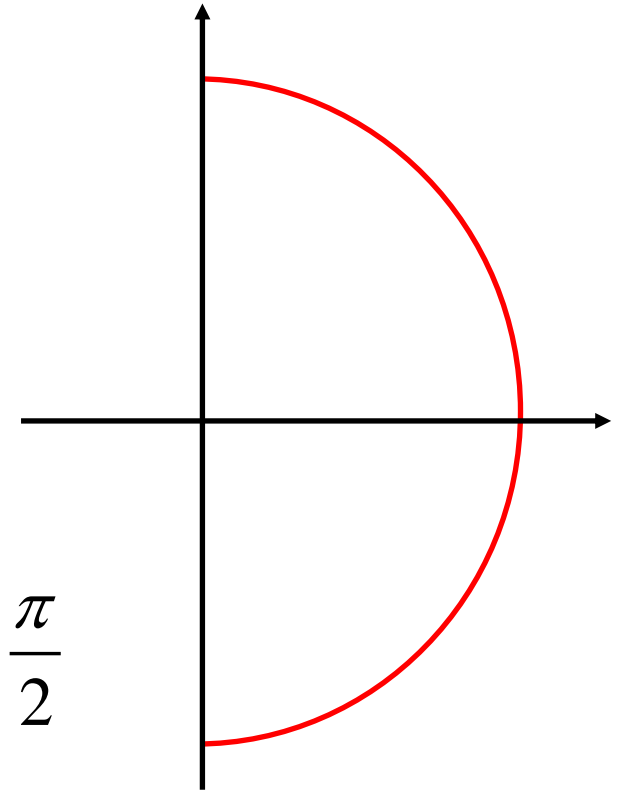
Tính $I = \int_C xy^4 dl$, với C là nửa bên phải đường tròn $x^2 + y^2 = 16; x \geq 0$.

Viết phương trình tham số cung C .

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

Vì $x^2 + y^2 = 16$, nên $r = 4$

$$\text{Phương trình tham số của } C: \begin{cases} x = 4 \cdot \cos t \\ y = 4 \cdot \sin t \end{cases} ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$



$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos t \cdot 4^4 \sin^4 t \sqrt{(-4 \sin t)^2 + (4 \cos t)^2} dt = 4^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \sin^4 t dt = \frac{2}{5} \cdot 4^6$$

Tính $I = \int_C (x^2 + y^2) dl$, với C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x; x \geq 1$.

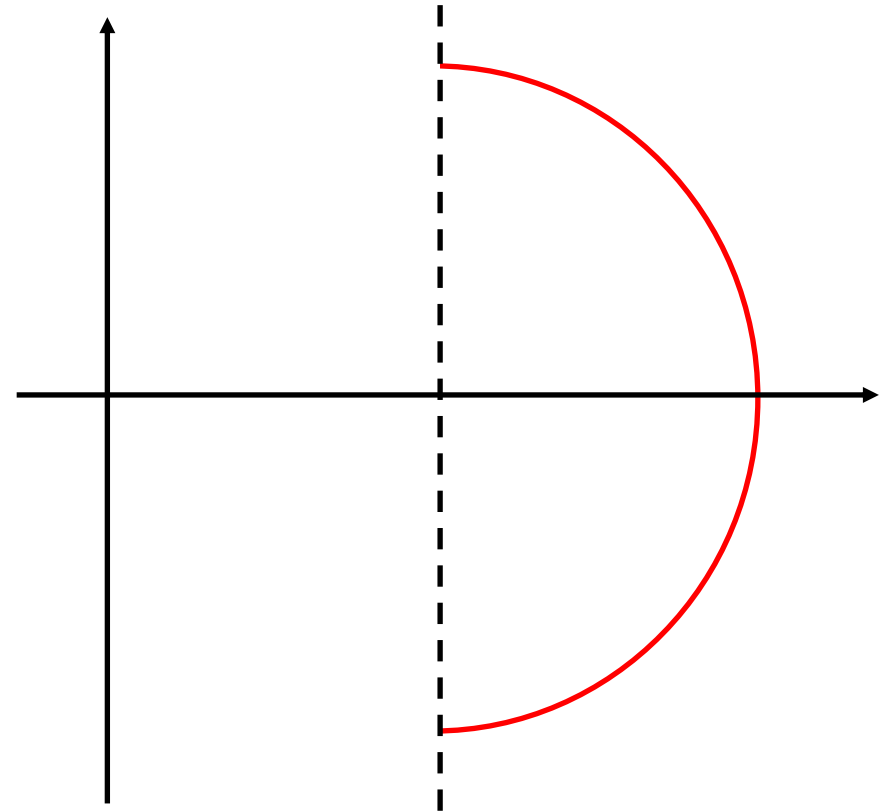
Viết phương trình tham số của C .

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

Vì $x^2 + y^2 = 2x$, nên $r = 2 \cos t$

Phương trình tham số của C :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \cdot \cos t = 1 + \cos 2t \\ y = 2 \cos t \cdot \sin t = \sin 2t \end{cases} ; -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$



$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2 + 2 \cos 2t) \sqrt{(-2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t)^2} dt = 4 + 2\pi$$

Tính $I = \int_C 2x dl$, với C là giao của 2 mặt: $x^2 + y^2 = 4$; $x + z = 4$.

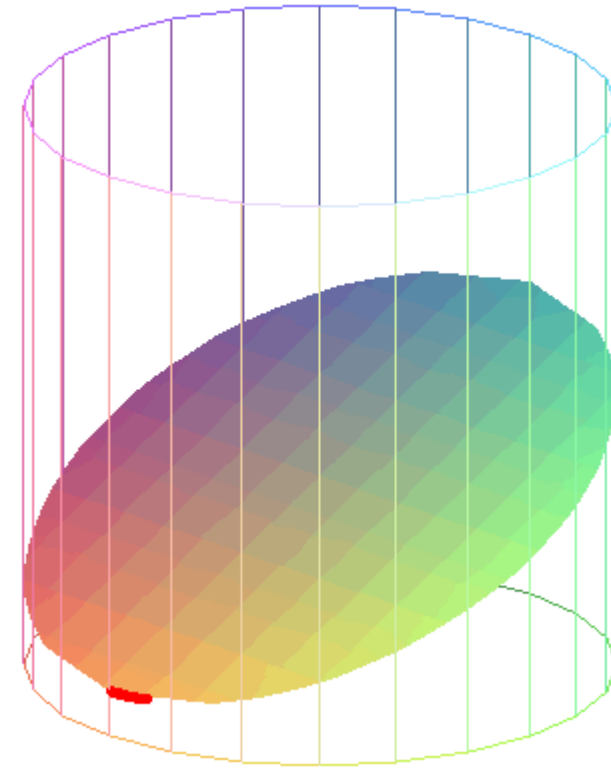
$$\text{Đặt: } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = 4 - r \cos t \end{cases}$$

Vì $x^2 + y^2 = 4$, nên $r = 2$

Phương trình tham số của C :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 4 - 2 \cos t \end{cases} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} 4 \cos t \cdot \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} dt = 0.$$



Tính $I = \int_C (x + y) dl$, với C là đường tròn: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $y = x$.

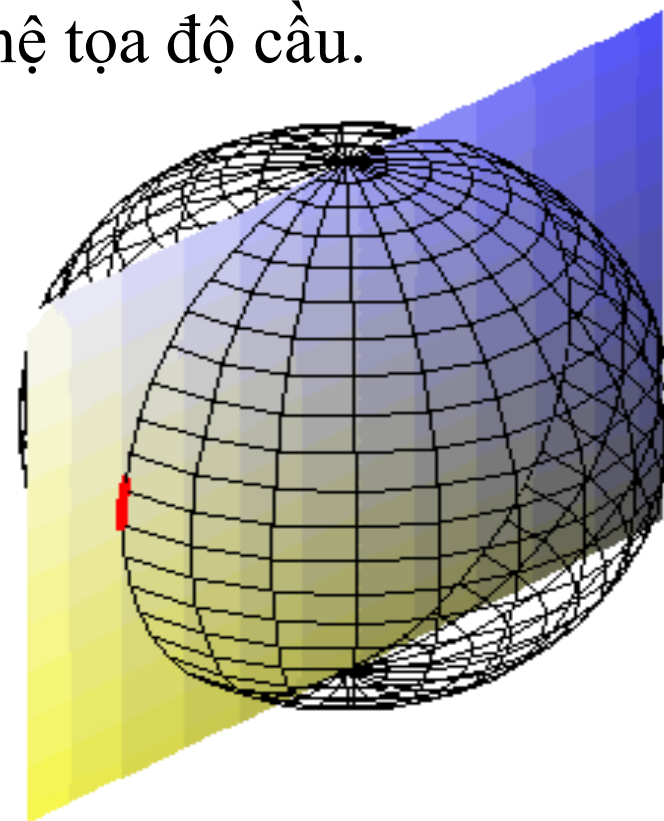
Đường tròn $C = C_1 \cup C_2$. Trong đó, C_1 là nửa đường tròn nằm ở phần nửa mặt cầu bên phải. Tham số đường cong C_1 qua hệ tọa độ cầu.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = y = r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin t \\ z = r \cdot \cos t \end{cases}$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, nên $r = 2$

Phương trình tham số của C_1 :

$$\begin{cases} x = y = \sqrt{2} \sin t \\ z = 2 \cos t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \pi$$



$$I_1 = \int_0^{\pi} 2\sqrt{2} \sin t \cdot \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t + 4(-\sin t)^2} dt = 8\sqrt{2}$$

Tính $I = \int_C (x + y)dl$, với C là đường tròn: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $y = x$.

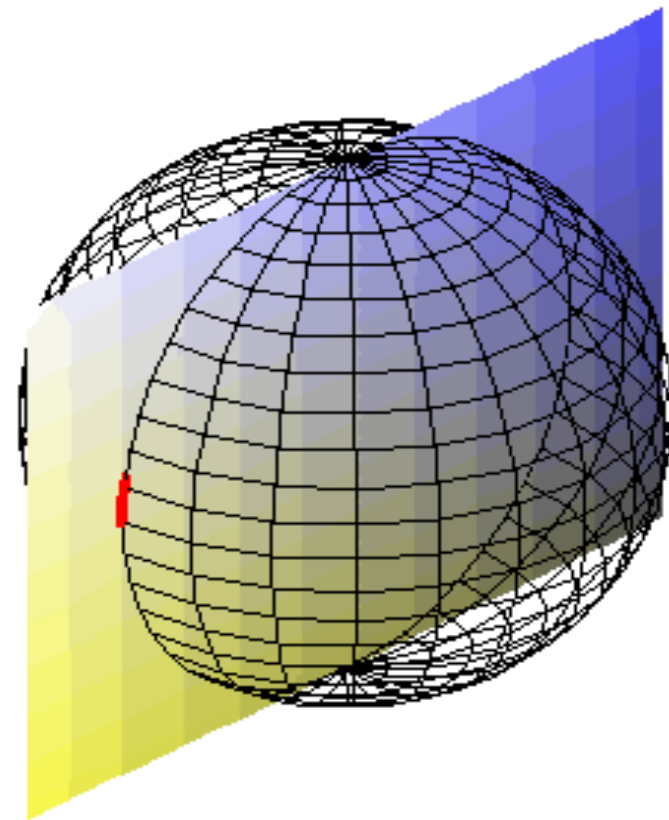
C_2 là nửa đường tròn nằm ở phần nửa mặt cầu bên trái. Tham số đường cong C_2 qua hệ tọa độ cầu.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = y = r \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \sin t \\ z = r \cdot \cos t \end{cases}$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, nên $r = 2$

Phương trình tham số của C_2 :

$$\begin{cases} x = y = -\sqrt{2} \sin t \\ z = 2 \cos t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \pi$$



$$I_2 = -\int_0^{\pi} 2\sqrt{2} \sin t \cdot \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t + 4(-\sin t)^2} dt = -8\sqrt{2} \Rightarrow I = I_1 + I_2 = 0$$

Tính $I = \int_C x^2 dl$, với C là đường tròn: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x + y + z = 0$.

Viết phương trình tham số đường tròn C (qua hệ tọa độ trụ) **phức tạp**.

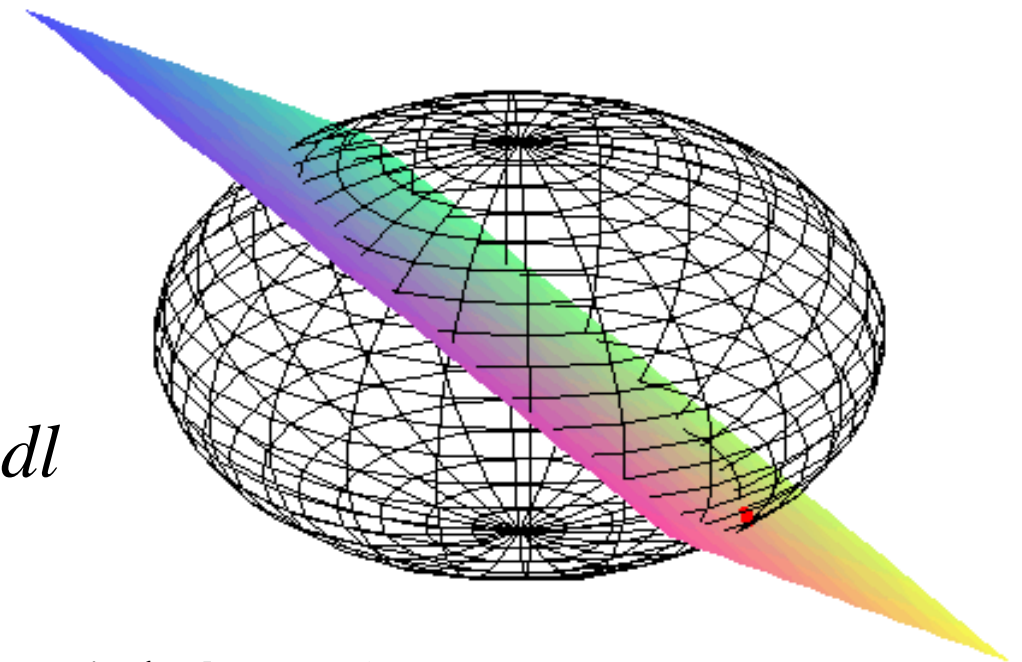
Nhận xét: do đường tròn C đối xứng qua gốc O, hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên:

$$I = \int_C x^2 dl = \int_C y^2 dl = \int_C z^2 dl$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) dl = \frac{4}{3} \int_C dl$$

$$= \frac{4}{3} \times \text{độ dài đường tròn C (chu vi đường tròn } R=2 \text{)}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 4\pi = \frac{16\pi}{3}$$



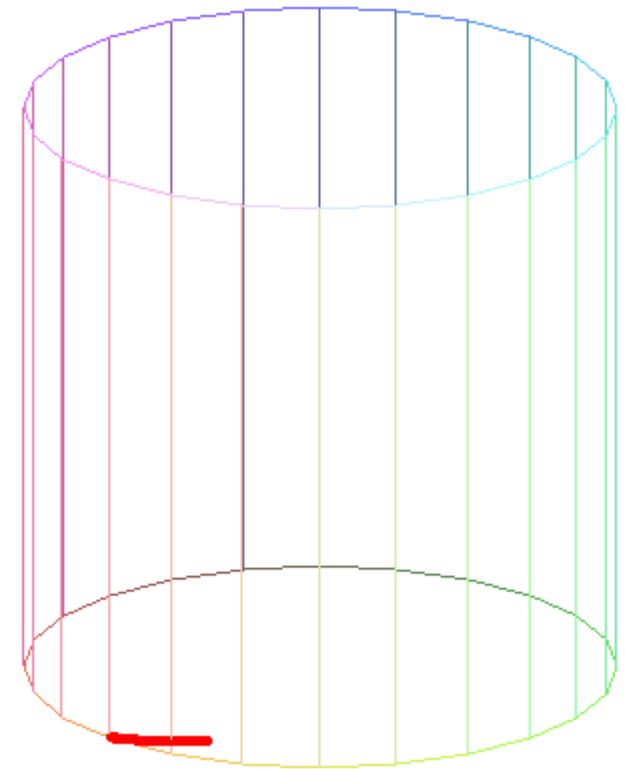
Tính $I = \int_C (x + z)dl$, với C là đường $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = t, 0 \leq t \leq 4\pi$.

Ta có phương trình mặt trụ: $x^2 + y^2 = 9$.

Với $0 \leq t \leq 4\pi$ thì đường cong C là đường cong nằm trên mặt trụ.

$$I = \int_0^{4\pi} (3\cos t + t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$I = \int_0^{4\pi} (3\cos t + t)\sqrt{10}dt = 8\pi^2\sqrt{10}$$



2. Tích phân đường loại 2

Bài toán

Tính công của lực biến đổi trên đường cong:

Cho một chất điểm M di chuyển dọc theo một cung phẳng \widehat{AB} từ điểm A đến điểm B dưới tác dụng của lực:

$$\vec{F}(M) = P(M).\vec{i} + Q(M).\vec{j}, M \in \widehat{AB}.$$

Hãy tính công W của lực đó sinh ra.

2. Tích phân đường loại 2

Bài toán

Chia cung \widehat{AB} một cách tùy ý ra n đường cung nhỏ bởi các điểm chia:

$$A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n).$$

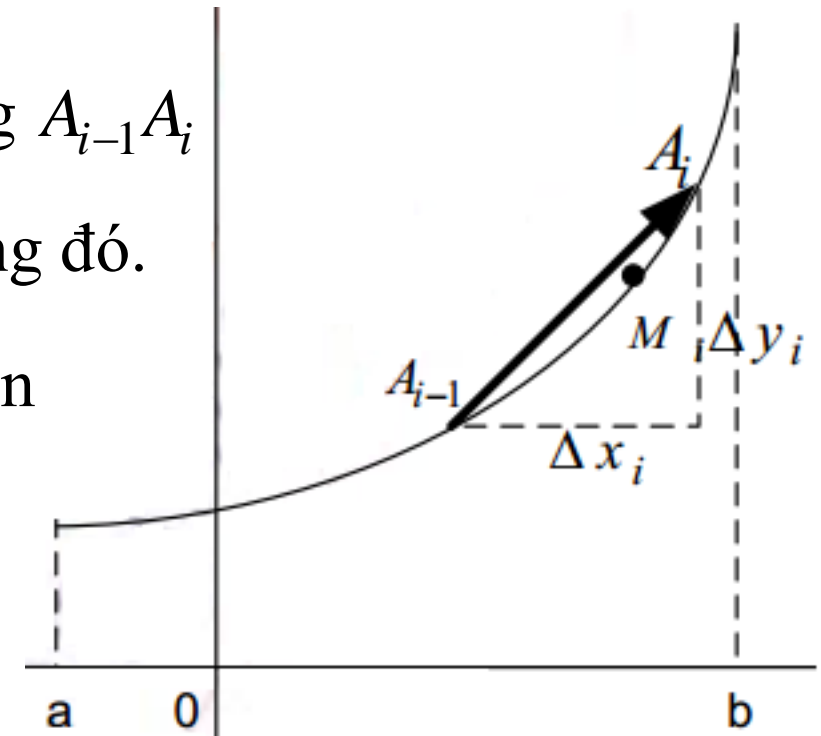
Khi đó: $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j}$

Lấy $M_i(x_i, y_i) \in A_{i-1}A_i$.

Cung $A_{i-1}A_i$ nhỏ, nên có thể coi nó xấp xỉ dây cung $A_{i-1}A_i$ và $\vec{F}(M_i)$ không đổi (về chiều và độ lớn) trên cung đó.

Do đó, công của lực sinh ra khi chất điểm di chuyển từ A_{i-1} đến A_i theo cung $A_{i-1}A_i$ sẽ xấp xỉ là:

$$\vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(M_i) \cdot \Delta x_i + Q(M_i) \cdot \Delta y_i$$



2. Tích phân đường loại 2

Bài toán

Vậy công W của lực sinh ra sẽ xấp xỉ với:

$$W \approx \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i]$$

Do đó, giới hạn của tổng trên khi $n \rightarrow \infty$ chính là công của lực:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i]$$

2. Tích phân đường loại 2

Định nghĩa

$P = P(x, y), Q = Q(x, y)$ xác định trên đường cong C có hướng.

Chia C một cách tùy ý ra n đường cong nhỏ bởi các điểm:

$$A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n).$$

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i)$; $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j}$

Lập tổng Riemann:
$$I_n = \sum_{i=1}^n [P(M_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + Q(M_i) \cdot (y_i - y_{i-1})]$$

$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia C , và cách lấy điểm M_i

$$I = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

được gọi là **tích phân đường loại hai** của $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ trên cung C .

2. Tích phân đường loại 2

Tính chất

1) Tích phân đường loại hai **phụ thuộc** chiều lấy tích phân trên C :

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy$$

2) Nếu C được chia làm hai cung C_1 và C_2 rời nhau:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

Cách tính tích phân đường loại hai:

1) C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t = a$ ứng với điểm đầu, $t = b$: điểm cuối cùng.

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_C P(x, y)dx + \int_C Q(x, y)dy$$

Chia $[a, b]$ thành n đoạn: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) \stackrel{\text{định lý Lagrange}}{=} x'(t_i^*) \cdot \Delta t_i$$

Chọn điểm trung gian $M_i(x(t_i^*), y(t_i^*))$, khi đó:

$$\int_C P(x, y)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n P(x(t_i^*), y(t_i^*)) \cdot \Delta x_i$$

$$\int_C P(x, y)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(x(t_i^*), y(t_i^*)) \cdot x'(t_i^*) \cdot \Delta t_i = \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \cdot dt$$

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right] dt$$

2. Tích phân đường loại 2

Cách tính

Các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ liên tục trên tập mở D chứa cung tròn C .

2) $C: y = y(x)$, $x = x_1$ là hoành độ điểm đầu, $x = x_2$: điểm cuối cung.

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_1}^{x_2} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)] dx$$

3) $C: x = x(y)$, $y = y_1$ là tung độ điểm đầu, $y = y_2$: điểm cuối cung.

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_1}^{y_2} [P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y)] dy$$

2. Tích phân đường loại 2

Tích phân đường loại 2 trong không gian

Các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ và $R(x,y,z)$ liên tục trên tập mở D chứa cung tron AB.

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i]$$

Cung AB có phương trình tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; $a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz &= \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)dt + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t)dt + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)dt] \\ &= \int_a^b [P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) + R \cdot z'(t)] dt \end{aligned}$$

2. Tích phân đường loại 2

Tích phân đường loại 2 trong không gian

Giả sử: $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$

là một trường vector xác định trên cung AB .

Nếu cung AB được cho bởi phương trình vector:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Tích phân đường của \mathbf{F} trên cung AB là (công của lực \mathbf{F} sinh ra khi di chuyển một vật trên đường cong AB):

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

2. Tích phân đường loại 2

Ví dụ

Tính $I = \int_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác OAB với $O(0,0)$; $A(1,1)$; $B(0,2)$, ngược chiều kim đồng hồ.

$$I = \int_C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$$

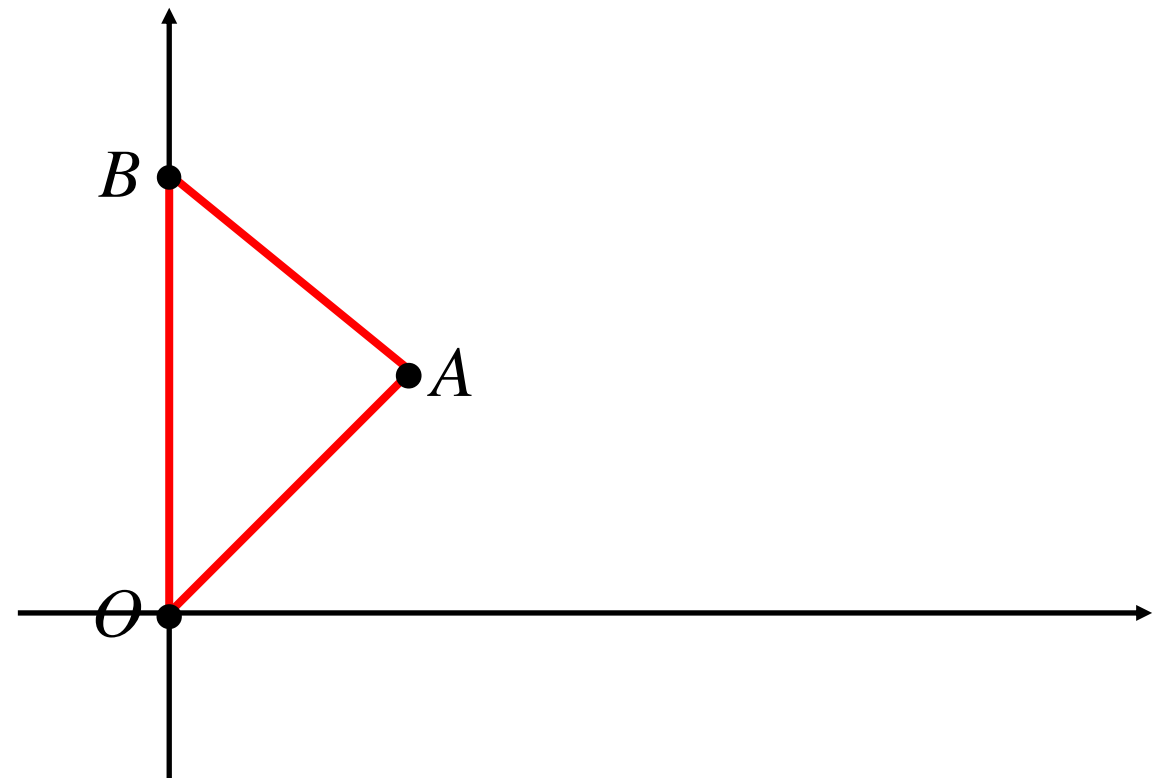
Phương trình OA : $y = x$

Hoành độ điểm đầu: $x = 0$

Hoành độ điểm cuối: $x = 1$

$$I_1 = \int_{OA} = \int_0^1 (x^2 + 3x)dx + 2x dx$$

$$I_1 = \int_{OA} = \int_0^1 (x^2 + 5x)dx = \frac{17}{6}$$

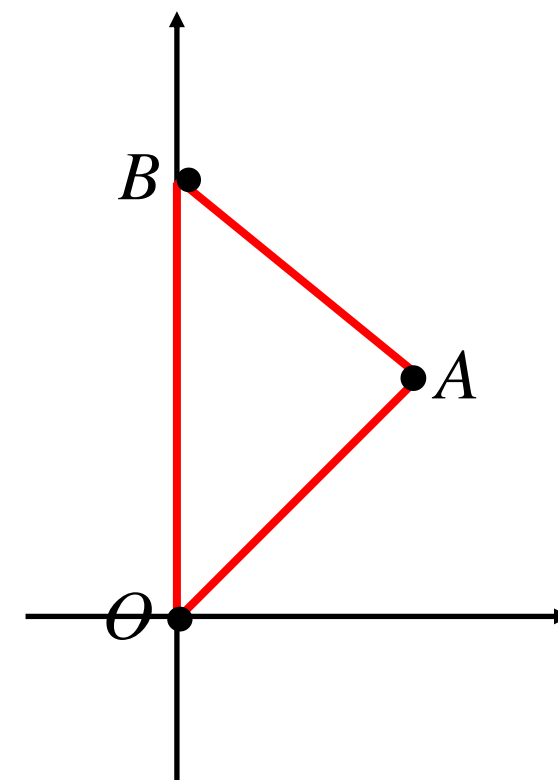


Phương trình AB: $y = 2 - x$

Hoành độ điểm đầu: $x = 1$

Hoành độ điểm cuối: $x = 0$

$$I_2 = \int_{AB} = \int_1^0 (x^2 + 3(2 - x)) dx + 2 \cdot (2 - x) \cdot (-1) dx = -\frac{11}{6}$$



Phương trình BO: $x = 0$ Tung độ điểm đầu: $y = 2$

Tung độ điểm cuối: $y = 0$ $I_3 = \int_{BO} = \int_2^0 (0^2 + 3y) \cdot 0 \cdot dy + 2 \cdot y \cdot dy = -4$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{17}{6} - \frac{11}{6} - 4 = -3$$

Tính $I = \int_C ydx + xdy$, trong đó C là cung $x^2 + y^2 = 2x$, từ $O(0,0)$ đến $A(1,1)$, chiều kim đồng hồ.

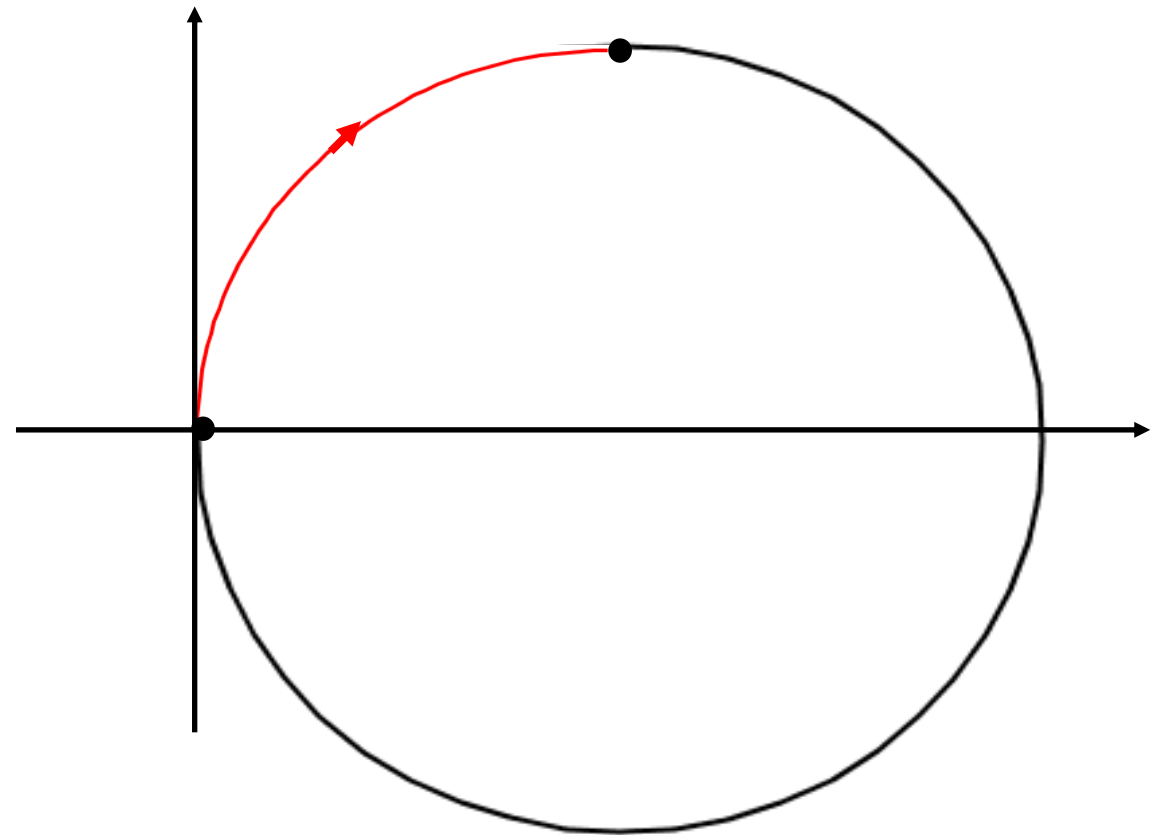
Sử dụng tọa độ cực $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r = 2 \cos t$$

Phương trình tham số số cung C :

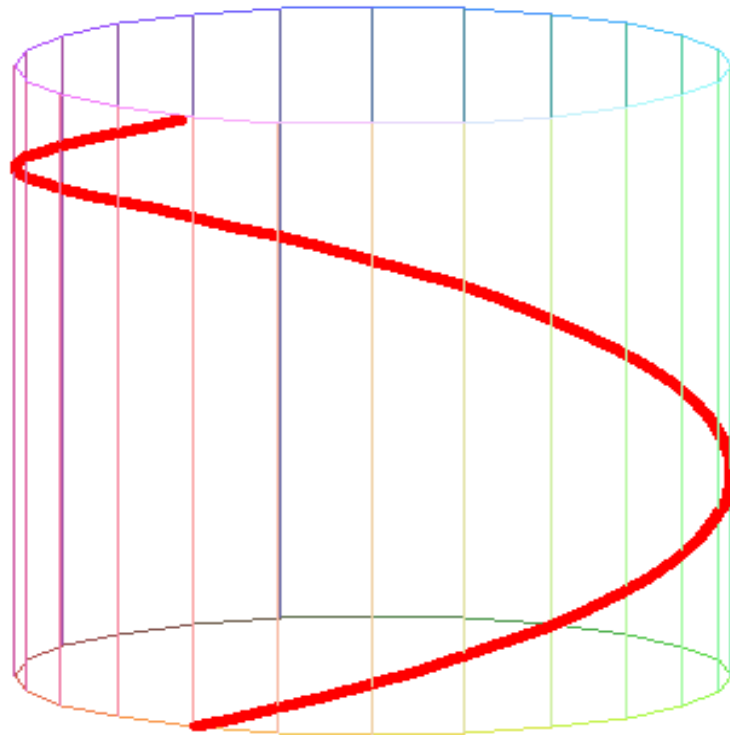
$$\begin{cases} x = 2 \cos t \cdot \cos t = 1 + \cos 2t \\ y = 2 \cos t \cdot \sin t = \sin 2t \\ t_1 = \frac{\pi}{2}; t_2 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi/4} [\sin 2t \cdot (-2 \sin 2t) + (1 + \cos 2t) \cdot (2 \cos 2t)] dt = 1$$



Tính $I = \int_C ydx + zdy + xdz$ với C là đường cong có phương trình tham số:

$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ theo hướng tăng dần của biến t .



$$I = \int_0^{2\pi} a \sin t \cdot (-a \sin t dt) + bt \cdot (a \cos t dt) + a \cos t \cdot (b dt)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-a^2 \sin^2 t + abt \cos t + ab \cos t \right) dt = -\pi a^2$$

$I = \int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ với C là giao của mặt: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,
 $y = x \cdot \tan \alpha; 0 < \alpha < \pi$, ngược chiều kim đồng hồ nhìn theo hướng trục Ox.

Từ phương trình của đường cong C, ta có:

$$x^2 + x^2 \tan^2 \alpha + z^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4 \cos^2 \alpha} + \frac{z^2}{4} = 1$$

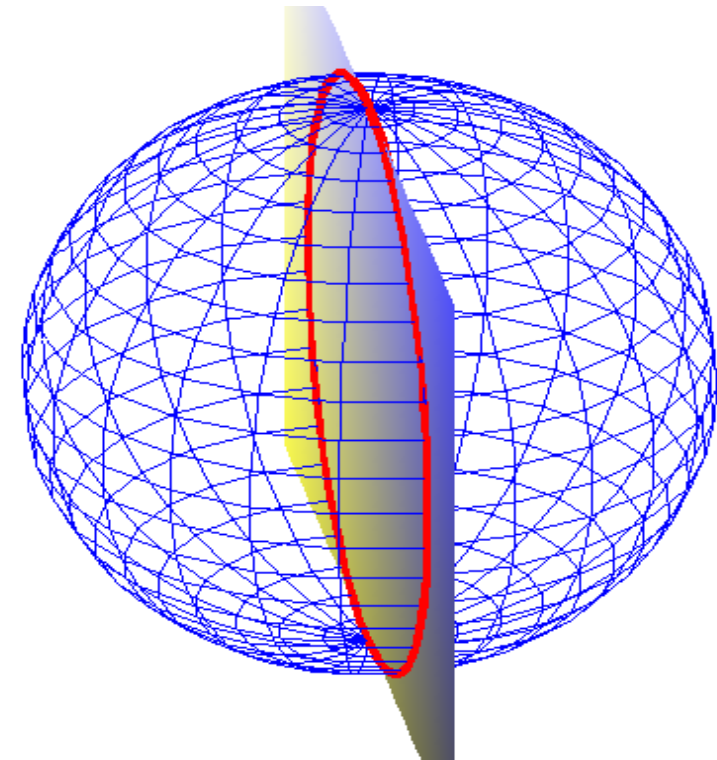
Tham số đường cong C qua hệ tọa độ trụ:

$$x = 2 \cos \alpha \cdot \cos t ; y = 2 \sin \alpha \cdot \cos t ; z = 2 \sin t$$

$$(0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left[(2 \sin \alpha \cos t - 2 \sin t)(-2 \cos \alpha \sin t) + (2 \sin t - 2 \cos \alpha \cos t)(-2 \sin \alpha \sin t) \right] dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left[(2 \cos \alpha \cdot \cos t - 2 \sin \alpha \cdot \cos t) \cdot (2 \cos t) \right] dt = 8\sqrt{2}\pi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$



2. Tích phân đường loại 2

Công thức Green

C là biên của miền D.

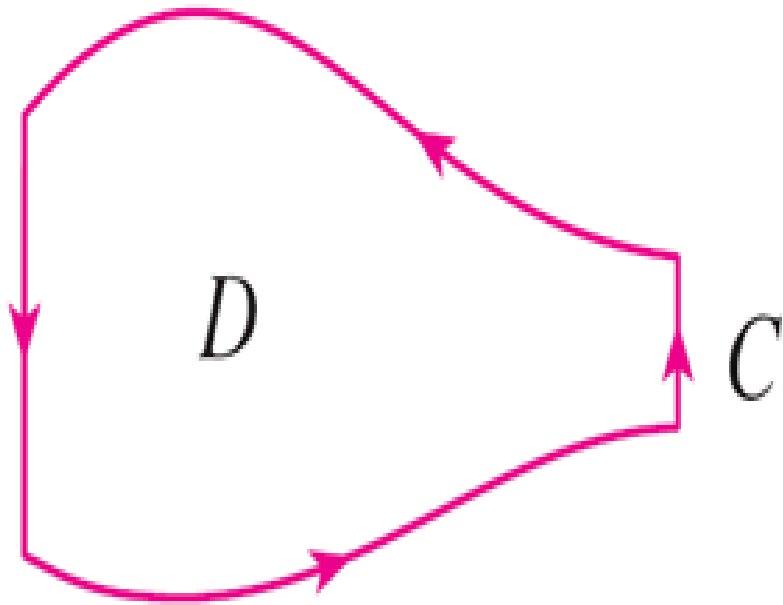
Chiều dương qui ước trên C là chiều mà đi theo chiều này ta thấy miền D ở phía bên tay trái.

Miền D được gọi là **miền đơn liên** nếu nó bị giới hạn bởi một đường cong kín. Ngược lại D được gọi là **miền đa liên** nếu nó bị giới hạn bởi nhiều đường cong kín.

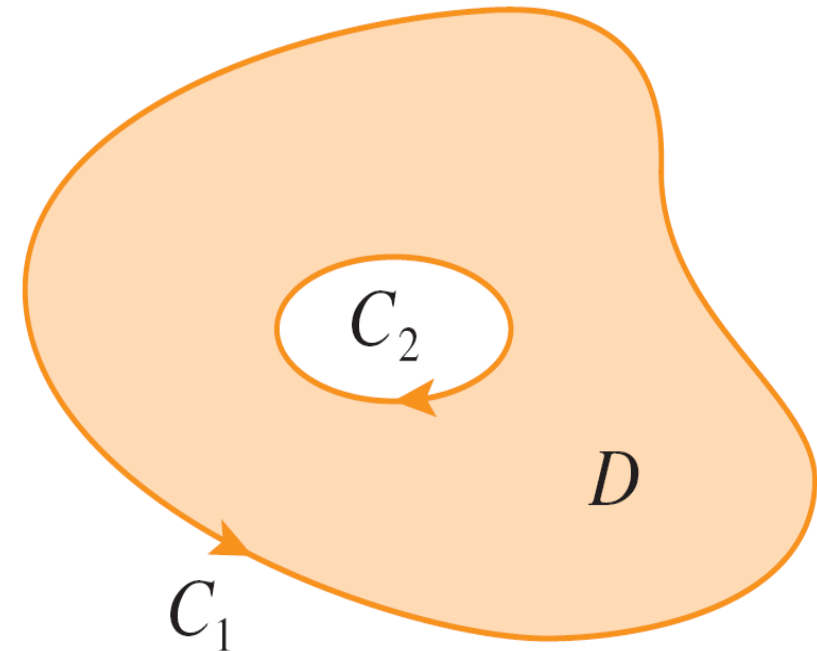
Trong đa số trường hợp, chiều dương qui ước là ngược chiều kim đồng hồ. Trong trường hợp tổng quát điều này không đúng.

2. Tích phân đường loại 2

Công thức Green



Miền đơn liên



Miền đa liên

2. Tích phân đường loại 2

Công thức Green

D là miền (đơn liên hoặc đa liên) đóng, giới nội trong mặt phẳng Oxy với biên C (kín) liên tục, trơn từng khúc.

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D .

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Dấu $+$ nếu chiều lấy tích phân trùng **chiều dương qui ước** (đi theo chiều lấy tích phân, miền D nằm ở bên tay trái)

Điều kiện để sử dụng công thức Green:

1) C là cung **kín**.

2) $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D có biên C .

Tính $I = \oint_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác OAB
 với $O(0,0)$; $A(1,1)$; $B(0,2)$, ngược chiều kim đồng hồ.

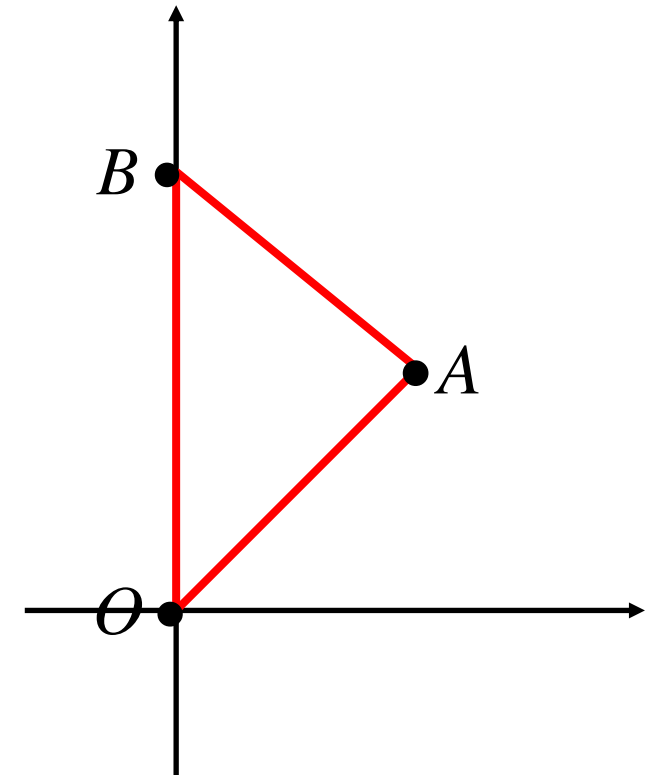
Cung C kín.

$$P(x, y) = x^2 + 3y ; Q(x, y) = 2y$$

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1
 liên tục trên miền D có biên C .

$$I = \oint_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy = + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= \iint_D (0 - 3) dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (-3) dy = -3$$



Tính $I = \int_C (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, trong đó C nửa trên đường tròn:
 $x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.

Cung C **không** kín.

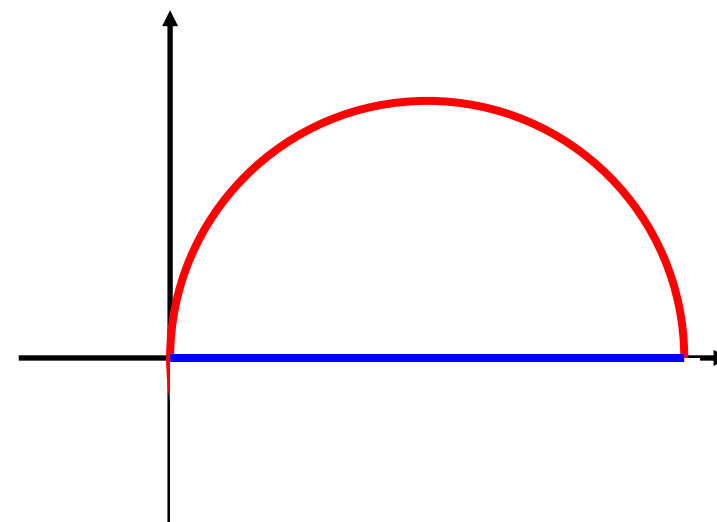
$$I = \int_C = \oint_{C \cup AO} - \int_{AO} = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \oint_{C \cup AO} = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= - \iint_D (2(x + y) + 2(x - y)) dx dy = - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} 4r \cos \varphi \cdot r \cdot dr = -2\pi$$

$$I_2 = \int_2^0 (x - 0)^2 dx + (x + 0)^2 0 dx = -\frac{8}{3} \quad I = I_1 - I_2 = -2\pi + \frac{8}{3}$$

Có thể giải bằng cách viết phương trình tham số cung C.



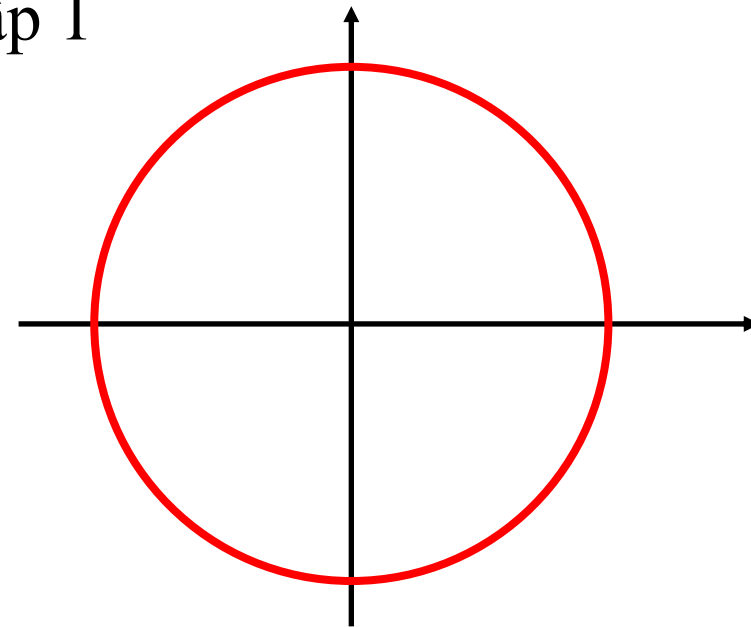
Tính $I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, trong đó C đường tròn:
 $x^2 + y^2 = 4$ ngược chiều kim đồng hồ.

Cách 1: Cung C kín, nhưng P, Q và các ĐHR cấp 1 không liên tục trên D , không sử dụng công thức Green được !!!

Viết phương trình tham số cung C :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad t_1 = 0; t_2 = 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(2 \cos t + 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t) dt - (2 \cos t - 2 \sin t) \cdot 2 \cos t dt}{4} = -2\pi$$



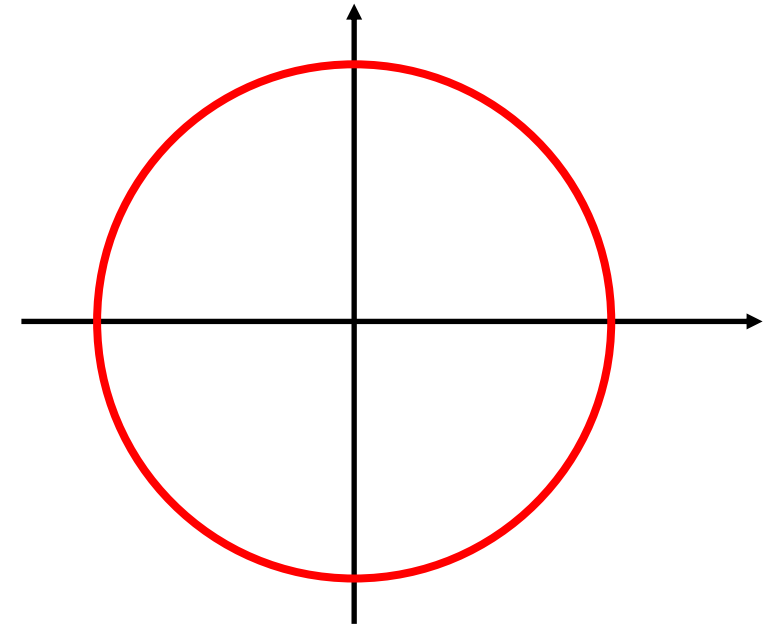
Cách 2: Tích phân trên đường tròn: $x^2 + y^2 = 4$, nên thay vào mẫu số ta có:

$$I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{4}$$

Có thể sử dụng công thức Green trong trường hợp này.

$$I = \frac{1}{4} \oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$$

$$= \frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (-1-1)dxdy = -\frac{2}{4} \cdot S_D = -2\pi$$



2. Tích phân đường loại 2

Ví dụ

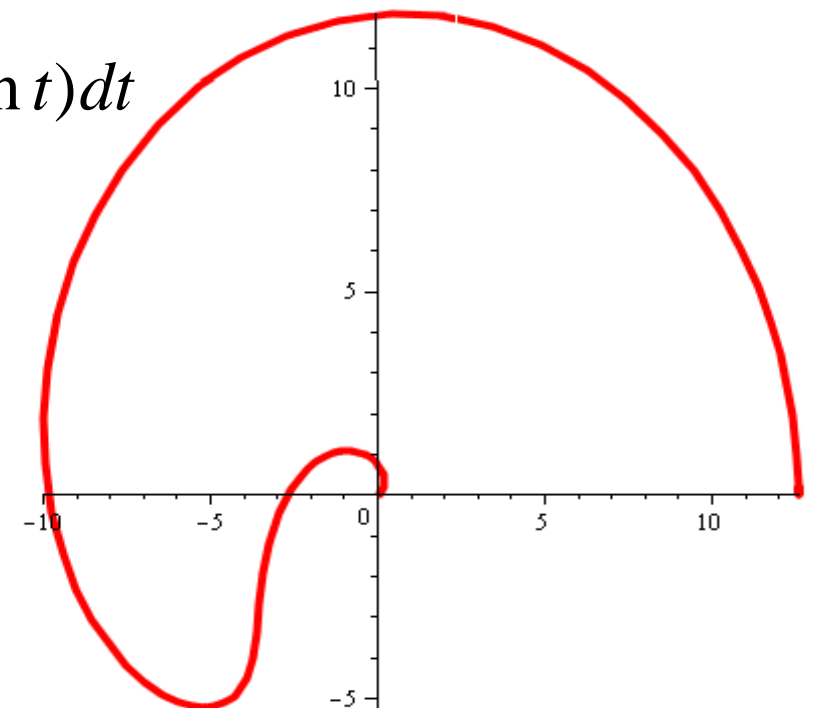
Tính $I = \int_C (4 - y)dx + xdy$, trong đó C là cung Cicloid:

$$x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{cùng chiều kim đồng hồ}).$$

Cung C **không** kín.

$$I = \int_0^{2\pi} [4 - 2(1 - \cos t)] \cdot 2(1 - \cos t)dt + 2(t - \sin t)(2 \sin t)dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} 4t \sin t dt = -8\pi$$



2. Tích phân đường loại 2

Ví dụ

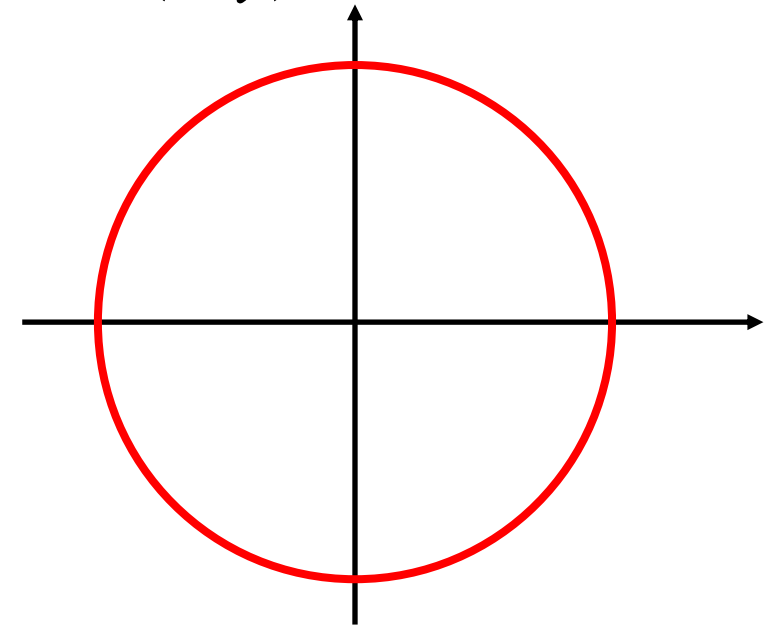
Tính $I = \oint_C e^{-x^2+y^2} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$, trong đó C là đường tròn:
 $x^2 + y^2 = 4$, ngược chiều kim đồng hồ.

$$P(x, y) = e^{-x^2+y^2} \cos(2xy) ; \quad Q(x, y) = e^{-x^2+y^2} \sin(2xy)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{-x^2+y^2} [y \cos(2xy) - x \sin(2xy)]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{-x^2+y^2} [y \cos(2xy) - x \sin(2xy)]$$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$



Tính $I = \oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, trong đó C là đường cong kín tùy ý, không đi qua gốc O , ngược chiều kim đồng hồ.

Trường hợp 1: C không bao quanh gốc O .

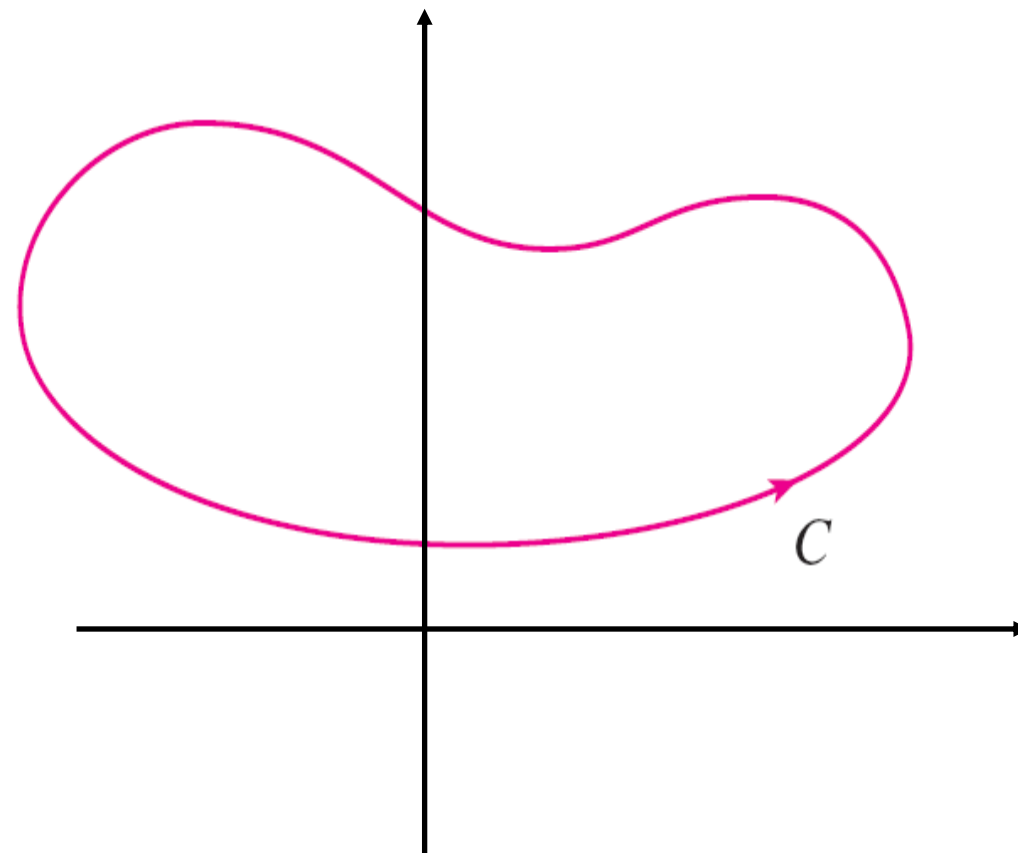
Sử dụng công thức Green.

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

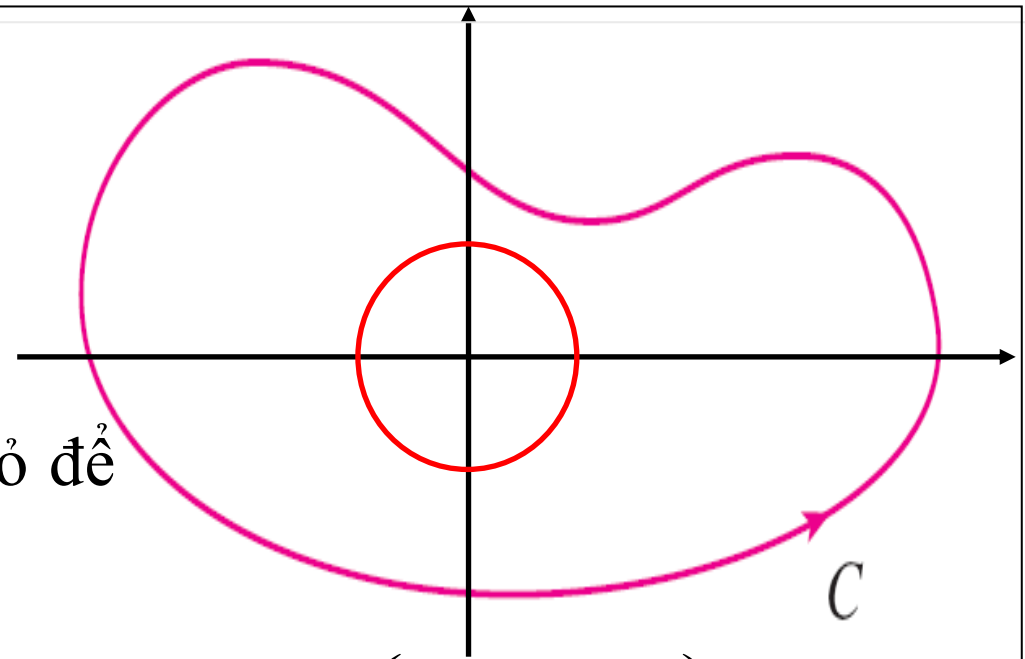


$$\Rightarrow I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Trường hợp 2: C bao quanh gốc 0.

Không sử dụng công thức Green được vì P, Q và các ĐHR cấp 1 không liên tục trên miền D , có biên là C .

Kẻ thêm đường tròn C_1 có bán kính a đủ nhỏ để C_1 nằm lọt trong C , **chọn chiều kim đồng hồ**.



$$I = \oint_C = \oint_{C \cup C_1} - \oint_{C_1} = I_1 - I_2 \qquad I_1 = \oint_{C \cup C_1} \stackrel{\text{Green}}{=} + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Tính tích phân I_2 trên cung tròn: $x^2 + y^2 = a^2$

Phương trình tham số của cung C_1 : $x = a \cos t, y = a \sin t, t_1 = 2\pi, t_2 = 0$

$$I_2 = \int_{2\pi}^0 \frac{a \cos t \cdot a \cos t \cdot dt + a \sin t \cdot a \sin t \cdot dt}{a^2} = -2\pi \quad \Rightarrow \quad I = I_1 - I_2 = 2\pi$$

2. Tích phân đường loại 2

Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân

Định lý: (không phát biểu cho miền đa liên)

Giả sử tồn tại miền mở **đơn liên D** chứa cung AB, sao cho $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các ĐHR cấp 1 của chúng liên tục trong D. Các mệnh đề sau tương đương:

$$1. \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in D$$

2. Tích phân $I = \int_{AB} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường cong (trơn từng khúc) nối điểm A, B **nằm trong D**.

3. Tồn tại hàm $U(x,y)$ trên D là vi phân toàn phần của $Pdx + Qdy$, tức là:

$$dU(x,y) = Pdx + Qdy$$

4. Tích phân trên mọi đường cong kín C, trơn từng khúc **trong D** bằng 0:

$$I = \oint_C Pdx + Qdy = 0$$

2. Tích phân đường loại 2

Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân

Tích phân không phụ thuộc đường đi $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

$$I = \int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB} = I_1 + I_2$$

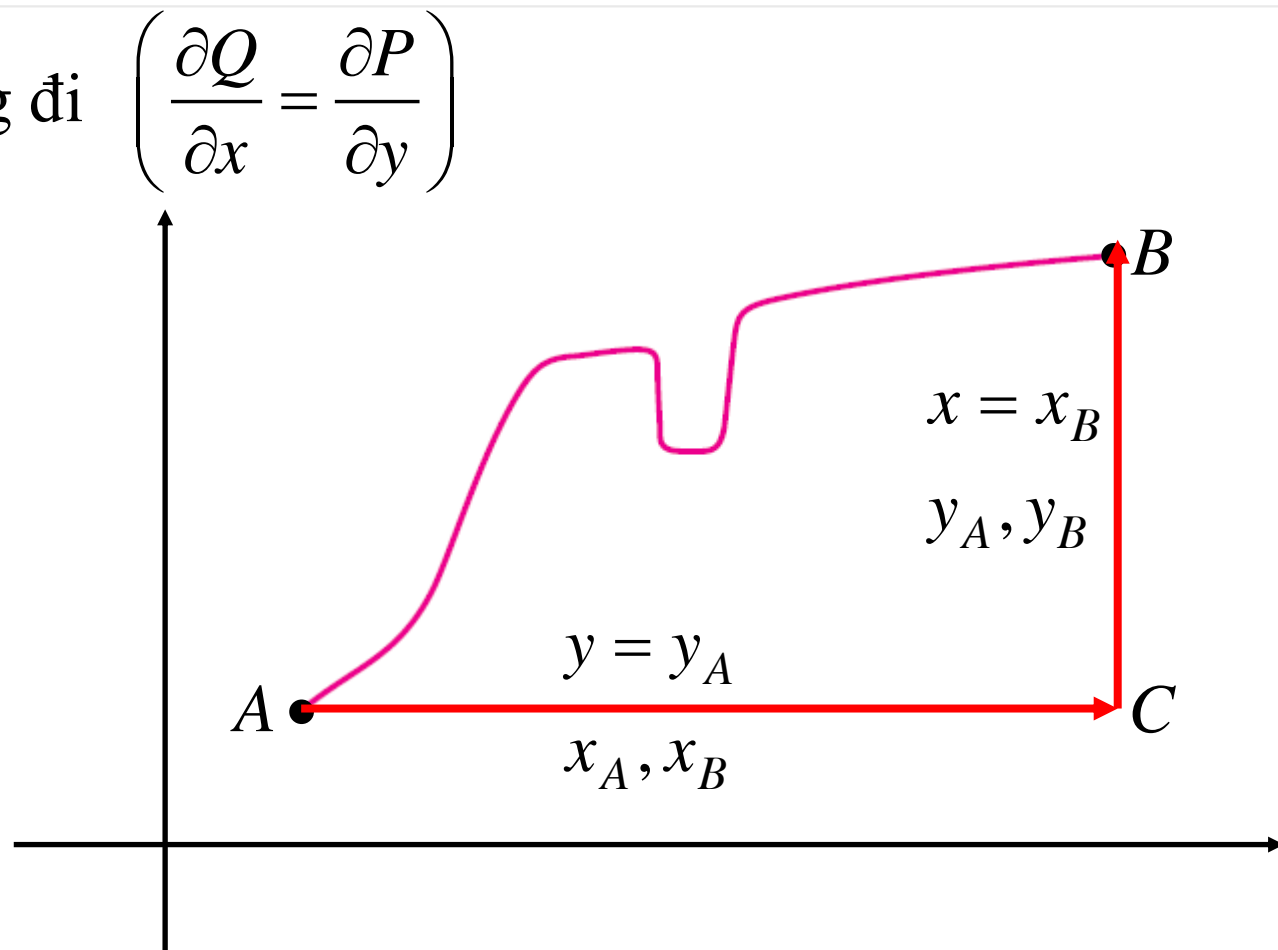
$$I_1 = \int_{AC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_A)dx + Q(x, y_A) \cdot 0dx$$

$$I_2 = \int_{CB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$= \int_{y_A}^{y_B} P(x_A, y) \cdot 0dy + Q(x_B, y)dy$$

$$\Rightarrow I = \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_A)dx + \int_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y)dy$$

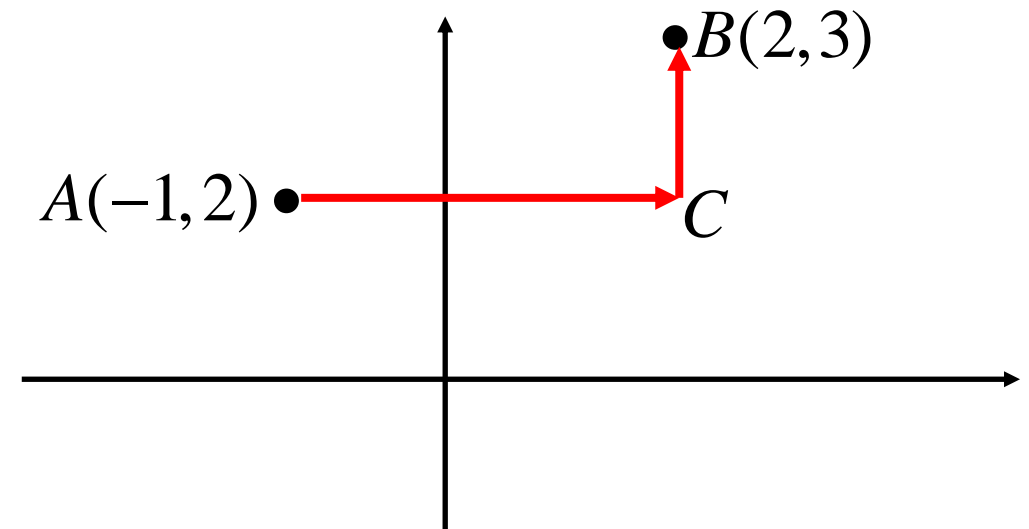


$$\text{Tính } I = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad \text{suy ra, tích phân không phụ thuộc đường đi.}$$

Cách 1:

$$I = \int_{AC} + \int_{CB} = \int_{-1}^2 2dx + \int_2^3 2dy = 8$$



Cách 2: Tồn tại hàm $U(x,y)$ là vi phân toàn phần của $Pdx + Qdy$

$$\begin{cases} U'_x = P(x,y) \\ U'_y = Q(x,y) \end{cases} \quad \text{tìm được hàm } U(x,y) = xy + C$$

$$I = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy = U(x,y) \Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = U(2,3) - U(-1,2) = 8$$

Tính $I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, với đường cong không bao quanh gốc tọa độ.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{suy ra, tích phân không phụ thuộc đường đi.}$$

Tồn tại hàm $U(x,y)$ là vi phân toàn phần của $Pdx + Qdy$

$$\begin{cases} U'_x = P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (1) & (1) \Rightarrow U(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y) \\ U'_y = Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (2) & U(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + g(y) \\ & & (2) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C \end{cases}$$

$$\rightarrow U(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C$$

$$I = U(x,y) \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = U(6,8) - U(1,0) = 9$$

Tính $I = \int_{AB} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ theo đường cong AB tùy ý từ A(1,0) đến B(2,0):

- a) Không bao quanh gốc tọa độ.
- b) Bao quanh gốc tọa độ.

a) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, tích phân I không phụ thuộc đường đi từ A đến B.

Nên ta tính tích phân theo trục hoành: $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2$

b) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, tích phân I không phụ thuộc đường đi từ A đến B.

Tuy nhiên I không thể tính như câu a (theo đường thẳng từ A đến B theo trục hoành), vì không tồn tại miền đơn liên D nào chứa đường thẳng AB và đường cong kín bao quanh gốc O để cho P, Q và các ĐHR cấp 1 liên tục trên D .

Cách 1: Tính theo các đoạn thẳng: AC, CD, DE, EF, FB.

trong đó: A(1,0), C(1,1), D(-1,1), E(-1,-1), F(2,-1), B(2,0).

Cách 2: Tìm hàm $U(x,y)$ là vi phân toàn phần của $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$$\begin{cases} U'_x = P(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} & (1) \\ U'_y = Q(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2} & (2) \end{cases} \quad \begin{aligned} (1) &\Rightarrow U(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y) \\ U(x,y) &= \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} + g(y) \\ (2) &\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C \end{aligned}$$
$$\Rightarrow U(x,y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} + C$$

$$I = U(x,y) \Big|_{(1,0)}^{(2,0)} = U(2,0) - U(1,0) = \frac{\ln 4 - \ln 1}{2} = \ln 2$$

Cách 3: Bổ sung thêm đoạn thẳng từ B đến A, đưa vào đường tròn (đủ nhỏ) bao quanh gốc O. Sử dụng công thức Green đối với miền đa liên này.

$$I = \int_C (2ye^{xy} + e^{\alpha x} \cos y)dx + (2xe^{xy} - e^{\alpha x} \sin y)dy$$

a) Tìm hằng số α để tích phân I không phụ thuộc đường đi.

b) Với α ở câu a), tính I biết C là cung tùy ý nối A $(0, \pi)$ và B $(1, 0)$.

a) Điều kiện cần để tích phân không phụ thuộc đường đi:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{xy} + 2xye^{xy} - \alpha e^{\alpha x} \sin y = 2e^{xy} + 2xye^{xy} - e^{\alpha x} \sin y$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

Đây cũng là điều kiện đủ vì với mọi cung C luôn tìm được miền đơn liên D chứa cung C sao cho P, Q và các ĐHR cấp 1 liên tục trên miền D.

b) Với $\alpha = 1$ ta có tích phân:

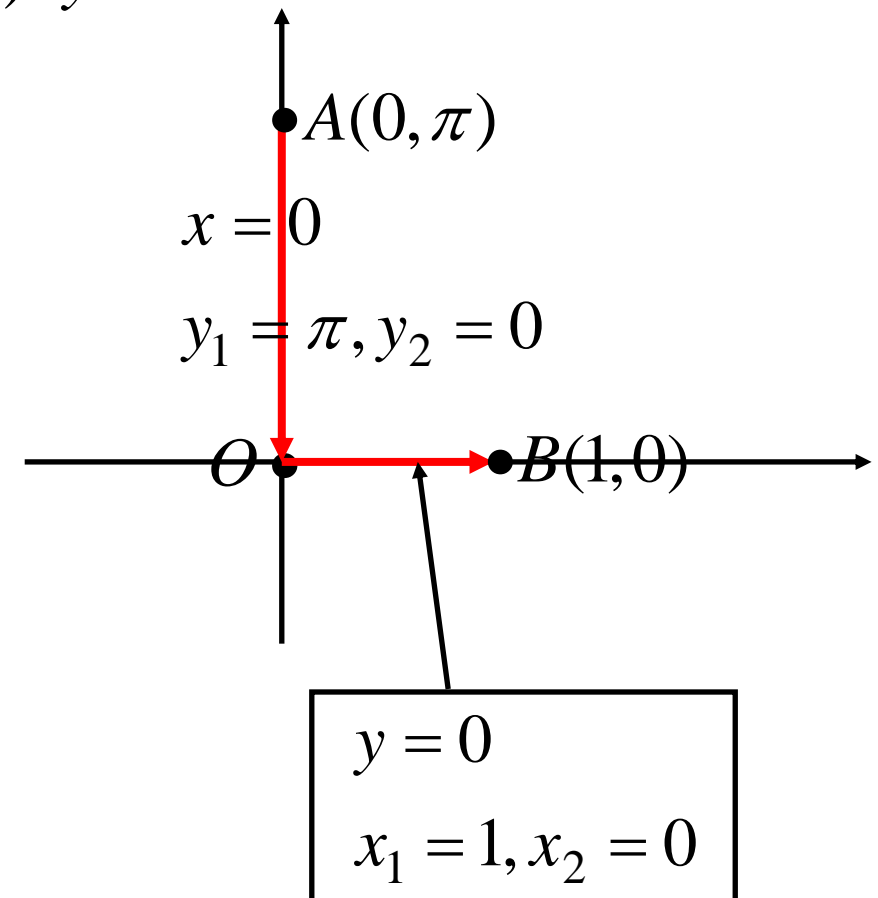
$$I = \int_{(0,\pi)}^{(1,0)} (2ye^{xy} + e^x \cos y)dx + (2xe^{xy} - e^x \sin y)dy$$

Chú ý: tích phân I không phụ thuộc đường đi.

$$I = \int_{AO} + \int_{OB}$$

$$I = \int_{\pi}^0 -\sin y dy + \int_0^1 e^x dx$$

$$I = e + 1$$



2. Tích phân đường loại 2

Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân

a) Cho $P(x, y) = y, Q(x, y) = 2x - ye^y$. Tìm hàm $h(y)$ thỏa $h(1) = 1$ sao cho tích phân $I = \int_C h(y)P(x, y)dx + h(y)Q(x, y)dy$ không phụ thuộc đường đi.

b) Với $h(y)$ ở câu a), tính I biết C là phần đường cong có phương trình: $4x^2 + 9y^2 = 36$, ngược kim đồng hồ từ $A(3,0)$ đến $B(0,2)$.

a) Điều kiện cần để tích phân không phụ thuộc đường đi:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$