Nội dung Chương 7

1. Phương trình vi phân

2. Phương trình vi phân cấp 1

3. Phương trình vi phân cấp 2

1. Phương trình vi phân

Một số bài toán dẫn tới phương trình vi phân

Cho một vật khối lượng m rơi tự do trong không khí. Giả sử sức cản của không khí tỷ lệ với vận tốc rơi là $v(t)$ vào thời điểm t với hệ số tỷ lệ là $k > 0$. Tìm $v(t)$.

Khi vật rơi thì lực tác dụng lên vật gồm: lực hút trái đất mg, lực cản của không khí $kv(t)$.
Theo định luật Newton: $ma = F$, với a là gia tốc của vật rơi. Do đó:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Hay: $mv' = mg - kv$.
Đây là phương trình vi phân để tìm hàm $v(t)$.

1. Phương trình vi phân

Một số bài toán dẫn tới phương trình vi phân

Cho đường cong $y = f(x)$. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong đó, biết rằng tiếp tuyến tại 1 điểm trên đường cong sẽ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 2 lần tung độ của tiếp điểm.

Pt tiếp tuyến với $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, y_0)$:

$$y = y_0 + f'(x_0).(x - x_0)$$

Giao điểm của tiếp tuyến này với trục Oy ($x = 0$):

$$y_1 = y_0 - f'(x_0).x_0$$

Vì: $y_1 = 2y_0 \to y_0 = -f'(x_0).x_0$. Do $M(x_0, y_0)$ là điểm bất kỳ, nên ta

có phương trình vi phân: $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$.

1. Phương trình vi phân

Định nghĩa

Phương trình vi phân là phương trình mà đối tượng phải tìm là hàm số và hàm số phải tìm có mặt trong phương trình đó dưới dạng đạo hàm hoặc vi phân các cấp.

Phương trình vi phân thường (gọi tắt là phương trình vi phân) là phương trình vi phân với hàm số phải tìm là hàm số 1 biến số.

PTVP thường:

$$y' = x^2 + y^2 \qquad xdy - y^2dx = 0 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$$

1. Phương trình vi phân

Định nghĩa

Phương trình vi phân đạo hàm riêng là phương trình vi phân với hàm số phải tìm là hàm số nhiều biến số.

PTVP đạo hàm riêng:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Trong khuôn khổ chương trình này, chúng ta chỉ xét PTVP thường, và ta gọi tắt là PTVP.

1. Phương trình vi phân

Định nghĩa

Cấp cao nhất của đạo hàm (hoặc vi phân) trong phương trình vi phân gọi là cấp của phương trình vi phân.

$$y''(x) + 3\frac{y'(x)}{x} = x\sin x$$ phương trình vi phân cấp 2.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx} = e^{2x}$$ phương trình vi phân cấp 3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$ phương trình đạo hàm riêng cấp 2.

1. Phương trình vi phân

Định nghĩa

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp n:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (1)$$

Ví dụ: $\left(3y^2x + e^y\right)y' + \left(y^3 + 2x\right) = 0$

Nếu giải ra được $y^{(n)}$: $y^{(n)} = \varphi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$

Ví dụ: $\left(x^2 + xy\right)dy = \left(2x^2 + y^2\right)dx$

Giải ra được: $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + xy}$

1. Phương trình vi phân

Nghiệm - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng của PTVP

Nghiệm của phương trình (1) trên tập X là một hàm $y = \varphi(x)$ xác định trên X sao cho khi thay vào (1) ta được đồng nhất thức.

Đồ thị của nghiệm $y = \varphi(x)$ gọi là đường cong tích phân.

Ví dụ: phương trình vi phân $y' - \frac{1}{x}y = 0$ có nghiệm là:

$$y = Cx,\ C \in R$$

vì thỏa mãn phương trình vi phân đã cho.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Nghiệm - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng của PTVP

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

Nếu giải ra được y': $y' = \varphi(x, y) \quad (3)$

Ví dụ: các phương trình vi phân cấp 1

$$y' - y = xe^x$$ dạng (3)

$$(x^2 + y^2)dy + (xy + y^2)dx = 0$$ dạng (3)

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$$ dạng (2)

2. Phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa

Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình (2) hoặc (3) thỏa điều kiện ban đầu (điều kiện biên)

$$y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

Nghiệm của phương trình (2) hoặc (3) là họ đường cong tích phân phụ thuộc hằng số C.

Nghiệm của bài toán Cauchy là đường cong tích phân đi qua điểm cho trước (x_0, y_0).

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Phương trình vi phân: $y' - \frac{3}{x}y = 0$

nghiệm của phương trình là họ đương cong tích phân: $y = Cx^3,\ C \in R$

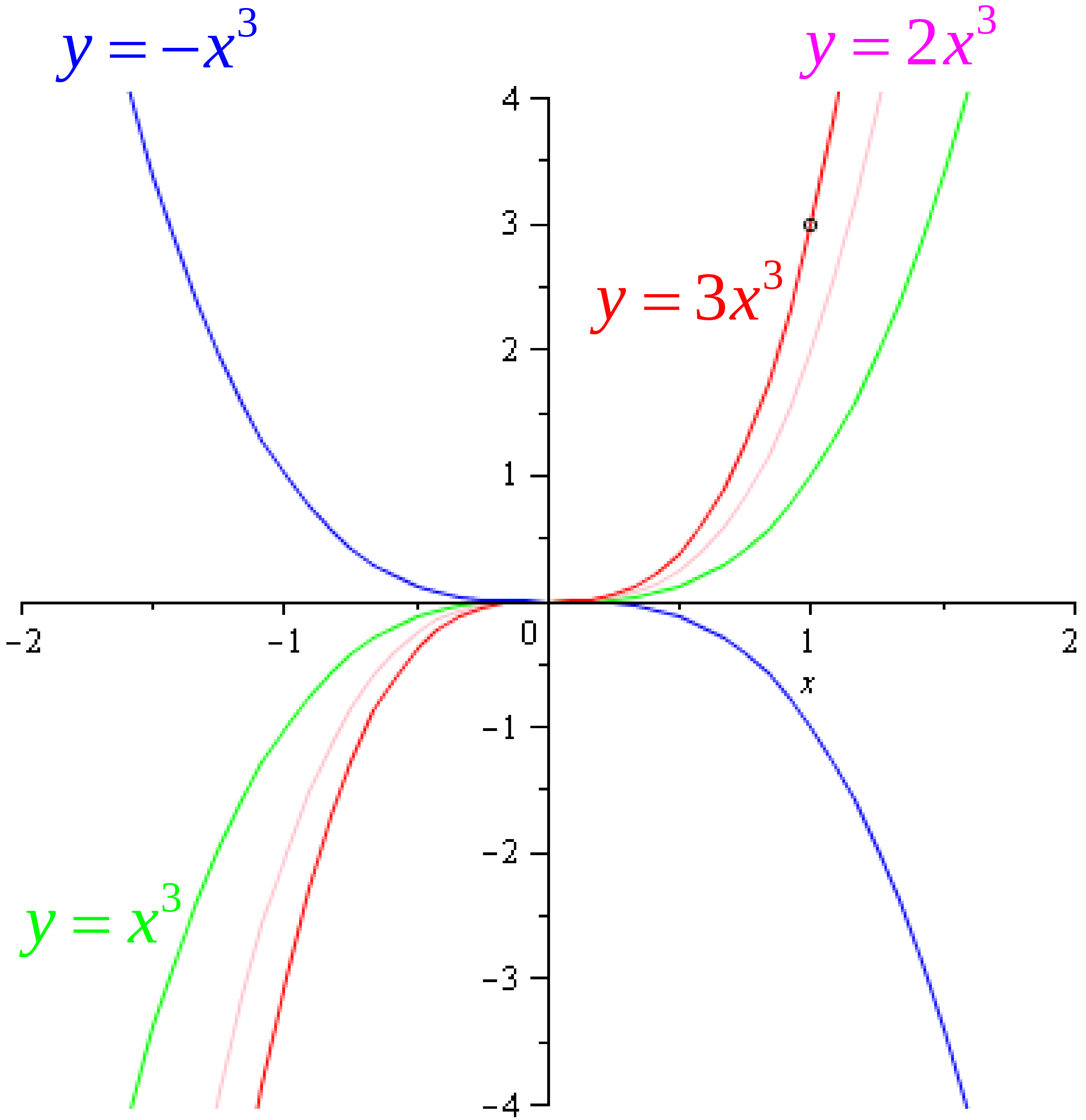
Xét bài toán Cauchy: $y' - \frac{3}{x}y = 0,\ \ y(1) = 3$

Ta có: $3 = C \cdot 1^3 \ \Rightarrow C = 3$

Nghiệm của bài toán Cauchy: $y = 3x^3$

Đường cong tích phân trong một số trường hợp cụ thể.

Nghiệm của bài toán Cauchy là đường cong màu đỏ. Đường cong đi qua điểm (1,3).



2. Phương trình vi phân cấp 1

Nghiệm - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng của PTVP

Nghiệm của ptvp cấp 1 phụ thuộc vào một hằng số C tùy ý.

Nghiệm tổng quát của phương trình cấp 1: $y = \varphi(x, C)$

Nghiệm riêng là nghiệm thu được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho hằng số C một giá trị cụ thể (ví dụ nghiệm của bài toán Cauchy).

Nghiệm kỳ dị là nghiệm không thể thu được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kỳ giá trị nào.

Giải phương trình vi phân là tìm ra tất cả các nghiệm của ptvp.

Nghiệm - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng của PTVP

Chú ý

Khi giải PTVP không phải bao giờ cũng nhận được nghiệm tổng quát dưới dạng $y = \varphi(x, C)$, mà nói chung chỉ nhận được hệ thức $\Phi(x, y, C) = 0$ (nghiệm tổng quát viết dưới dạng hàm ẩn).

Khi đó $\Phi(x, y, C) = 0$ gọi là tích phân tổng quát; $C = C_0$ ta có tích phân riêng $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Định lý (tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy)

Nếu hàm $y = f(x)$ liên tục trong miền mở $D \subset R^2$, thì với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, bài toán Cauchy (3) với điều kiện (4) có nghiệm xác định trong lân cận của x_0.

Ngoài ra nếu đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục trong *D*, thì nghiệm này là duy nhất.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình tách biến (phân ly biến số)

Dạng tổng quát của phương trình:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Tích phân tổng quát của phương trình:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Giải phương trình: $y^2y' = x(1+x^2)$.

Phương trình có dạng tách biến:

$$y^2dy - x(1+x^2)dx = 0$$

Tích phân tổng quát của ptvp:

$$\int y^2dy - \int x(1+x^2)dx = C$$

Suy ra:

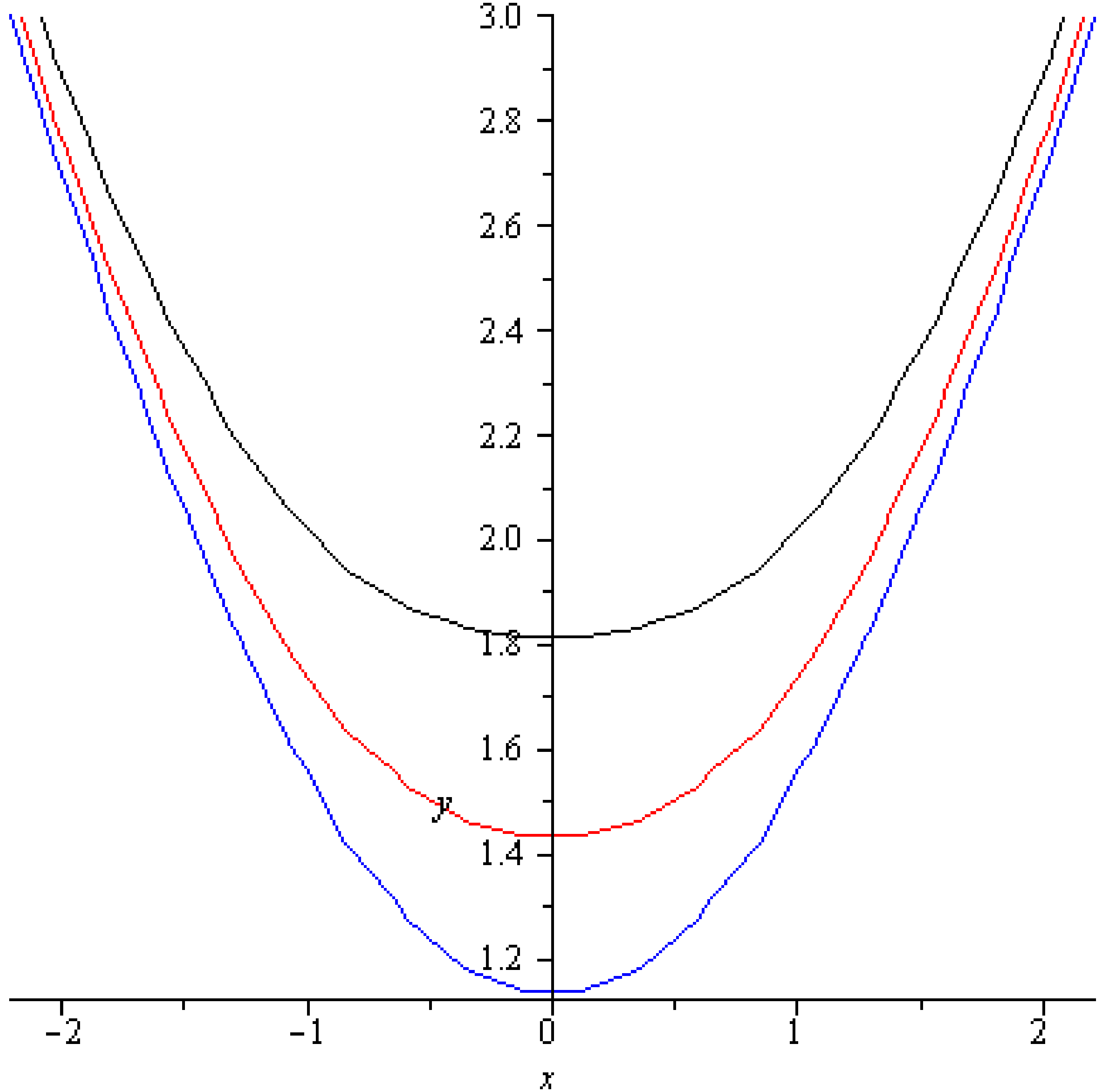
$$\frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = C$$

Đường cong tích phân trong một số trường hợp cụ thể:

Đường màu xanh: $C = \dfrac{1}{2}$

Đường màu đỏ: $C = 1$

Đường màu đen: $C = 2$



Phương trình tách biến (phân ly biến số)

Chú ý

Phương trình có dạng:

$$X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0$$

Nếu $Y_1(y)X_2(x) \neq 0 \rightarrow \frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = 0$: đây là pt tách biến.

Nếu $X_2(x) = 0$ tại $x = a$, thì $x = a$ là 1 nghiệm của PTVP.

Nếu $Y_1(y) = 0$ tại $y = b$, thì $y = b$ là 1 nghiệm của PTVP.

Các nghiệm đặc biệt này không chứa trong nghiệm tổng quát của PTVP trên.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Giải phương trình: $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0.$

Chia 2 vế cho $(1+x^2)(1+y^2)$ ta được:

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0.$$

Tích phân tổng quát của ptvp:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = C.$$

Suy ra: $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$

Vậy tích phân tổng quát của ptvp là:

$$(1+x^2)(1+y^2) = C_1, C_1 = const, C_1 > 0.$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình tách biến (phân ly biến số)

Chú ý

Phương trình có dạng:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

Đặt: $z = ax + by + c$, khi đó:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \text{ và } \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) = f(z) \to \frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Suy ra $\frac{dz}{a+bf(z)} - dx = 0$: đây là phương trình tách biến.

Ví dụ

Giải phương trình: $y' = 2x + y$.

Đặt $z = 2x + y$. Khi đó: $z' = 2 + y'$, mà $y' = 2x + y$,
Do đó: $z' = 2 + z$. Suy ra:

$$\frac{dz}{2+z} = dx$$

Đây là pt tách biến. Vậy tích phân tổng quát của ptvp là:

$$\int \frac{dz}{2+z} = \int dx$$

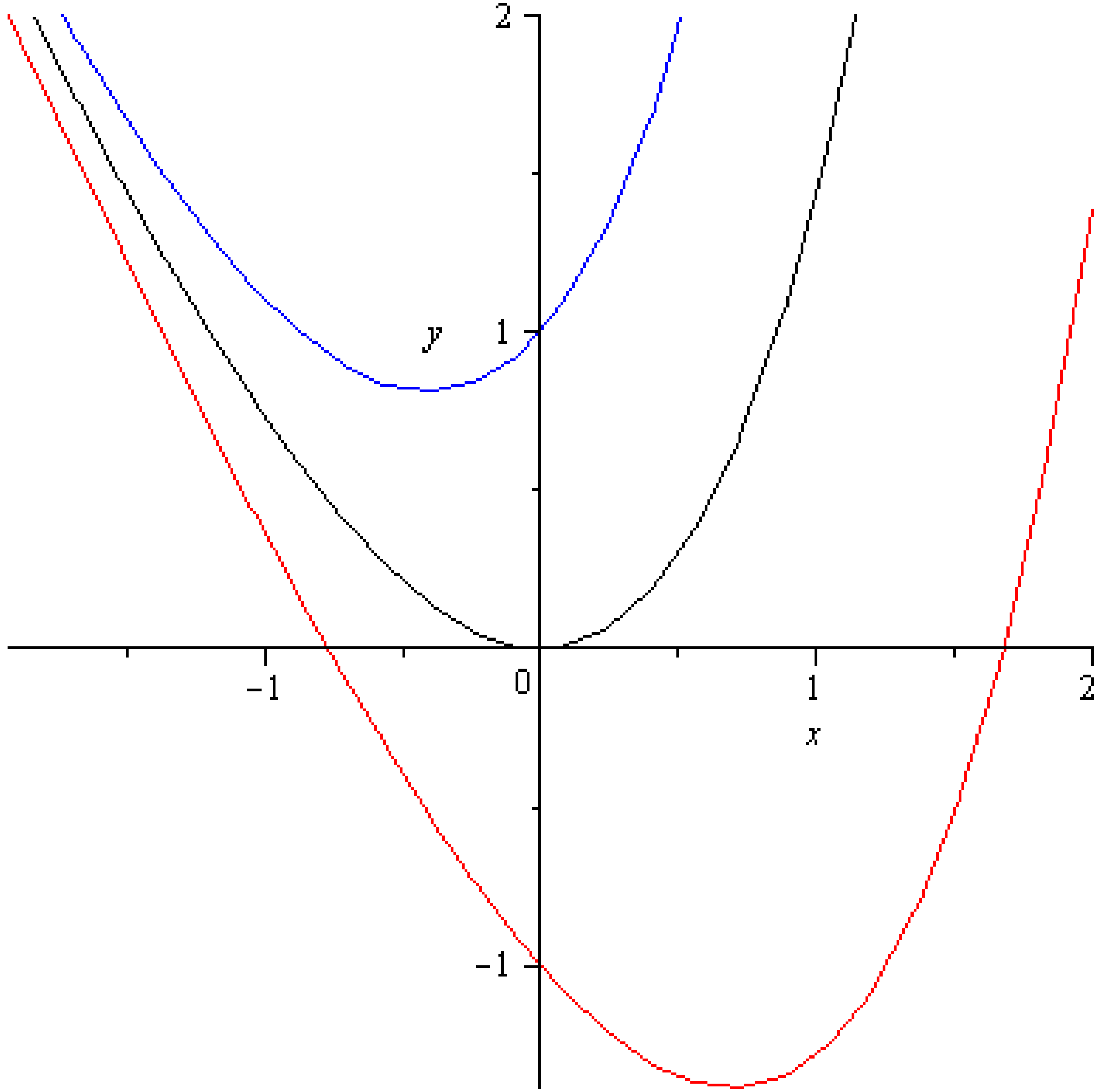
Suy ra: $\ln|z + 2| = x + C_1 \to z = Ce^x - 2, C = const.$
Thay $z = 2x + y$ ta được tích phân tổng quát: $y = Ce^x - 2(x + 1)$.

Đường cong tích phân trong một số trường hợp cụ thể:

Đường màu xanh: $C = 3$

Đường màu đỏ: $C = 1$

Đường màu đen: $C = 2$



2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình đẳng cấp

Dạng: $y' = f\left(x, y\right)$

với $f(x, y)$ là hàm đẳng cấp (bậc 0): $f(t \cdot x, t \cdot y) = f(x, y), \forall t$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy}{xy + y^2}$$ là hàm đẳng cấp (bậc 0).

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + 2(tx)(ty)}{(tx)(ty) + (ty)^2} = \frac{x^2 + 2xy}{xy + y^2} = f(x, y)$$

Phương trình đẳng cấp

PTVP đẳng cấp: $y' = f(x,y)$, khi đó $f(x,y)$ có thể viết lại dưới dạng $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Do đó, ta có ptvp đẳng cấp: $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Vì: hàm $f(x,y)$ có tính chất $f(tx,ty) = f(x,y), \forall t$, nên ta chọn:

$t = \frac{1}{x}$, khi đó $f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Đặt: $u(x) = \frac{y}{x} \to y = u.x \to y' = u + x.u' = \varphi(u)$.

$\to x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$ hay $\frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$, $\varphi(u) - u \neq 0$.

Ví dụ

Giải phương trình: $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$

Ptvp có dạng:

$$y' = -\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

Đây là phương trình đẳng cấp, đặt $u(x) = \frac{y}{x} \rightarrow y = u.x$

Do đó: $y' = u + x.u'$. Thay vào ptvp ban đầu ta có:

$$u + x.u' = -u - \frac{1}{u}$$

Hay:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{udu}{1 + 2u^2}$$

Ví dụ

Tích phân pt này ta thu được tích phân tổng quát của ptvp:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{udu}{1+2u^2}$$

Hay:

$$ln\left|\frac{x}{C}\right| = -\frac{1}{4}\ln(1+2u^2)$$

Thay $u = y/x$ vào đẳng thức này ta được tích phân tổng quát:

$$x^4 = \frac{C^4x^2}{x^2+2y^2}$$

với $C \neq 0$.

Phương trình đẳng cấp

Chú ý

Phương trình có dạng:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Nếu $det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0$, thì đặt $z = a_1x + b_1y + c_1$. Đưa về pt tách biến.

Nếu $det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$, thì hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (α, β). Khi đó đặt:

$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$, đưa về phương trình đẳng cấp theo u, v.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Giải phương trình: $y' = \frac{1}{x-y} + 1$.

Ta có $y' = \frac{x-y+1}{x-y}$

Đặt $z = x - y + 1$. Khi đó: $z' = 1 - y'$, mà $y' = \frac{x-y+1}{x-y} = \frac{z}{z-1}$,

Do đó: $z' = 1 - \frac{z}{z-1} = -\frac{1}{z-1}$. Suy ra: $(1 - z)dz = dx$.

Đây là pt tách biến. Vậy tích phân tổng quát của ptvp là:

$$\int (1 - z)dz = \int dx$$

Do đó: $z - \frac{z^2}{2} = x + C$ hay $1 - y - \frac{(x-y+1)^2}{2} = C, C = const.$

Ví dụ

Giải phương trình: $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$.

Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm: $x = 1, y = 2$.

Đặt: $\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$

Khi đó: $y'_x = v'_x = v'_u . u'_x = v'_u$. Vậy ta có:

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3} \to v'_u = \frac{u - v}{u + v}$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Thực hiện phép đổi biến: $z = v/u$. Khi đó: $v' = z + z'.u$.

Ta được phương trình:

$$z + z'.u = \frac{1-z}{1+z}$$

Hay:

$$z'.u = \frac{1-2z-z^2}{1+z} \leftrightarrow \frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2} = \frac{du}{u}$$

Tích phân tổng quát có dạng:

$$\int \frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2} = \int \frac{du}{u}$$

Giải pt tách biến này, và thay biến ta được tích phân tổng quát:

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C, C = const.$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Giải phương trình: $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

Ptvp viết lại dưới dạng:

$$y' = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$$

Hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm $x = 1, y = 2$.

Đặt: $\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$

Ví dụ

Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$v' = -\frac{2u - 4v}{u + v}$$

Đây là pt đẳng cấp theo u và v. Đặt $\xi = \frac{v}{u} \to v = \xi . u$

Do đó: $v' = \xi + \xi' . u$. Thay vào ptvp trên ta được:

$$\xi + \xi' . u = -\frac{2 - 4\xi}{1 + \xi}$$

Hay:

$$\xi' . u = \frac{-\xi^2 + 3\xi - 2}{1 + \xi}$$

Bằng cách thay trực tiếp vào ptvp ta thấy: $\xi = 1, \xi = 2$ là nghiệm.

Ví dụ

Để tìm nghiệm tổng quát của ptvp ta chia 2 vế cho $(\xi^2 - 3\xi + 2)$:

$$\frac{(1+\xi)d\xi}{\xi^2 - 3\xi + 2} + \frac{du}{u} = 0 \leftrightarrow \left(\frac{3}{\xi - 2} - \frac{2}{\xi - 1}\right)d\xi + \frac{du}{u} = 0$$

Đây là pt tách biến, do đó tích phân tổng quát có dạng:

$$\int \left(\frac{3}{\xi - 2} - \frac{2}{\xi - 1}\right)d\xi + \int \frac{du}{u} = C_1$$

Hay:

$$ln\frac{|\xi - 2|^3}{(\xi - 1)^2} + \ln|u| = C_1 \rightarrow u\frac{(\xi - 2)^3}{(\xi - 1)^2} = C, C = const.$$

Ví dụ

Trở lại biến x, y ban đầu ta có tích phân tổng quát:

$$(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$$

cùng với hai nghiệm: $y = x + 1, y = 2x,$

tương ứng với $u = 1, u = 2.$

Phương trình tuyến tính

Dạng tổng quát của phương trình tuyến tính cấp 1:

$$y' + p(x).y = q(x) \qquad (1)$$

trong đó: $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục cho trước.

- Nếu $q(x) \neq 0$ thì (1) là PTVP tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.
- Nếu $q(x) = 0, \forall x$ thì (1) là PTVP tuyến tính cấp 1 thuần nhất (tương ứng).
- Nếu $p(x), q(x) = const$, thì (1) là PTVP tuyến tính cấp 1 hệ số hằng số (otonom).

Phương trình tuyến tính

Dạng: $y' + p(x)\cdot y = q(x) \quad (1)$

Cách giải: nhân hai vế của (1) với $e^{\int p(x)dx}$

$$y'\cdot e^{\int p(x)dx} + p(x)\cdot y\cdot e^{\int p(x)dx} = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(y\cdot e^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$y\cdot e^{\int p(x)dx} = C + \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình tuyến tính

- Nghiệm tổng quát của PTVP (1) có dạng:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right], \qquad C = const$$

Chú ý: Một số PTVP cấp 1 nếu xem $y = y(x)$ là nghiệm phải tìm thì không phải là pt tuyến tính. Nhưng nếu xem $x = x(y)$ thì ta sẽ có pt tuyến tính:

$$x' + p(y).x = q(y).$$

Khi đó nghiệm tổng quát có dạng:

$$x(y) = e^{-\int p(y)dy}\left[C + \int q(y).e^{\int p(y)dy}dy\right], \quad C = const.$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $y' + 3xy = x$, đi qua điểm (0,4).

Ta có $p(x) = 3x$ nên $\int p(x)dx = \frac{3x^2}{2}$. Do đó tích nghiệm tổng quát có dạng:

$$y(x) = e^{-3x^2/2}\left[C + \int xe^{3x^2/2}dx\right] = e^{-3x^2/2}\left(\frac{1}{3}e^{3x^2/2} + C\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + Ce^{-3x^2/2}$$

Thay: $x = 0, y = 4$ vào đẳng thức trên ta có $C = 11/3$. Do đó nghiệm riêng cần tìm là: $y(x) = \frac{1}{3} + \frac{11}{3}e^{-3x^2/2}$.

Phương trình Bernoulli

Dạng tổng quát của phương trình:

$$y' + p(x).y = q(x).y^{\alpha} \qquad (2)$$

trong đó: $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục cho trước, $\alpha \in R$.

- Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì (2) là PTVP tuyến tính cấp 1.
- Nếu $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$:

Ta thấy $y(x) = 0$ là 1 nghiệm của (2).

$y(x) \neq 0$: chia cả 2 vế của (2) cho y^{α} ta có:

$$y'.y^{-\alpha} + p(x).y^{1-\alpha} = q(x)$$

Phương trình Bernoulli

Đặt $z = y^{1-\alpha} \rightarrow z' = (1-\alpha).\, y^{-\alpha}.\, y'$

Khi đó ta có PTVP tuyến tính cấp 1 đối với biến z:

$$z' + (1-\alpha).\, p(x).\, z = (1-\alpha).\, q(x)$$

Ví dụ

Giải phương trình: $y' - 9x^2 y = 3(x^5 + x^2)y^{2/3}, \quad y(0) = 1$

Phương trình Bernoulli $\alpha = 2/3.$

Đặt $z = y^{1-\alpha} = y^{1-2/3} = y^{1/3} \Rightarrow z' = \dfrac{1}{3} y^{-2/3} y'$

Ptvp có dạng: $z' - 3x^2 z = x^5 + x^2$

$$z = e^{x^3}\left(-\frac{x^3 e^{-x^3}}{3} - \frac{2e^{-x^3}}{3} + C\right) = -\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + Ce^{x^3}$$

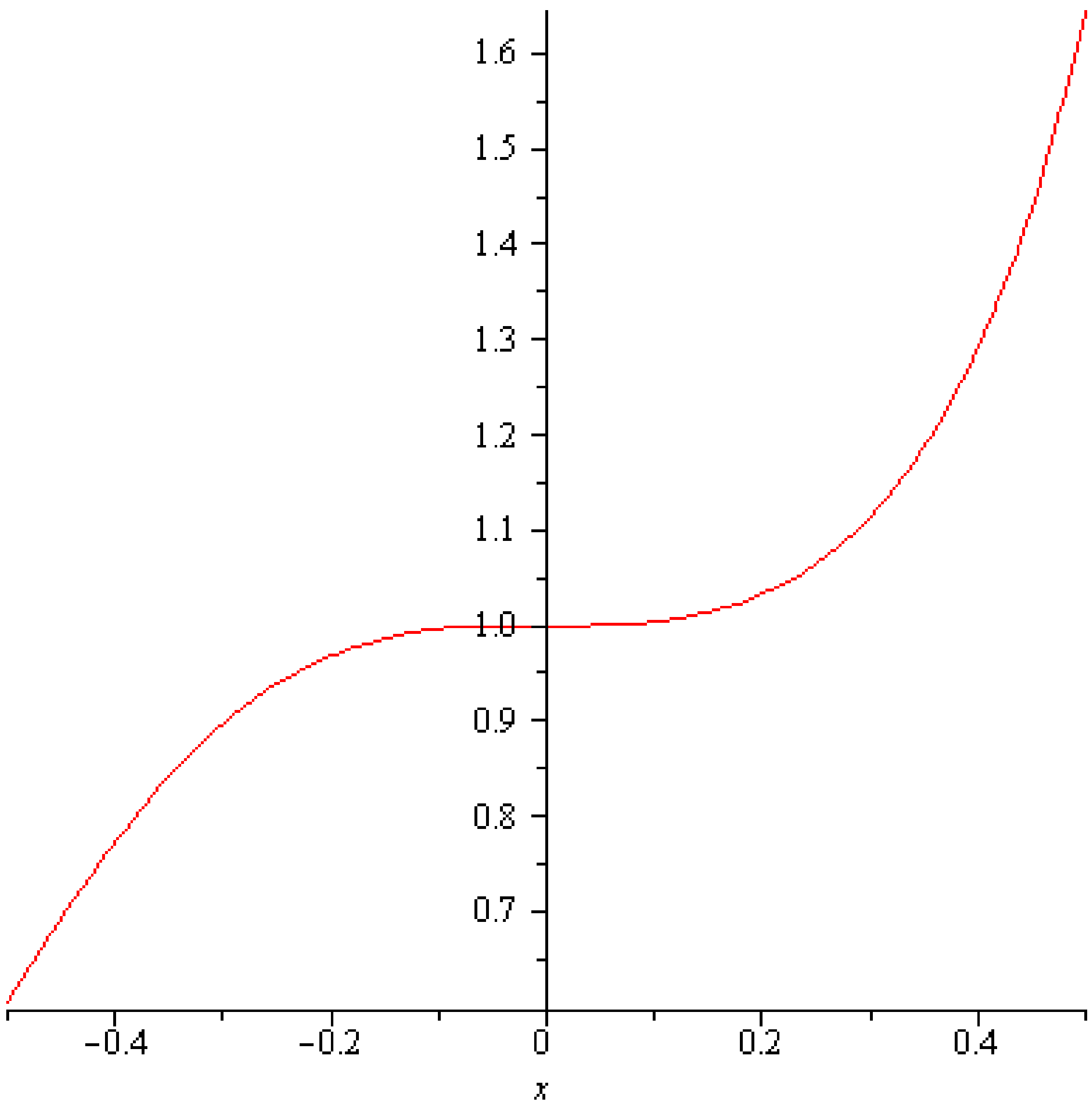
Nghiệm tổng quát của ptvp: $y = \left(-\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3} + Ce^{x^3}\right)^3$

Ví dụ

Điều kiện đầu: y(0) = 1,
suy ra C = 5/3.

Nghiệm bài toán Cauchy:

$$y=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}e^{x^3}\right)^3$$



Ví dụ

Giải phương trình: $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Đây là pt Bernoulli với $\alpha = 1/2$ và $y = 0$ là 1 nghiệm riêng của pt đã cho. Giả sử $y \neq 0$, chia cả 2 vế cho $xy^{1/2}$ ta được:

$$y^{-1/2}y' - \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} = x.$$

Đặt: $z = y^{1/2} \to z' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$. Khi đó pt đã cho trở thành ptvp tuyến tính cấp 1 đối với biến z:

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Giải phương trình này ta tìm được nghiệm:

$$z = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right).$$

Do đó pt đã cho có nghiệm tổng quát:

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$$

và nghiệm $y = 0$.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Giải phương trình: $y' + xy = x^3y^3$.

Đây là pt Bernoulli với $\alpha = 3$ và $y = 0$ là 1 nghiệm riêng của pt đã cho. Giả sử $y \neq 0$, chia cả 2 vế cho y^3 ta được:

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3.$$

Đặt: $z = y^{-2} \to z' = -2y^{-3}y'$. Khi đó pt đã cho trở thành ptvp tuyến tính cấp 1 đối với biến z:

$$z' - 2xz = -2x^3.$$

Do đó nghiệm tổng quát có dạng: $z = Ce^{x^2} + x^2 + 1$.

Đổi lại biến ta có tích phân tổng quát:

$$y^2\left(Ce^{x^2} + x^2 + 1\right) = 1, C = const.$$

Phương trình Bernoulli

Chú ý

Trong một số trường hợp, ta phải coi x là hàm số của y, thì khi đó phương trình sẽ trở thành pt Bernoulli.

Ví dụ: Giải phương trình: $y'(x^2y^3 + xy) = 1.$

Phương trình đã cho có dạng:

$$\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1.$$

Ta coi x là hàm số của y, khi đó đưa pt trở thành:

$$\frac{dx}{dy} = x^2y^3 + xy \leftrightarrow \frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2.$$

Đây là pt Bernoulli với hàm số phải tìm $x(y)$.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân toàn phần (hoàn chỉnh)

Dạng tổng quát của phương trình:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (3)$$

trong đó $P(x, y), Q(x, y)$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1, và $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Phương trình vi phân toàn phần (hoàn chỉnh)

Định lý

PTVP hoàn chỉnh luôn $\exists\, F(x, y)$ sao cho:

$$dF = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Hay: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).$

Khi đó tích phân tổng quát của PTVP hoàn chỉnh có dạng:

$$F(x, y) = C.$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân toàn phần (hoàn chỉnh)

Có 2 cách để tìm hàm $F(x, y)$:

- Cách 1: Tìm hàm $F(x, y)$ từ hệ pt: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}.$
- Cách 2: Tìm hàm $F(x, y)$ dưới dạng:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy,$$

hoặc:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy,$$

trong đó (x_0, y_0) là 1 điểm nào đó sao cho các tích phân trên tồn tại.

Ví dụ

Giải phương trình: $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$.

Cách 1: Ta có: $P(x, y) = x^3 + xy^2$ và $Q(x, y) = x^2y + y^3$ nên:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy.$$

Do đó đây là ptvp hoàn chỉnh với hàm $F(x, y)$ có dạng:

$$F(x, y) = \int_0^x (x^3 + xy^2)dx + \int_0^y (0.y + y^3)dy,$$

hay

$$F(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}.$$

Ví dụ

Vậy tích phân tổng quát của pt đã cho là: $F(x, y) = C_1$.

Hay

$$(x^2 + y^2)^2 = 4C_1 \coloneqq C^2$$

Hoặc

$$x^2 + y^2 = C, C \geq 0$$

Ví dụ

Giải phương trình: $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0.$

Cách 2: Ta có: $P(x,y) = x^3 + xy^2$ và $Q(x,y) = x^2y + y^3$ nên:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$$

Do đó đây là ptvp hoàn chỉnh, nên tồn tại hàm $F(x,y)$ sao cho:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

Từ phương trình: $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) = x^3 + xy^2.$

Suy ra: $F(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y) \to \frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + C'(y).$

Ví dụ

mà $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) = x^2y + y^3$, do đó $C'(y) = y^3 \rightarrow C(y) = \frac{1}{4}y^4$.

Vậy ta có:

$$F(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4.$$

Do đó tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C_1.$$

Hay

$$x^2 + y^2 = C, C \geq 0.$$

Ví dụ

Giải phương trình: $3x^2(1 + lny)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$

Ta có: $P(x, y) = 3x^2(1 + lny)$ và $Q(x, y) = -(2y - \frac{x^3}{y})$.

Nên

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}.$$

Do đó đây là ptvp hoàn chỉnh với hàm $F(x, y)$ có dạng:

$$F(x, y) = \int_0^x 3x^2 dx + \int_1^y -(2y - \frac{x^3}{y})dy = x^3 - y^2 + 1 + x^3 lny.$$

Vậy tích phân tổng quát của pt là: $x^3 - y^2 + 1 + x^3 lny = C.$

Phương trình vi phân toàn phần (hoàn chỉnh)

Định lý

PTVP cấp 1 có dạng:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (4)$$

không phải là PTVP hoàn chỉnh.

Tuy nhiên, nếu tìm được hàm $\alpha(x,y) \neq 0$ sao cho:

$$\alpha(x,y).P(x,y)dx + \alpha(x,y).Q(x,y)dy = 0 \qquad (5)$$

trở thành PTVP hoàn chỉnh, thì nghiệm tổng quát của (5) trùng với nghiệm tổng quát của (4).

$\alpha(x,y)$: gọi là thừa số tích phân.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân toàn phần (hoàn chỉnh)

Chú ý

Nói chung không phải bao giờ cũng tồn tại thừa số tích phân.

Hơn nữa nếu biết thừa số tích phân tồn tại nhưng không phải lúc nào cũng tìm được.

Trong khuôn khổ chương trình, nêu ra 2 trường hợp có thể tìm được thừa số tích phân.

2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân toàn phần (hoàn chỉnh)

- $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \varphi(x)$ là 1 hàm chỉ phụ thuộc vào biến x. Khi đó:

$$\alpha(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$$

- $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \psi(y)$ là 1 hàm chỉ phụ thuộc vào biến y. Khi đó:

$$\alpha(y) = e^{\int \psi(y)dy}$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Ví dụ

Giải phương trình: $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

Ta có: $P(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$ và $Q(x,y) = x^2 + y^2.$

Nên

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1.$$

Do đó thừa số tích phân là: $\alpha(x) = e^{\int dx} = e^x.$

Và ta xét ptvp hoàn chỉnh sau:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0.$$

2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân toàn phần (hoàn chỉnh)

Tồn tại hàm $F(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) \qquad (1)$$

và

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^x(x^2 + y^2) \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra:

$$F(x, y) = e^x x^2 y + \frac{1}{3}e^x y^3 + C(x) = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + C(x)$$

$$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + e^x.2xy + C'(x).$$

Phương trình vi phân toàn phần (hoàn chỉnh)

Từ (1) suy ra: $C'(x) = 0 \to C(x) = const.$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là:

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Định nghĩa

Dạng tổng quát của PTVP cấp 2:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ hay } y'' = f(x, y, y').$$

Bài toán Cauchy: tìm nghiệm $y = y(x)$ của PTVP cấp 2 trên, và thỏa mãn điều kiện đầu: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$.

Bài toán Cauchy

Định lý (tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy)

Cho PTVP cấp 2 có dạng $y'' = f(x, y, y')$.

Giả sử: $f(x, y, y'), \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}$ liên tục trên miền $D \subset R^3$ và $(x_0, y_0, y'_0) \subset D$, thì trong lân cận của điểm $x = x_0$ tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ của PTVP cấp 2 thỏa mãn điều kiện đầu.

3. Phương trình vi phân cấp 2

Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng của PTVP

- Nghiệm tổng quát của PTVP cấp 2 là hàm số $y = \Phi(x, C_1, C_2)$, trong đó $C_1, C_2 = const$.
- Từ nghiệm tổng quát $y = \Phi(x, C_1, C_2)$ ta cho các giá trị cụ thể $C_1 = C'_1, C_2 = C'_2$ ta có nghiệm riêng $y = \Phi(x, C'_1, C'_2)$.

Chú ý: Nếu nghiệm tổng quát tìm được ở dạng hàm ẩn:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

thì nghiệm riêng cũng ở dạng hàm ẩn $\Phi(x, y, C'_1, C'_2) = 0$ khi ta cho các giá trị cụ thể $C_1 = C'_1, C_2 = C'_2$.

3. Phương trình vi phân cấp 2

Phương trình tuyến tính

Dạng tổng quát:

$$y'' + p(x).y' + q(x).y = f(x) \qquad (1)$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ là các hàm liên tục.

$f(x) \neq 0$ thì (1) gọi là PTVP tuyến tính cấp 2 không thuần nhất.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất tương ứng với (1) có dạng:

$$y'' + p(x).y' + q(x).y = 0 \qquad (2)$$

Nếu $p(x), q(x)$ là hằng số thì (1) gọi là PTVP tuyến tính cấp 2 hệ số hằng số.

3. Phương trình vi phân cấp 2

Định lý về cấu trúc nghiệm của PTVP tuyến tính cấp 2

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm riêng của phương trình (2) thì $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình (2), trong đó $C_1, C_2 = const$.

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của PTVP (2) thì $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình (2), trong đó $C_1, C_2 = const$.

3. Phương trình vi phân cấp 2

Định lý về cấu trúc nghiệm của PTVP tuyến tính cấp 2

Chú ý: giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm riêng của PTVP (2). Khi đó chúng độc lập tuyến tính với nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nhận xét: Đối với PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất (2), không có phương pháp chung để tìm 2 riêng nghiệm độc lập tuyến tính. Tuy nhiên ta có thể tìm được nghiệm riêng thứ 2 độc lập tuyến tính với 1 nghiệm riêng khác (không đồng nhất 0) cho trước.

Định lý về cấu trúc nghiệm của PTVP tuyến tính cấp 2

Giả sử biết 1 nghiệm riêng $y_1(x)$ của (2), trong đó $y_1(x)$ không đồng nhất 0, thì ta có thể tìm được nghiệm riêng thứ hai $y_2(x)$ của (2) độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ bằng cách đặt:

$$y_2(x) = y_1(x).u(x).$$

Chú ý: $y_1(x), y_2(x)$ là độc lập tuyến tính trên (a, b) khi và chỉ khi $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$ trên (a, b).

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' - 2y' + y = 0$, biết rằng phương trình trên có 1 nghiệm riêng $y_1(x) = e^x$.

Tìm nghiệm riêng thứ 2 độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ dưới dạng:

$$y_2(x) = u(x).e^x.$$

Suy ra: $y'_2 = ue^x + u'e^x$, $y''_2 = ue^x + 2u'e^x + u''e^x$.

Thay vào pt đã cho ta có:

$$e^x(u'' + 2u' + u) - 2e^x(u' + u) + e^x u = 0.$$

$\rightarrow u''(x) = 0 \rightarrow u(x) = C_1 x + C_2;\qquad C_1 \neq 0, C_2$ là hằng số.

Vậy nghiệm tổng quát của pt đã cho có dạng:

$$y(x) = \mathbb{C}_1 e^x + \mathbb{C}_2 x e^x.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Định lý về cấu trúc nghiệm của PTVP tuyến tính cấp 2

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình (2) và một nghiệm riêng của phương trình (1).

Nguyên lý chồng chất nghiệm: Nếu vế phải của (1) có dạng: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, khi đó:

$$y'' + p(x).y' + q(x).y = f_1(x) + f_2(x).$$

Giả sử $y_1(x)$ là nghiệm riêng của: $y'' + p(x).y' + q(x).y = f_1(x)$

và $y_2(x)$ là nghiệm riêng của: $y'' + p(x).y' + q(x).y = f_2(x)$,

thì $y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình (1).

3. Phương trình vi phân cấp 2

Định lý về cấu trúc nghiệm của PTVP tuyến tính cấp 2

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (2) thì nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng:

$$y(x) = C_1(x).y_1(x) + C_2(x).y_2(x)$$

trong đó $C_1(x), C_2(x)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 & = & 0 \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' & = & f(x) \end{cases}$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Giải phương trình: $x^2y'' + xy' - y = x^2$, biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng có 1 nghiệm riêng $y_1(x) = x$.

$x = 0$ không phải là nghiệm của PTVP trên nên ta có:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 1.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng có dạng:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Vì $y_1(x) = x$ là một nghiệm riêng của pt thuần nhất, nên ta tìm nghiệm riêng $y_2(x)$ độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ dưới dạng:

$$y_2(x) = x.u(x)$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

$\rightarrow y'_2 = u + xu'$; $y''_2 = 2u' + xu''$. Thay vào pt thuần nhất ta có:

$$2u'' + xu' + \frac{1}{x}(u + xu') - \frac{1}{x^2}xu = 0.$$

$\rightarrow xu'' + 3u' = 0$: đây là PTVP cấp 2 hạ cấp được. Đặt $u' = p$:

$xp' + 3p = 0 \rightarrow p' + \frac{3}{x}p = 0.$

Suy ra: $p = Ce^{-\int \frac{3dx}{x}} = \frac{C}{x^3}$. Do đó: $u' = \frac{C}{x^3} \rightarrow u = \frac{C_2}{x^2}$.

Vậy $y_2(x) = \frac{C_2}{x}$, $C_2 \neq 0$ là hằng số. Cho $C_2 = 1$ thì $y_2(x) = \frac{1}{x}$.

Vậy nghiệm tổng quát của pt thuần nhất có dạng:

$$y^* = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Tìm nghiệm riêng của pt không thuần nhất bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, dạng: $\overline{y} = C_1(x).x + \frac{C_2(x)}{x}$.

Với $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn hệ pt sau:

$$\begin{cases} C_1'.x + C_2'\dfrac{1}{x} = 0 \\ C_1' - C_2'\dfrac{1}{x^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2} \\ C_2' = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Do đó: $C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1$, $C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + C_2$

C_1, C_2 là các hằng số. Vì chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất nên ta chọn $C_1 = C_2 = 0$.

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Vậy nghiệm riêng của pt không thuần nhất là:

$$\overline{y} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{6} = \frac{x^2}{3}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là:

$$y = \overline{y} + y^* = \frac{x^2}{3} + C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

C_1, C_2 là các hằng số.

3. Phương trình vi phân cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

Phương trình thuần nhất

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (3)$$

trong đó $p, q = const$.

Theo định lý về cấu trúc nghiệm, ta sẽ tìm 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của pt (3), từ đó sẽ tìm được nghiệm tổng quát của pt (3). Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$y = e^{kx},$$

trong đó $k = const$ cần xác định.

Thay vào (3) ta có: $(k^2 + pk + q).e^{kx} = 0$.

$\rightarrow k^2 + pk + q = 0$ (phương trình đặc trưng).

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

Nghiệm của phương trình đặc trưng có 3 trường hợp:

- Có 2 nghiệm thực phân biệt: $k_1 \neq k_2$.

$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$ là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của PTVP (3).

Do đó nghiệm tổng quát của PTVP (3) có dạng:

$$y(x) = C_1 . e^{k_1 x} + C_2 . e^{k_2 x}, \qquad C_1, C_2 = const.$$

- Có nghiệm thực kép: $k_1 = k_2 = k$.

$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$ là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của PTVP (3).

Do đó nghiệm tổng quát của PTVP (3) có dạng:

$$y(x) = C_1 . e^{kx} + C_2 . x . e^{kx}, \qquad C_1, C_2 = const.$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

- Có 2 nghiệm phức liên hợp: $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta.$

$y_1 = e^{\alpha x}.cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}.sin\beta x$ là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của PTVP (3).

Do đó nghiệm tổng quát của PTVP (3) có dạng:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1.cos\beta x + C_2.sin\beta x).$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Giải phương trình: $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 3k - 4 = 0,$$

có nghiệm: $k_1 = 1, k_2 = -4$.

Vậy nghiệm tổng quát của pt thuần nhất là:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Giải phương trình: $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 4k + 4 = 0,$$

có nghiệm: $k_1 = k_2 = 2.$

Vậy nghiệm tổng quát của pt thuần nhất là:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Giải phương trình: $y'' + 6y' + 13y = 0.$

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 6k + 13 = 0,$$

có nghiệm: $k = -3 \pm 2i.$

Vậy nghiệm tổng quát của pt thuần nhất là:

$$y(x) = e^{-3x}(C_1 cos2x + C_2 sin2x).$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

Phương trình không thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (4)$$

trong đó $p, q = const,$

với phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' + py' + qy = 0,$$

và phương trình đặc trưng:

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (5)$$

Nhận xét: Ta đã có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, và dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange ta có thể tìm được nghiệm riêng của (4), do đó sẽ tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (4).

Ví dụ

Giải phương trình:

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Phương trình thuần nhất liên kết tương ứng: $y'' - y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 1 = 0$, có nghiệm: $k = \pm 1$.

Do đó nghiệm tổng quát của pt thuần nhất có dạng:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Nghiệm riêng của pt không thuần nhất có dạng:

$$y(x) = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Trong đó $C_1(x), C_2(x)$là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} e^x . C_1'(x) + e^{-x} . C_2'(x) = 0 \\ e^x . C_1'(x) - e^{-x} . C_2'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}$$

Giải hệ này ta thu được:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{2(e^x + 1)} \\ C_2'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{2(e^x + 1)} \end{cases}$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Suy ra:

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{x}{2} - \frac{\ln(e^x + 1)}{2}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}dx}{e^x + 1} = -\frac{e^x}{2} + \frac{\ln(e^x + 1)}{2}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng:

$$y(x) = \frac{1}{2}[x - \ln(e^x + 1)]e^x - \frac{1}{2}[1 - e^{-x}\ln(e^x + 1)] +$$
$$+C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Giải phương trình:

$$y'' + y = \frac{2}{sin2x}$$

Phương trình thuần nhất liên kết tương ứng: $y'' + y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0$, có nghiệm: $k = \pm i$.

Do đó nghiệm tổng quát của pt thuần nhất có dạng:

$$y(x) = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

Nghiệm riêng của pt không thuần nhất có dạng:

$$y(x) = C_1(x)cosx \; + C_2(x)sinx.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Trong đó $C_1(x), C_2(x)$là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} C_1'(x).cosx + C_2'(x).sinx = 0 \\ -C_1'(x).sinx + C_2'(x).cosx = \dfrac{2}{sin2x} \end{cases}$$

Giải hệ này ta thu được:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{1}{cosx} \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{sinx} \end{cases}$$

Ví dụ

Suy ra:

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{cosx} = ln\left|sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right| - ln\left|sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}\right|$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{sinx} = ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng:

$$y(x) = \left(ln\left|sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right| - ln\left|sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}\right| + C_1\right)cosx +$$

$$+\left(ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C_2\right)sinx.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

Phương trình không thuần nhất vế phải có dạng đặc biệt:

$$f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x),\ \alpha \text{ là hằng số, } P_n(x) \text{ là đa thức bậc } n$$

Nếu α là nghiệm bội s của pt đặc trưng (5), thì ta tìm nghiệm riêng của pt (4) dưới dạng:

$$y = x^s.e^{\alpha x}.Q_n(x),$$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n cùng bậc với đa thức $P_n(x)$.

Các hệ số của $Q_n(x)$ được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

Chú ý: khi α không là nghiệm của pt đặc trưng (5) thì $s = 0$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

Phương trình không thuần nhất vế phải có dạng đặc biệt:

$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x).cos\beta x + Q_m(x).sin\beta x]$; α, β là hằng số, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, m.

Nếu $(\alpha \pm i\beta)$ không là nghiệm của pt đặc trưng (5), thì ta tìm nghiệm riêng của pt (4) dưới dạng:

$$y = e^{\alpha x}[H_s(x).cos\beta x + L_s(x).sin\beta x],$$

trong đó $H_s(x), L_s(x)$ là các đa thức có bậc $s = \max(m, n)$, và có các hệ số cần xác định bằng phương pháp đồng nhất thức.

3. Phương trình vi phân cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số

Nếu $(\alpha \pm i\beta)$ là nghiệm của pt đặc trưng (5), thì ta tìm nghiệm riêng của pt (4) dưới dạng:

$$y = x.e^{\alpha x}[H_s(x).cos\beta x + L_s(x).sin\beta x]$$

trong đó $H_s(x), L_s(x)$ là các đa thức có bậc $s = \max(m, n)$, và có các hệ số cần xác định bằng phương pháp đồng nhất thức.

Ví dụ

Giải phương trình: $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 4k + 3 = 0.$$

có nghiệm thực: $k_1 = 1, k_2 = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y^*(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Vì $\alpha = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, và $P_n(x) = 3$ (đa thức bậc 0) nên tìm nghiệm riêng của pt không thuần nhất dưới dạng: $\overline{y}(x) = A.e^{2x}$.

Ví dụ

Thay nghiệm riêng $\overline{y}(x)$ vào pt đã cho ta có:

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x} \to A = -3.$$

Do đó $\overline{y}(x) = -3e^{2x}$. Vậy nghiệm tổng quát của PTVP tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng số là:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1e^{x} + C_2e^{3x} - 3e^{2x}.$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Giải phương trình: $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

Phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' + y = 0.$$

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 1 = 0.$$

có nghiệm phức: $k = \pm i$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y^* = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

Vì vế phải là tổng của 2 hàm $f_1(x) = xe^x, f_2(x) = 2e^{-x}$, nên ta lần lượt tìm nghiệm riêng của PTVP không thuần nhất ứng với vế phải là $f_1(x), f_2(x)$.

Ví dụ

Với $f_1(x) = xe^x$, do $\alpha = 1$ không là nghiệm của pt đặc trưng, và $P_n(x) = x$, nên ta tìm nghiệm riêng của PTVP không thuần nhất có vế phải là $f_1(x)$ dưới dạng:

$$\overline{y}_1 = (Ax + B)e^x.$$

Với $f_2(x) = 2e^{-x}$, do $\alpha = -1$ không là nghiệm của pt đặc trưng, và $P_n(x)$ =2, nên ta tìm nghiệm riêng của PTVP không thuần nhất có vế phải là $f_2(x)$ dưới dạng:

$$\overline{y}_2 = Ce^{-x}.$$

Vậy nghiệm riêng của pt đã cho có dạng:

$$\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}.$$

Ví dụ

Thay nghiệm riêng $\overline{y}(x)$ vào pt đã cho và đồng nhất thức 2 vế ta có:

$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = 1.$

Vậy nghiệm tổng quát của pt đã cho có dạng:

$$y = y^* + \overline{y} = C_1 cosx + C_2 sinx + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.$$

Ví dụ

Giải phương trình: $y'' + y = sinx$.

Phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' + y = 0.$$

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 1 = 0,$$

có nghiệm phức: $k = \pm i$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y^*(x) = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

Vì $\alpha = 0, \beta = 1$ nên $\alpha \pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của pt đặc trưng. Mặt khác $P_n(x) = 0, Q_m(x) = 1$, nên $s = 0$. Vậy ta tìm nghiệm riêng của pt không thuần nhất dưới dạng: $\overline{y}(x) = x(Acosx + Bsinx)$.

Ví dụ

Thay nghiệm riêng $\overline{y}(x)$ vào pt đã cho và đồng nhất thức 2 vế ta có:

$A = -\frac{1}{2}, B = 0.$

Vậy nghiệm tổng quát của pt đã cho có dạng:

$$y = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1 cosx + C_2 sinx - \frac{1}{2} xcosx.$$

Ví dụ

Giải phương trình: $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$.

Phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 6k + 9 = 0,$$

có nghiệm kép: $k = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y^*(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}.$$

Ta tìm nghiệm riêng của pt không thuần nhất dưới dạng:

$$\overline{y}(x) = x^2e^{3x}(Ax + B).$$

3. Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ

Ta có: $\overline{y}' = 3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx)$.

$\overline{y}'' = 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + e^{3x}(6Ax + 2B)$.

Thế vào phương trình đã cho ta được:

$$e^{3x}[(6A - 10B)x + 2B] = xe^{3x}.$$

Suy ra: $\begin{cases} 6A - 10B = 1 \\ B = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1/6 \\ B = 0 \end{cases}$

Do đó nghiệm riêng của pt không thuần nhất là:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{6}x^3e^{3x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của pt đã cho có dạng:

$$y = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{6}x^3e^{3x}.$$