BÀI TẬP GIẢI TÍCH II: HÀM NHIỀU BIẾN

Giới hạn, liên tục. Phép tính vi phân. Tích phân bội.

Tích phân đường. Tích phân mặt. Phương trình vi phân

TS. Nguyễn Văn Quang

E-mail: nvquang.imech@gmail.com

nvquang@imech.vast.vn

Mobile: 0915.598.495

Chương 1. Giới hạn, liên tục

Bài 1. Tìm giới hạn của hàm số:

A. Tính các giới hạn:

1. $f(x,y) = y.\cos\dfrac{1}{y-x}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.
2. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-(x+y)}$ khi $(x,y) \to (+\infty,+\infty)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ khi $(x,y) \to (0,3)$.
4. $f(x,y) = \dfrac{(1+x^2+y^2)(1-\cos y)}{y^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.
5. $f(x,y) = (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$ khi $(x,y) \to (0,2)$.
6. $f(x,y) = \left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.
7. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+6}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[6]{x^4+y^4+2(1+x^2y^2)}-\sqrt{x^2+y^2}}$ khi $(x,y) \to (\infty,\infty)$.

B. Chứng minh các hàm số sau không tồn tại giới hạn:

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.
2. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.
4. $f(x,y) = (1+xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.
5. $f(x,y) = \dfrac{(x+y)\cos(x+y)}{\sin(x-y)}$ khi $(x,y) \to (0,0)$.

6. $f(x,y)=\dfrac{x\sin y+y\sin x}{x^2+y^2}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

7. $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$ khi $(x,y)\to(+\infty,0)$.

8. $f(x,y)=\dfrac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

C. Tính các giới hạn:

1. $f(x,y)=\left(x+y\right).\sin\dfrac{1}{xy}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

2. $f(x,y)=\left(x+y\right).\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

3. $f(x,y)=\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ khi $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$.

4. $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

5. $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(x^3-y^3\right)}{x^2+y^2}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

6. $f(x,y)=\dfrac{xy^2\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

7. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ khi $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$.

8. $f(x,y)=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

9. $f(x,y)=x^2\ln\left(x^2+y^2\right)$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

10. $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

11. $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\cdot e^{-(x+y)}$ khi $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$.

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số:

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ tại (0,0).

2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ trên R^2.

3. $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2y^2}} & \text{khi} \quad xy\neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad xy=0 \end{cases}$ trên R^2.

4. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad x^2+y^2\neq 0 \\ a & \text{khi} \quad x^2+y^2=0 \end{cases}$ tại (0,0).

Chương 2. Phép tính vi phân

Bài 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

1. $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.
2. $f(x,y)=x^{y^2}$.
3. $f(x,y)=e^{\cos^2 x-xy}$.
4. $f(x,y)=\arctan\left(x+y^2\right)$.
5. $f(x,y)=\ln\left(x^2+y\right)$ tại (1,0).

Bài 2. Tính các đạo hàm riêng của hàm số tại (0,0):

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-y}}{x+y} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
3. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Bài 3. Xét tính khả vi của hàm số sau tại (0,0):

1. $f(x,y)=(x+y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ 2. $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ 3. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$
4. $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi} \quad x^2+y^2=0\end{cases}$.
5. $f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \text{khi} \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi} \quad x^2+y^2=0\end{cases}$.
6. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{khi} \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{khi} \quad x^2+y^2=0\end{cases}$.

a. Chứng minh rằng hàm $f(x,y)$ liên tục tại điểm (0,0).

b. Chứng minh rằng hàm $f(x,y)$ không khả vi tại điểm (0,0).

Bài 4. Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+3y}$ 2. $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y}$ 3. $f(x,y)=\ln\left(x+y^2\right)$

4. $f = \arctan\left(\sqrt{u}\right); u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ 5. $f = \dfrac{u}{v} + e^{uv}; u = x^2y + 2x; v = ye^{xy}$

Bài 5. Sử dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng giá trị:

1. $\ln\left(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.981}\right)$ 2. $\arctan\dfrac{1.01}{0.99}$ 3. $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$

4. $\left(\sqrt{98} + \sqrt[3]{123}\right)^3$ 5. $\ln\left(\sqrt[3]{1.03} - \sqrt[4]{0.96} + 1\right)$

Bài 6. Tính đạo hàm, đạo hàm riêng của hàm ẩn $z(x, y)$ xác định từ phương trình:

1. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.
2. $x + y + z = e^z$.
3. $xe^x + y^2e^y - ze^z = 0$ tại điểm (0,0).
4. $xe^y + yz - ze^{xy} = 0$ tại điểm (1,1).

Bài 7. Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{khi} \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Tính đạo hàm riêng $f''_{xy}(0,0)$ và $f''_{yx}(0,0)$.

Bài 8. Tính đạo hàm riêng cấp hai của hàm số:

1. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x + y^2}\right)$ 2. $f(x, y) = x^3.\ln\left(x + y\right)$ 3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - xy^3$

4. $f(x, y) = e^x.\ln y + \sin y.\ln x$ 5. $xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

6. $e^{x+y+z} = x + 2y - 3z + 1; z''_{xy}\left(0,0\right)$, biết $z\left(0,0\right) = 0$

Bài 9. Tính vi phân cấp hai của hàm số:

1. $f(x, y) = x^4 + 3xy^2 - y^3$ 2. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, chứng minh $d^2 f \geq 0$

3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z^3 + xy + 3xz$ tại điểm M(1,1,1), tìm ma trận của dạng toàn phương $d^2 f(M)$ với các biến dx, dy, dz.

4. $f = f\left(3x + 4y, xy + e^y\right)$ 5. $f = f\left(2x + y\right)$

6. $f = f(u) = u^3 + \sin u; u = 2xy + e^x$

7. Tính $d^2 z(1,1)$ biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0; z(1,1) = -2.$$

Bài 10. Khai triển Maclaurin hàm số đến cấp ba:

1. $f(x, y) = e^x \sin y$ 2. $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 3. $f(x, y) = \sin(x^2 - y)$

Bài 11. Chứng minh rằng:

1. $y.z'_x + x.z'_y = 0$ với $z = f(x^2 - y^2)$ và $f(t)$ là hàm khả vi.

2. $x.z''_{xx} + y.z''_{xy} - 2.z'_x = 0$ với $z = \dfrac{(xy)^2}{x + y}$.

3. $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ với $z = \ln(x^2 + y^2)$.

4. $z''_{xx}.z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2=0$ với $z=y\cdot f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ và $f(t)$ có đạo hàm cấp hai.

Bài 12. Tìm hàm $z=z(x,y)$ thỏa mãn:

1. $z'_x=2+4ye^{xy}, z'_y=3+4xe^{xy}; z(0,1)=0$.
2. $z'_x=x^2-2xy^2+3, z'_y=y^2-2x^2y+3$.
3. $z''_{xx}=12x^2y+2, z'_y=x^4-30xy^5; z(0,0)=1, z(1,1)=-2$.

Bài 13.

1. Tìm đạo hàm theo hướng vecto $\vec{v}=(3,4)$ của hàm số $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ tại điểm $M(1,1)$.
2. Tìm đạo hàm của hàm số $u=x^2-3yz+4$ tại điểm $M(1,2,-1)$ theo hướng của vecto tạo với các trục tọa độ những góc nhọn bằng nhau.
3. Tìm đạo hàm của hàm số $z=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ tại điểm $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ theo hướng pháp tuyến trong của đường Ellip: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>0,b>0)$ tại điểm *M*.
4. Cho hàm số $u=\ln\left(xyz\right)$, $M(1,-2,-3)$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng của hàm *u* tại *M*.
5. Tìm đạo hàm của hàm số $z=x^2-xy+y^2$ tại điểm $M(1,1)$ theo hướng $\vec{v}$ hợp với hướng dương của trục Ox một góc α. Theo hướng nào thì đạo hàm này có giá trị lớn nhất, bé nhất, bằng 0.
6. Cho hàm số $f(x,y)=x^2+\sin\left(xy\right)$; $M(1,0)$. Tìm hướng mà đạo hàm của hàm số *f* theo hướng đó tại *M* có giá trị bằng 1.

Bài 14. Tìm cực trị của hàm số:

1. $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$
2. $f(x,y)=4-\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)^2}$
3. $f(x,y)=x^2+y^2-xy-2x+y$
4. $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$
5. $f(x,y)=(x^2+y^2).e^{-(x^2+y^2)}$
6. $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$
7. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$
8. $f(x,y)=xy.\ln\left(x^2+y^2\right)$
9. $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$
10. $f(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$
11. $f(x,y)=x^2(x+1)+y^3$
12. $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$

Bài 15. Tìm cực trị có điều kiện của hàm số:

1. $f(x,y)=x+2y$; $x^2+y^2=5$
2. $f(x,y)=x^2+y^2$; $x+y=1$
3. $f(x,y)=x+y$; $x^2+y^2=1$
4. $f(x,y)=xy$; $x+y=1$
5. $f(x,y)=x^2y\left(4-x-y\right)$; $x+y=6$

Bài 16. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trong miền tương ứng:

1. $f(x,y)=x^2+y^2-12x-16y$; $x^2+y^2\le 25$.
2. $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$; $x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3$.

3. $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y$; $0\le x\le 1, 0\le y\le 2$.
4. $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$; $x^2+y^2\le 25$.
5. $f(x,y)=1+x+2y; x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$.
6. $f(x,y)=x^2-y^2$; $x^2+y^2\le 1$.
7. $f(x,y)=x^2+y^2$; $x^2+y^2\le 4$.
8. $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2)$; $x^2+y^2\le 4$.

Bài 17. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong:

1. $y^3+4xy-5y+x^3-12=0$ tại điểm M(2,1).
2. $x+(x+y)\cdot e^{x^2}-y^3=0$ tại điểm M(0,1).
3. $x=2t^2, y=3t, z=e^{t-1}$ tại điểm M(2,3,1). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại M.
4. $x^2+y^2=1, y=x+z$ tại điểm M(1,0,-1). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại M.
5. $x^2+y^2=10, y^2+z^2=25$ tại điểm M(1,3,4). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại M.
6. $2x^2+3y^2+z^2=47, x^2+2y^2=z$ tại điểm M(-2,1,6). Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại M.

Bài 18. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong:

1. $x^2+3y^2-2z^2=0$ tại điểm $M(1,1,\sqrt{2})$.
2. $xy-z=0$ tại điểm $M(1,1,1)$.
3. $x^2-4y^2+2z^2=6$ tại điểm $M(2,2,3)$.
4. $z=2x^2+4y^2$ tại điểm $M(2,1,12)$.

Chương 3. Tích phân bội

Bài 1. Đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân sau:

1. $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy$ 2. $\int_{1}^{3} dy \int_{0}^{2y} f(x,y)\,dx$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

1. $\iint_D \left(\cos^2 x + \sin^2 y\right)dxdy,$ D là miền: $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}$.

2. $\iint_D \ln(x+y)\,dxdy,$ D là miền giới hạn bởi các đường: $x=1, y=1, y=x+1$.

3. $\iint_D \left(x^2+y\right)dxdy,$ D là miền giới hạn bởi các đường: $y=x^2, x=y^2$.

4. $\iint_D \left(y^2-3\right)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường: $y^2=9x+9, y^2=9-3x$.

5. $\iint_D \left(y^2+1\right)dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường: $y^2=4x+4, y^2=4-2x$.

6. $\iint_D |x+y|\,dxdy,$ D là miền: $|x| \le 1, |y| \le 1$.

7. $\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2\,dxdy,$ D là miền giới hạn bởi:

$$x+y=1, x-y=-1, x+y=3, x-y=1.$$

8. $\iint_D f(x,y)\,dxdy,$ D là miền giới hạn bởi Ellip: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ và

$$f(x,y) = \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} czdz, \qquad (c=\text{const}, a>0, b>0).$$

9. $\iint_D \left(x^2+y^2+1\right)dxdy,$ D là miền giới hạn bởi đường: $x^2+y^2-x=0$.

10. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$ D là miền giới hạn bởi:

   a. Các đường: $x^2+y^2=a^2, x^2+y^2=4a^2, \quad (a>0)$.

   b. Đường hoa hồng bốn cánh: $r = a\sin 2\varphi, \quad (a>0)$.

11. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy,$ D là miền: $x^2+y^2 \le 2x, y \ge 0$.

12. $\iint_D (x+2y+1)\,dxdy,$ D là miền: $x^2+y^2 \le 2x, x^2+y^2 \le 2y$.

13. $\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy,$ D là miền giới hạn bởi các đường: $x^2+y^2=e^2, x^2+y^2=e^4$.

14. $\iint_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}}\,dxdy,$ D là miền giới hạn bởi Ellip: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

15. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,$ D là miền giới hạn bởi các đường:

$$y=\sqrt{2}x, y=\sqrt{3}x, x^2+y^2=1, x\geq 0.$$

16. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, D là miền giới hạn bởi: $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x, y\leq x$.

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

1. $x=4y-y^2, x+y=6$

2. $y=2^x, y=-\dfrac{1}{2}x, y=4$

3. $r=a\cos\varphi, r=b\cos\varphi, \quad (b>a>0)$

4. $r=a\sin 2\varphi, \quad (a>0)$

5. Các đường tròn: $r=1, r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$ (phần nằm ngoài đường tròn $r=1$).

6. $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, x=8$.

7. $y=0$ và một nhịp của đường Cycloid

$$x=a(t-\sin t), y=a(t-\cos t), \quad (a>0, 0\leq t\leq 2\pi).$$

Bài 4. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

1. $y=x^2, z=0, z=5, y=3x.$
2. $z=2x^2+y^2+1, x+y=2, x=0, y=0, z=0.$
3. $z=4-x^2-y^2, z=0$; $x^2+y^2\leq 2$.
4. $x^2+y^2+z^2=4a^2, x^2+y^2-2ay\leq 0, a>0$.
5. $y=x, y=2x, x=1, z=x^2+y^2, z=x^2+2y^2$, nằm trong góc phần tám thứ nhất.
6. $x^2+y^2+z=1, y=x, y=\sqrt{3}x, z=0,$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.
7. $z=x^2+y^2, z=x^2+2y^2, y=x, y=2x, x=1.$
8. $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2,$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.
9. $x^2+y^2+z^2=2z, x^2+y^2\leq z^2, z\geq 0.$
10. $z=16-x^2, 4x+y=16$ và các mặt phẳng tọa độ.
11. $x^2+z-4=0, y=\sqrt{x}, y=\sqrt{2x}, z=0.$
12. $2z=x^2+y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$.
13. $y=x^2, z=0, z+y=4.$
14. $z=2-x^2-y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}.$
15. $x^2+y^2+z^2=2, x\geq y^2+z^2.$
16. $z=x+y, z=x^2+y^2,$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.
17. $2y\geq x^2+z^2, x^2+y^2+z^2=3.$
18. $z=x^2+y^2, z=0, x^2+y^2=x, x^2+y^2=2x.$

Bài 5. Xác định tọa độ trọng tâm của bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường:

1. $y^2=4x+4, y^2=-2x+4$

2. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1, \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=1$

3. $y=\sqrt{2x-x^2}, y=0$

Bài 6. Tính các tích phân:

1. $\iiint\limits_V zdxdydz$, V là miền xác định bởi: $0 \le x \le \frac{1}{4}, x \le y \le 2x, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

2. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, V giới hạn bởi các mặt: $x^2+y^2=2x, z=0, z=a,\ (a>0)$.

3. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, V giới hạn bởi các mặt: $z=0; z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

4. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, V là nửa trên của khối Elipxôit: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$.

5. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, V giới hạn bởi các mặt: $x^2+y^2=1, z=0, z=a, \quad (a>0)$.

6. $\iiint\limits_V ydxdydz$, V giới hạn bởi các mặt: $y=h, y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad (h>0)$.

Bài 7. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi:

1. $x^2+y^2+z^2=2z, z \le \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1, -h \le z \le h, \quad (0<h \le c)$.
3. $x+y+z=\pm 3$; $x+2y-z=\pm 1$; $x+4y+z=\pm 2$.
4. $x^2+y^2=2ax, x^2+y^2=2ay$ và mặt $z=0, z=a>0$.
5. $x^2+y^2+z=1, y=x, y=\sqrt{3}x, z=0$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.
6. $x^2+y^2+z^2=a^2$; $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right), \quad (a>0)$.

Bài 8. Xác định tọa độ trọng tâm của vật thể giới hạn bởi các mặt:

1. $x+y=1, z=x^2+y^2, x=0, y=0$.
2. $x^2+y^2=2az, x^2+y^2+z^2=3a^2, (z \ge 0, a>0)$.

Chương 4: Tích phân đường

Bài 1. Tính tích phân:

$I = \int\limits_{OAB} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, OAB là đường gấp khúc với $O(0;0), A(2;2), B(4;0)$, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Bài 2. Tính tích phân: $I = \int\limits_{AB} (y^2 + xy)dx + (xy + x^2)dy$,

1. AB là cung nhỏ của Ellip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$, từ $A(a,0)$ đến $B(0,b)$.

2. AB là cung nhỏ của đường tròn: $x^2 + y^2 = 1,$ từ $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ đến $B(0;1)$.

Bài 3. Tính tích phân (theo chiều ngược chiều kim đồng hồ):

$$I = \oint\limits_L (2x^5 + 3y^2 + \sin^2 x)dx + \left[(x+y)^2 + \sin^2 y\right]dy,$$

1. L là biên của tam giác *ABC* với $A(1;1), B(2;2), C(1;5)$.

2. L là biên của tam giác *ABC* với $A(1;1), B(2;3), C(5;1)$.

3. L là biên của miền giới hạn bởi đường: $x^2 + y^2 = 2x$.

4. L là biên của miền giới hạn bởi đường: $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

5. L là biên của miền giới hạn bởi các đường: $y = x^2, y = 2 - x$.

6. L là biên của miền giới hạn bởi đường: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Bài 4. Tính tích phân:

1. $I = \int\limits_{AB} \frac{dx}{y^2(x^2-4)},$ AB là cung nhỏ của đường tròn: $x^2 + y^2 = 9$, từ $A\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ đến $B(0,3)$.

2. $I = \int\limits_{AB} \frac{dx}{x^4 y^3},$ AB là cung nhỏ của đường tròn: $x^2 + y^2 = 9$, từ $A\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ đến $B\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 5.

1. Cho $I = \int\limits_{AB} \frac{(mx-y)dx + (nx+y)dy}{x^2+y^2}$, với AB là đường không đi qua O(0,0).

Tìm *m*, *n* để tích phân *I* không phụ thuộc vào đường *AB*.

2. Tính $I = \int\limits_{AB} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$, với AB là đường không cắt trục Oy, từ $A(1,\pi)$ đến $B(2,\pi)$.

Bài 6. Tính tích phân:

1. $I=\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, L là nửa trên của Ellip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; a>0, b>0$, hướng của L ngược chiều kim đồng hồ.

2. $I=\int\limits_L \left[2x^2+2y^2+\cos^2 x\right]dx+\left[(x+y)^2+e^{y^2}\right]dy$, L là nửa trên của Ellip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; a>0, b>0$, hướng của L ngược chiều kim đồng hồ.

3. $I=\int\limits_L \left[2x^2+5\sin 3x\right]dx+\left[\sqrt[5]{1+y^3}+4x\right]dy$, với L: $x^2+y^2=2x+3y$, hướng của L ngược chiều kim đồng hồ.

4. $I=\int\limits_L \left[x^3\cos 5x-x^2\right]dx+\left[7x-e^{2y}\sin 3y\right]dy$, với L là biên của miền D giới hạn bởi: $y=3x^2+1, y=7-3x$, hướng của L ngược chiều kim đồng hồ.

5. $I=\int\limits_L \left[xy+x+y+\sin^3 x\right]dx+\left[xy+x-y+2^y\right]dy$, với L: $x^2+y^2=2x+2y$, hướng của L ngược chiều kim đồng hồ.

6. $I=\int\limits_L \left[4y-e^{2x}\cos x\right]dx+\left[7x-\sqrt[3]{\sin^2\frac{y}{4}}\right]dy$, với L là đường gấp khúc nối: $A(7,4)$, $B(2,1)$, $C(9,1)$, $D(9,4)$ hướng của L từ A đến D.

Chương 5: Tích phân mặt

Bài 1. Tính diện tích mặt cong:

1. Tính diện tích của phần mặt nón: $z^2 = x^2 + y^2, z \ge 0$ nằm ở trong mặt trụ:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

2. Tính diện tích của phần mặt: $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}, (a > 0, b > 0)$ nằm trong mặt trụ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Tính diện tích của phần mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ:

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right), \quad (a > 0).$$

4. Tính diện tích phần mặt: $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$, ở góc phần 8 thứ nhất.

Bài 2. Tính tích phân:

1. $\iint\limits_S \left(2x + \frac{4y}{3} + z\right) dS$ trong đó S là mặt: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$; $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

2. $\iint\limits_S x\sqrt{y^2 + 4}dS$ trong đó S là phần mặt: $y^2 + 4z = 16$ giới hạn bởi: $x = 0, x = 1, z = 0$.

3. $\iint\limits_S (x + 2z)dS$, với S là phần mặt phẳng: $x + y + z = 1$; $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

4. $\iint\limits_S zdS$, với S là phần mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trên hình nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. $\iint\limits_S (x + y)dS$, với S là phần mặt nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong hình trụ: $x^2 + y^2 = 2x$.

6. $\iint\limits_S x^2 dS$, với S là phần mặt trụ: $x^2 + y^2 = 4$ nằm giữa 2 mặt phẳng: $\begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

7. $\iint\limits_S ydS$, với S là phần mặt nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ giới hạn bởi: $\begin{cases} y = 1 \\ y = 1 + \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$.

8. $\iint\limits_S zdS$, với S là phần mặt nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm dưới mặt phẳng: $z = 2$.

9. $\iint\limits_S \frac{x}{x^2 + y^2} dS$, với S là phần mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 4; x \le 0, y \le 0, z \le 0$.

10. $\iint\limits_S xdS$, với S là phần mặt trụ: $x^2 + y^2 = 1$ nằm giữa 2 mặt phẳng: $z = 0, z = 4$.

11. $\iint\limits_S zdS$, với S là phần mặt trụ: $x^2 + z^2 = 1$ phía trong mặt nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bài 3. Tính tích phân:

1. $\iint\limits_S xyzdxdy$, phía dương của S là phía ngoài của mặt cầu xác định bởi:

$$x^2+y^2+z^2=1;\ x\geq 0, y\geq 0.$$

2. $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, phía dương của S là phía ngoài của mặt cầu xác định bởi:

$$x^2+y^2+z^2=4;\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0.$$

3. $\iint\limits_S xdydz+dzdx+xz^2dxdy$, phía dương của S là phía ngoài của mặt cầu xác định bởi: $x^2+y^2+z^2=1;\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$.

4. $\iint\limits_S x^2yz^2dxdz$, phía dương của S là phía ngoài của mặt cầu xác định bởi:

$$x^2+y^2+z^2=9;\ x\geq 0, y\leq 0, z\geq 0.$$

5. $\iint\limits_S (2x+y^2)dydz+(3z+x^2)dxdy$, với S là phần của mặt: $z=x^2+y^2$ nằm trong hình trụ: $x^2+y^2=1$, phía dưới là phía dương nhìn từ hướng dương của Oz.

6. $\iint\limits_S xdydz$, với S là phần của mặt: $z=x^2+y^2, z\leq 6$; phía dưới là phía dương nhìn từ hướng dương của Oz.

7. $I=\iint\limits_S (x+2y)dydz+(y+z)dzdx+(2x-z)dxdy$, với S là phần mặt nón: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong hình trụ $x^2+y^2=4$, phía dưới là phía dương, nhìn từ hướng dương của Oz.

8. $I=\iint\limits_S (x+z)dxdy$, với S là biên của vật thể được giới hạn bởi các mặt: $z=x^2+y^2$, $z=4$, phía ngoài là phía dương.

9. $I=\iint\limits_S (x+2y)dydz+(y+2z)dzdx+(z+2x)dxdy$, với S là phần mặt nón: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ bị cắt bởi mặt phẳng $z=2$, phía dưới là phía dương, nhìn từ hướng dương của Oz.

10. $I=\iint\limits_S xdydz+ydzdx+(z^2+1)dxdy$, với S là nửa trên mặt cầu: $x^2+y^2+z^2=2x$ (phần $z\geq 0$), phía trong là phía dương.

11. $I=\iint\limits_S xdydz+ydzdx+(z+1)dxdy$, với S là phần mặt: $z=x^2+y^2$ nằm dưới mặt phẳng $x+z=2$, phía dưới là phía dương, nhìn từ hướng dương Oz.

12. $I=\iint\limits_S (x+z)dydz+2ydzdx+z^2dxdy$, với S là phần mặt trụ: $x^2+y^2=4$ nằm giữa hai mặt phẳng $z=0, z=1$, phía ngoài là phía dương.

13. $I = \iint\limits_S (z + x + 2)dxdy$, với S là phần mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm ở góc phần 8 thứ nhất, phía trong là phía dương.

14. $I = \iint\limits_S (x + 2y)dydz + (y + 2z)dzdx + z^2dxdy$, với S là phần mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trên mặt nón: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (nhìn từ hướng dương của Oz), phía ngoài mặt cầu là phía dương.

Chương 6: Phương trình vi phân

Bài 1. Giải phương trình vi phân cấp 1:

1. $y\cos\frac{x}{y}dx-\left(y+x\cos\frac{x}{y}\right)dy=0$

2. $y'=\frac{2x+3y+2}{x+y-2}$

3. $\left(1+x^2\right)y'+y=\arctan x$

4. $\left(x^2+1\right)y'+xy=xy^2$

5. $y'+\frac{y}{5x}=4x^2y^5$

6. $x'+\frac{x}{y}=-x^2y$

7. $\frac{x'}{x^2}-\frac{y}{2x}=3y^3$

8. $\left(4xy^2+y\right)dx+\left(4x^2y+x\right)dy=0$

9. $\left(y^2+5\right)^{\frac{3}{2}}dx+\left(y^5+3xy\sqrt{5+y^2}\right)dy=0$

10. $y'=\frac{3y^2}{x^2}-2$

11. $\left(2x^3-xy^2\right)dx+\left(2y^3-x^2y\right)dy=0$

12. $ydx+\left(x+x^2y\right)dy=0$

13. $e^ydx+\left(xe^y-2y\right)dy=0$

14. $xdx+\left(2x+y\right)dy=0$

15. $(x+y+1)dx+(x-y+3)dy=0$

16. $\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)dx+xdy=0$, $x>0$

17. $\left(3x^2+y^2\right)y+\left(y^2-x^2\right)xy'=0$

18. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$

19. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

20. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

21. $e^{2x}\left(1+y^2\right)dx-\left(1+e^x\right)dy=0$

22. $y^2dx-\left(2xy+3\right)dy=0$

Bài 2. Giải phương trình vi phân cấp 2:

1. $y''-4y'+4y=\frac{1}{5}\sin 2x$

2. $y''-y'=(12-5x)e^x$

3. $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

4. $y''-y=\frac{e^x}{e^x+1}$

5. $y''+y=\frac{1}{\cos x}$

6. $y''-3y'=1-3x$

7. $y''+5y'=2e^{-5x}$

8. $y''-2y'=xe^{2x}$

9. $y''+4y'=e^{-4x}$

10. $y''+y=\cos 3x$

11. $y''-2y'=e^{2x}$

12. $y''-2y'=9-4x$

13. $y''+y=-3\cos 2x+\frac{9x\sin 2x}{4}$

14. $y''+y=x\cos x$

15. $y''-2y'+2y=e^x\sin x$

16. $y'''+y''-2y'=x-e^x$

17. $y''-4y'+4y=\sin x\cos 2x$

18. $y''+y=xe^x+3e^{-x}$