

Đồ họa máy tính

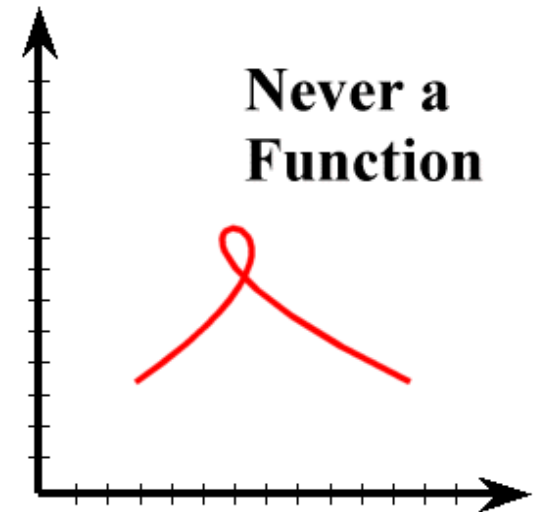
Đường cong và bề mặt I

Biểu diễn các đối tượng cong

- Bảng tham số
- Qua ảnh của phương trình

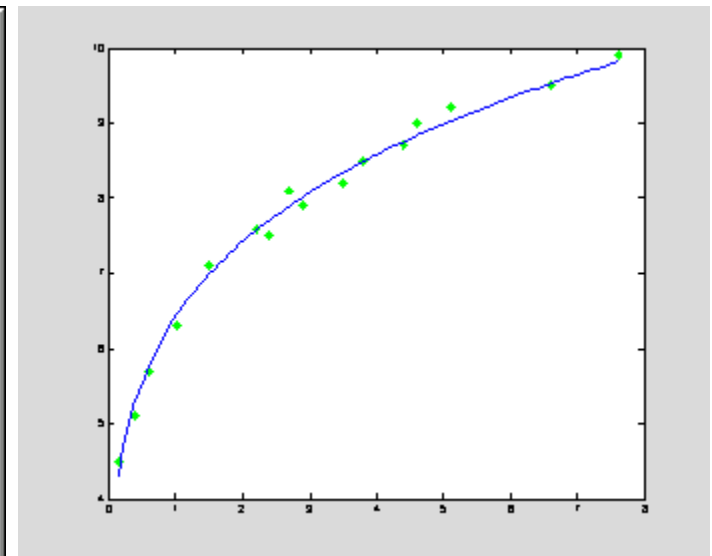
Tại sao lại dùng tham số?

- Các đường cong tham số rất linh hoạt.
- Chúng không cần phải là hàm
 - Đường cong có thể có nhiều giá trị ứng với một tọa độ x.
- Số lượng tham số thường cho thấy chiều của vật thể
 $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$



Mô tả một đường cong và bề mặt

- Mô hình hóa đối tượng một cách chính xác với một sai số cho phép
- Mô hình theo kiểu phác thảo gần đúng



Bài toán xấp xỉ tổng quát

- Hàm g là một xấp xỉ tốt với các tính chất sau:
 1. Hàm g rất gần f theo một tính chất nào đó
 2. Các hệ số c_i là duy nhất

Bài toán xấp xỉ tổng quát

- Cho một tập cố định các hàm $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, tìm các hệ số c_i sao cho:

$$g(x) = \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x)$$

là một phép tính xấp xỉ đối với một hàm $f(x)$ nào đó. Hàm φ_i thường được gọi là các *hàm cơ sở (basic function)*

Xấp xỉ bình phương tối thiểu

- Hàm $g(x, c_1, c_2, \dots, c_k)$ mà tối thiểu

$$E(c_1, c_2, \dots, c_k) = \sum_{j=1}^s \left(f(x_j) - g(x_j; c_1, c_2, \dots, c_k) \right)^2$$

được gọi là *xấp xỉ bình phương tối thiểu* (*least squares approximation*) của hàm $f(x)$

Một số ràng buộc

1. Những ràng buộc nội suy:

$g(x_j) = f(x_j)$ với một số điểm x_j cố định.

2. Kết hợp điều kiện (1) với những điều kiện về độ trơn, ví dụ như điều kiện về đạo hàm của g và f đồng nhất tại điểm x_j .

3. Các ràng buộc về tính trực giao

$(f - g) \bullet \varphi_i = 0$ với mọi i .

4. Những ràng buộc về hình dạng trực quan, ví dụ như độ cong của đường cong và bề mặt.

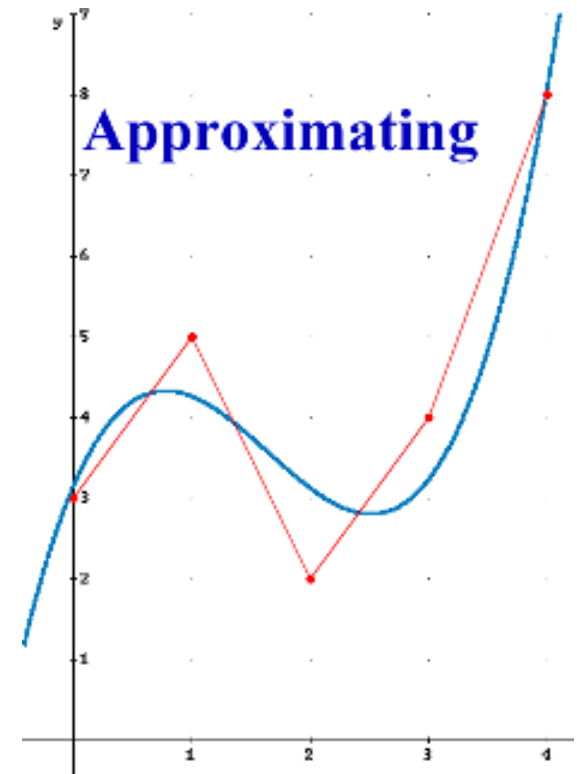
Đường cong tham số

$$p : [a, b] \rightarrow R^m, p(u) = (p_1(u), p_2(u), \dots, p_m(u))$$

với các hàm thành phần p_i của p là các hàm giá trị thực thông thường với một biến thực.

Mô tả một đường cong

- Điểm điều khiển:
 - Là tập các điểm ảnh hưởng đến hình dạng của đường cong.
- Knots:
 - Các điểm nằm trên đường cong.
- Đường cong nội suy (Interpolating spline):
 - Các đoạn cong đi qua điểm điều khiển.
- Đường cong xấp xỉ (Approximating spline):
 - Các điểm điều khiển ảnh hưởng đến hình dáng của đoạn



Phép nội suy Lagrange

- Bài toán: cho các điểm (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., và (x_n, y_n) , tìm một đa thức $p(x)$, để $p(x_i) = y_i$ với $i = 0, 1, \dots, n$.
- Đa thức Lagrange:

$$L_{i,n}(x) = L_{i,n}(x; x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(x)$$

Phép nội suy Lagrange

- Hạn chế
 - Bậc lớn nếu n lớn
 - Tạo vết gợn không mong muốn

Các đoạn cong

Chúng ta có thể biểu diễn một đường cong với độ dài bất kỳ bằng một chuỗi các đoạn cong nối với nhau.

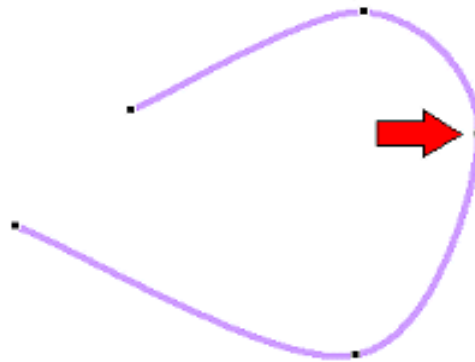
Chúng ta quan tâm đến các đoạn này nối với nhau như thế nào

...

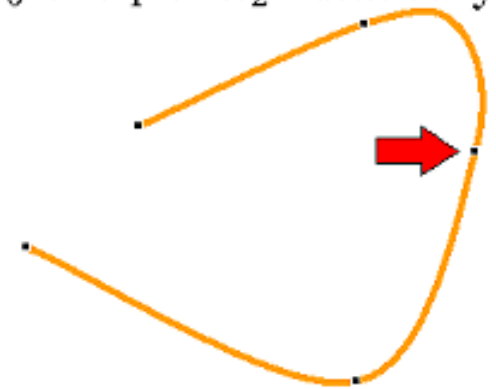
C_0 continuity



C_0 & C_1 continuity



C_0 & C_1 & C_2 continuity



Đường cong tham số bậc 3 (Parametric Cubic Curves)

- Để đảm bảo tính liên tục C_2 các hàm của chúng ta phải có bậc ít nhất là 3.
- Đường cong cubic có 4 bậc tự do và thay đổi 4 thứ.
- Sử dụng thức: $x(t)$ có bậc n là một hàm của t . - $y(t)$ và $z(t)$ cũng tương tự và được xử lý độc lập.
- Có nghĩa là:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n a_i x_i$$

Đường cong Hermite

- 4 bậc tự do, 2 để điều khiển tính liên tục C_0 và C_1 tại mỗi đầu.
- Sử dụng đa thức để biểu diễn đường cong.
- Xác định: $x = X(t)$ theo các giá trị x_0 , x_0' , x_1 , x_1'

Bây giờ:

$$X(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$\text{và } X'(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

Tìm các hệ số Hermite

Thay t vào hai đầu:

$$x_0 = X(0) = a_0$$

$$x_0' = X'(0) = a_1$$

$$x_1 = X(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$

$$x_1' = X'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1$$

Và lời giải là:

$$a_0 = x_0$$

$$a_1 = x_0'$$

$$a_2 = -3x_0 - 2x_0' + 3x_1 - x_1'$$

$$a_3 = 2x_0 + x_0' - 2x_1 + x_1'$$

Ma trận Hermite: M_H

Đa thức kết quả có thể được biểu diễn qua dạng ma trận:

$$X(t) = t^T M_H q \quad (q \text{ là véc-tơ điều khiển})$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0' \\ x_1 \\ x_1' \end{bmatrix}$$

Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa đa giác tham số cho các tọa độ một cách độc lập $X(t)$, $Y(t)$ và $Z(t)$

Các hàm Hermite cơ bản

$$F_1(x) = (x-1)^2(2x+1)$$

$$F_2(x) = x^2(3-2x)$$

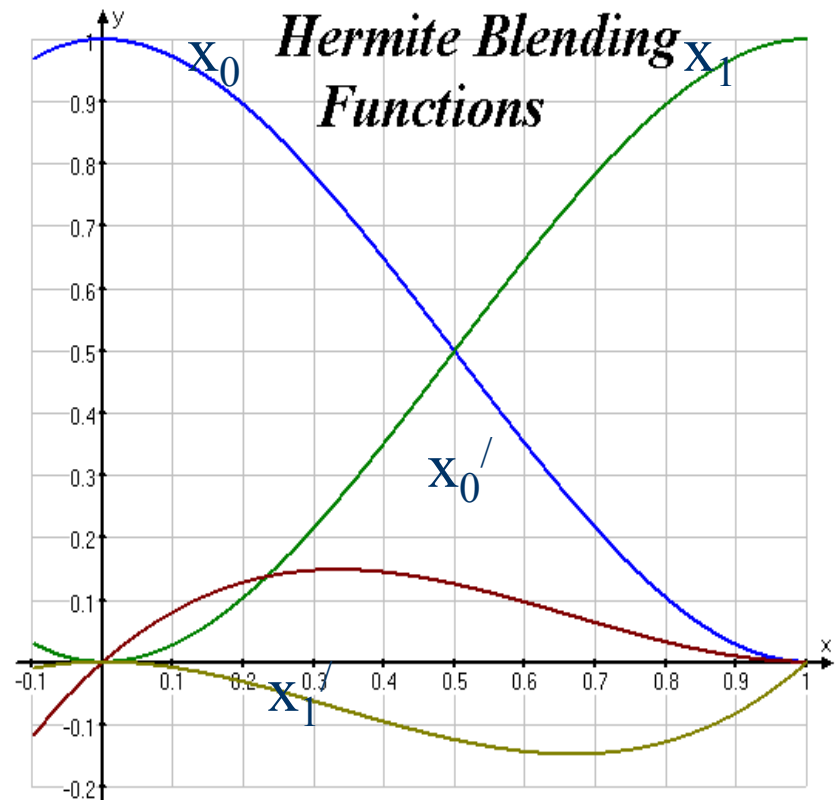
$$F_3(x) = (x-1)^2 x$$

$$F_4(x) = x^2(x-1)$$

Các hàm Hermite cơ bản

Đồ thị cho thấy hình dạng của bốn hàm cơ bản (hay còn gọi là *blending functions*).

Chúng được gán nhãn với thành phần trọng số của nó.



Bài toán nội suy ghép đoạn Hermite

Cho các bộ ba (x_0, y_0, m_0) , (x_1, y_1, m_1) , ..., và (x_n, y_n, m_n) , tìm các đa thức bậc ba $p_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, để

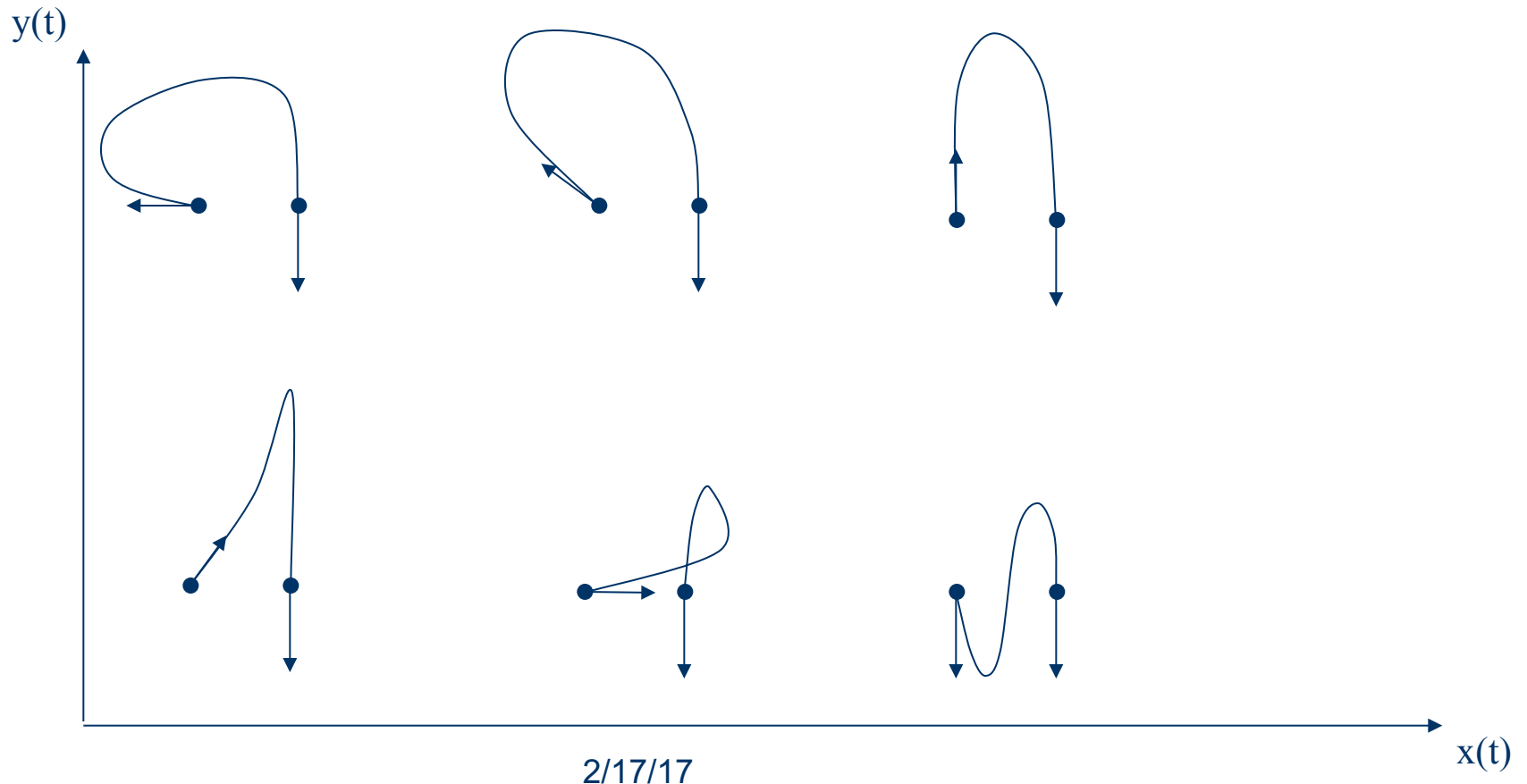
$$p_i(x_i) = y_i,$$

$$p_i'(x_i) = m_i,$$

$$p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \text{ và}$$

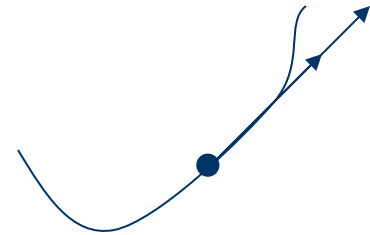
$$p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$$

Họ các đường cong Hermite



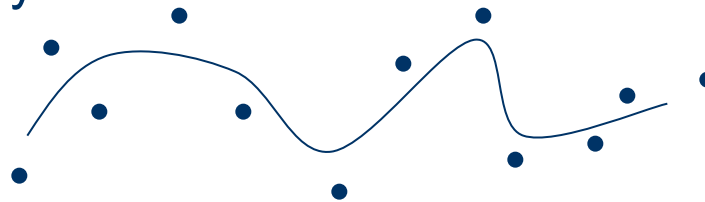
Hiển thị các đường cong Hermite

- Đơn giản :
 - Lặp qua t – chọn đơn vị lặp phù hợp.
 - Tính giá trị x .
 - Và y & z một cách độc lập.
 - Vẽ các đoạn nối liền các điểm.
- Nối các đoạn:
 - Các điểm đầu mút trùng nhau để có liên tục C_0
 - Véc tơ pháp tuyến trùng nhau để có liên tục C_1



Nội suy spline

- Một đường spline bậc m và cấp $m+1$ là một hàm $S: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ mà tồn tại các số thực x_i , $i = 0, \dots, n$ với $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$, để
 1. S là một đa thức có bậc $\leq m$ trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, với $i = 0, \dots, n-1$ và
 2. S là một hàm C^{m-1} .
 - x_i được gọi là các *điểm nút* (*knot*)
 - (x_0, x_1, \dots, x_n) được gọi là các *vecto điểm nút* có độ dài $n+1$
 - Các đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ được gọi là các *nhịp* (*span*).
 - Một nút x_i thỏa mãn điều kiện $x_{i-1} < x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+d-1} < x_{i+d}$ thì x_i được coi là một *nút d bội*.
 - S được gọi là đường *spline tuyến tính*, bậc hai hay bậc ba nếu nó có bậc là 1, 2 hay 3



Bài toán nội suy spline

- Cho một số nguyên k và các số thực x_i, y_i ($i = 0, \dots, n$) với $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tìm spline $g(x)$ bậc k sao cho x_i là nút của g và $g(x_i) = y_i$.

Bài toán nội suy spline

- Cho các điểm $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, tìm các đa thức bậc ba $p_i(x)$, để với i chạy từ 0 đến $n-1$, ta có:

$$p_i(x_i) = y_i$$

$$p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

và với i chạy từ 1 đến $n-1$ ta có:

$$p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i)$$

$$p_i''(x_i) = p_{i-1}''(x_i)$$

Bài toán nội suy spline

1. Điều kiện kết thúc kẹp

Hệ số góc m_0 và m_n xác định rõ ràng

2. Điều kiện kết thúc Bessel

m_0 và m_n là hệ số góc của đường parabol nội suy 3 điểm đầu và 3 điểm cuối

3. Điều kiện kết thúc tự nhiên

Đạo hàm bậc 2 của đường spline triệt tiêu ở các đầu mút

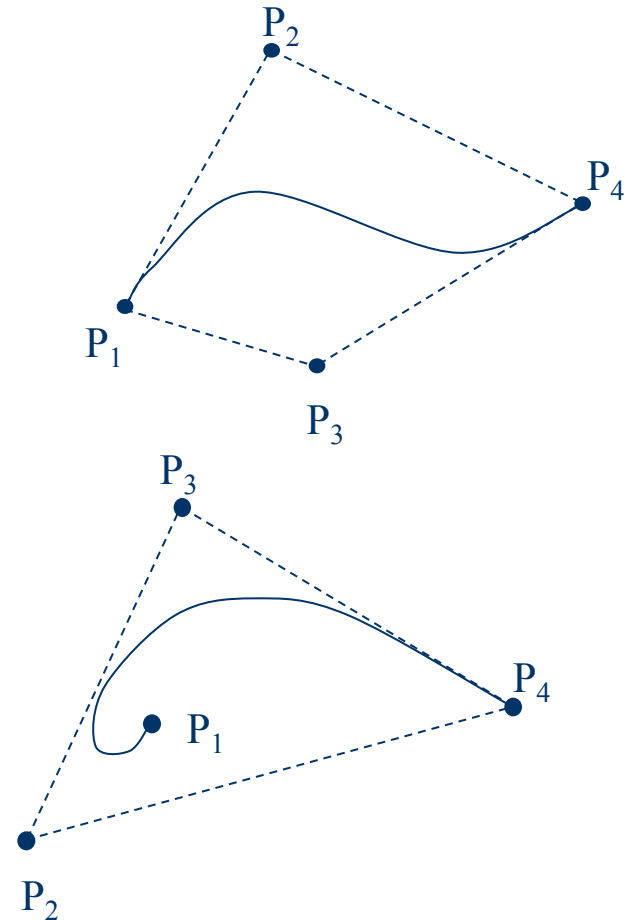
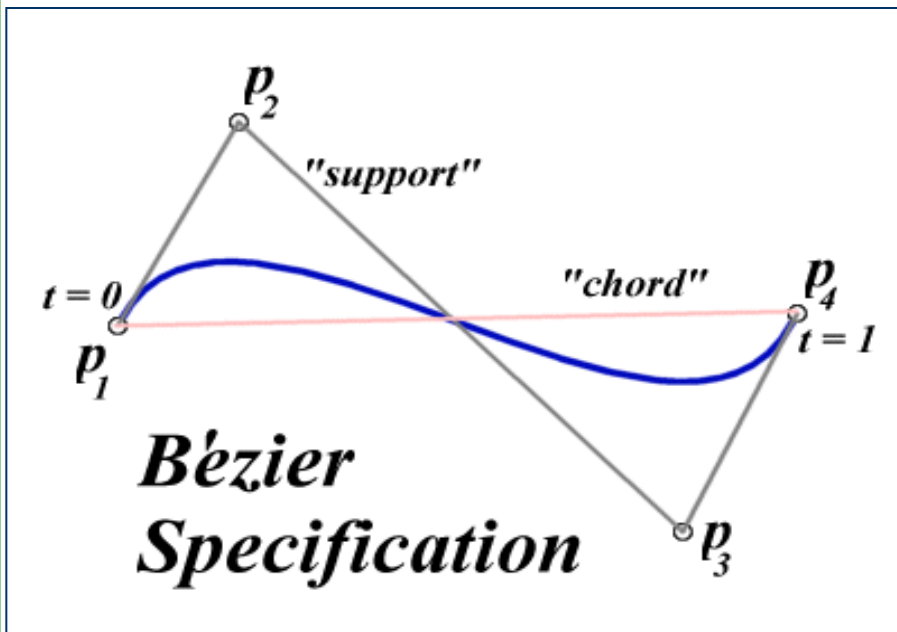
4. Điều kiện kết thúc lặp

Giá trị, đạo hàm bậc 1, bậc 2 bằng nhau tại hai đầu mút

Đường cong Bézier

- Đường cong Hermite khó để mô hình hóa – cần phải xác định các điểm và véc-tơ pháp tuyến.
- Sẽ dễ dàng hơn khi chỉ cần chỉ ra điểm.
- Pierre Bézier xác định 2 điểm đầu mút và 2 điểm điều khiển để xác định véc-tơ pháp tuyến.
- Có thể tính ra từ ma trận Hermite:
 - Hai điểm điều khiển xác định véc-tơ pháp tuyến

Đường cong Bézier



Ma trận Bézier

Trước hết chúng ta phải xác định các hàm cơ bản.

Cho một đa thức bậc n , chúng ta có n điểm điều khiển với các thành phần cho đến t^{n-1} như sau:

$$X(t) = \sum_{r=0}^{n-1} f_r q_r$$

$$f_r = {}^{n-1}C_{n-r-1} t^r (1-t)^{n-r-1} \quad \text{where} \quad {}^{n-1}C_r = \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$

Hệ số của t^r theo khai triển của $(t+(1-t))^{n-1}$

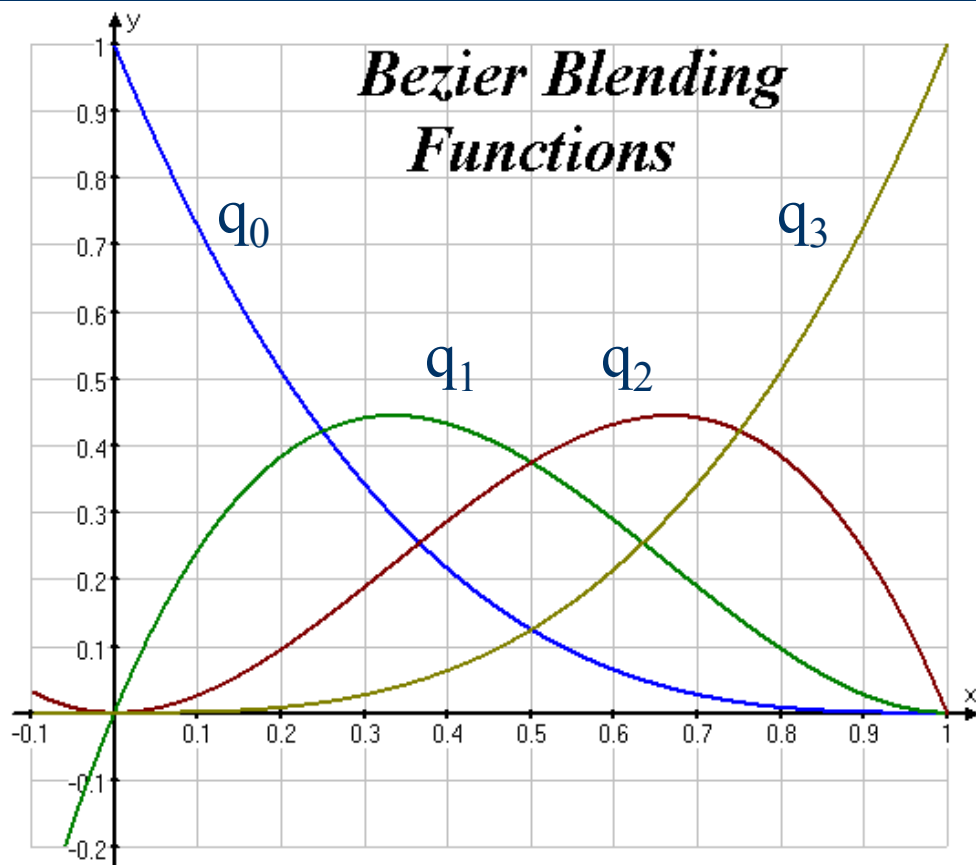
Ma trận Bézier bậc 3

- $X(t) = t^T M_B q$ (M_B là ma trận Bézier)
- Với $n=4$ và $r=0,1,2,3$ ta có:

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- Tương tự với $Y(t)$ và $Z(t)$

Hàm cơ bản Bézier



B-spline (Cox-de Boor)

Cho trước $n \geq 0$, $k \geq 1$, và một dãy không giảm các số thực $U = (u_0, u_1, \dots, u_{n+k})$, ĐN các hàm

$$N_{i,k} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, 0 \leq i \leq n,$$

một cách đệ quy như sau:

$$N_{i,1}(u) = 1, \quad \text{for } u_i \leq u < u_{i+1}, \text{ and} \\ = 0, \quad \text{elsewhere.}$$

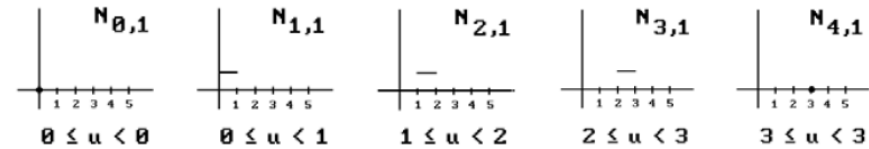
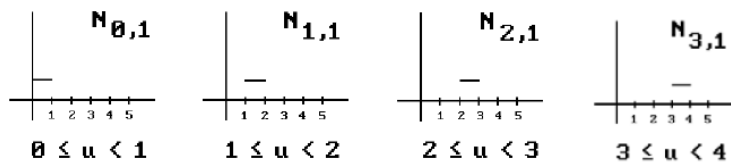
Nếu $k > 1$ thì:

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u),$$

trong đó nếu bất kỳ đại lượng nào có dạng $0/0$ thì ta sẽ thay nó bằng 0 .

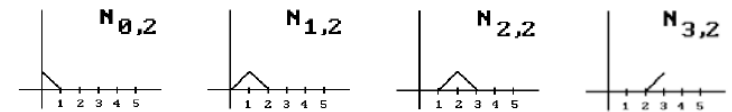
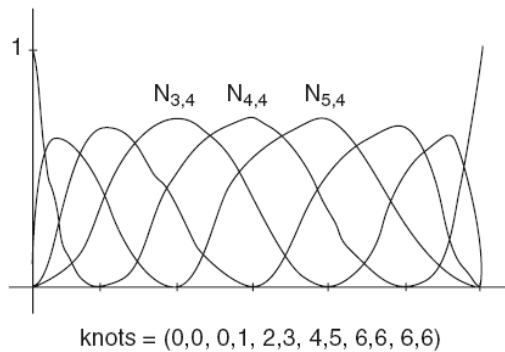
Hàm $N_{i,k}(u)$ được gọi là *B-Spline thứ i* hoặc *hàm B-Spline cơ sở bậc k và cấp $k-1$ theo vector nút U* .

B-spline (Cox-de Boor)



(a)

Ví dụ hàm $N_{i,1}(u)$ với $n=3, k=1$



(b)

Ví dụ các hàm $N_{i,j}(u)$ với $n=3, k=2$

Các B-spline bậc ba đồng nhất bị kẹp $N_{i,4}(u)$ với $n = 8$

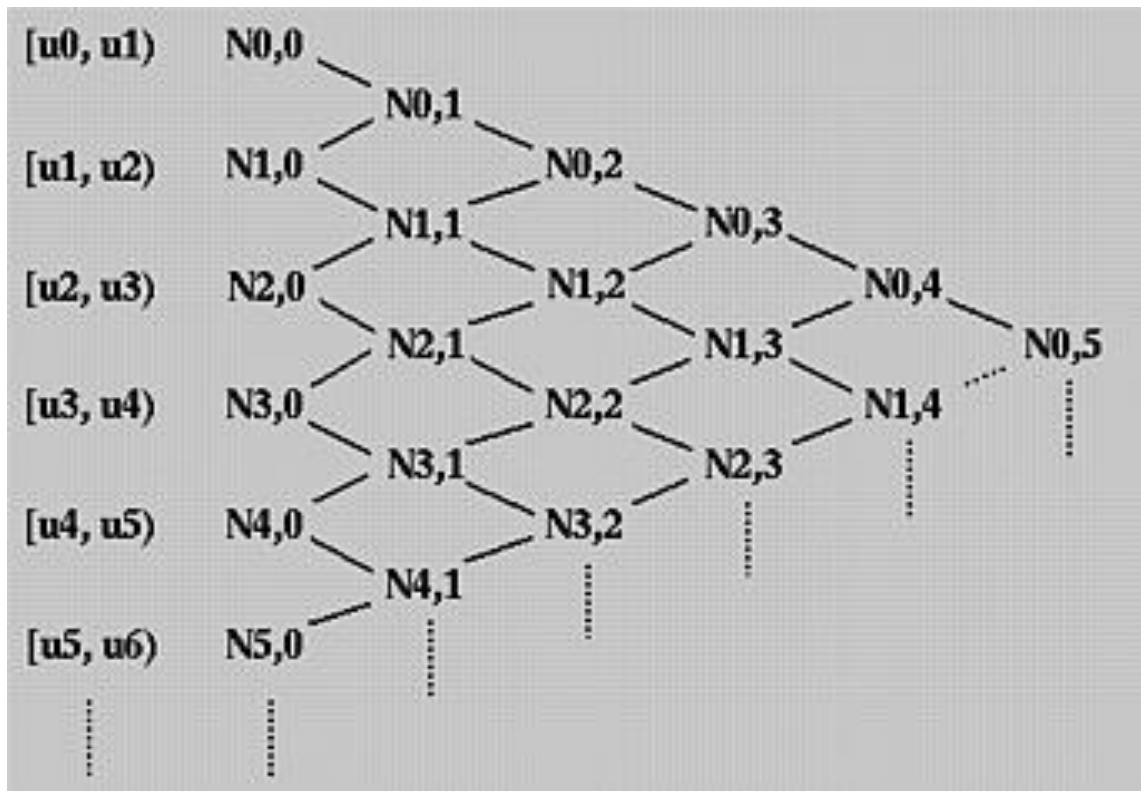
B-spline (Cox-de Boor)

Cho trước một dãy các điểm \mathbf{p}_i , với $i = 0, 1, \dots, n$, đường cong

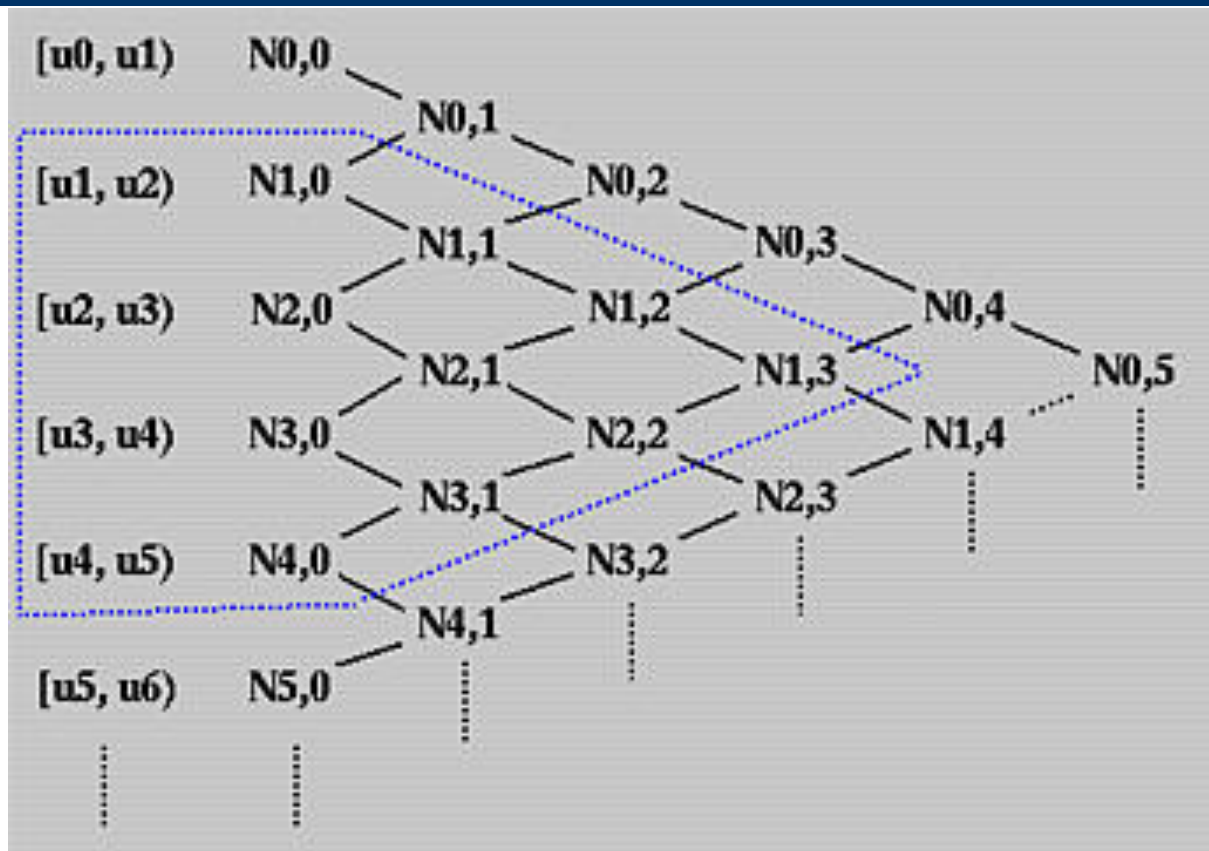
$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) \mathbf{p}_i.$$

được gọi là *đường cong B-Spline bậc k* (hoặc *cấp $m = k-1$*)
với các *điểm điều khiển* hay *các điểm Boor* \mathbf{p}_i và *vecto nút* $(u_0, u_1, \dots, u_{n+k})$.

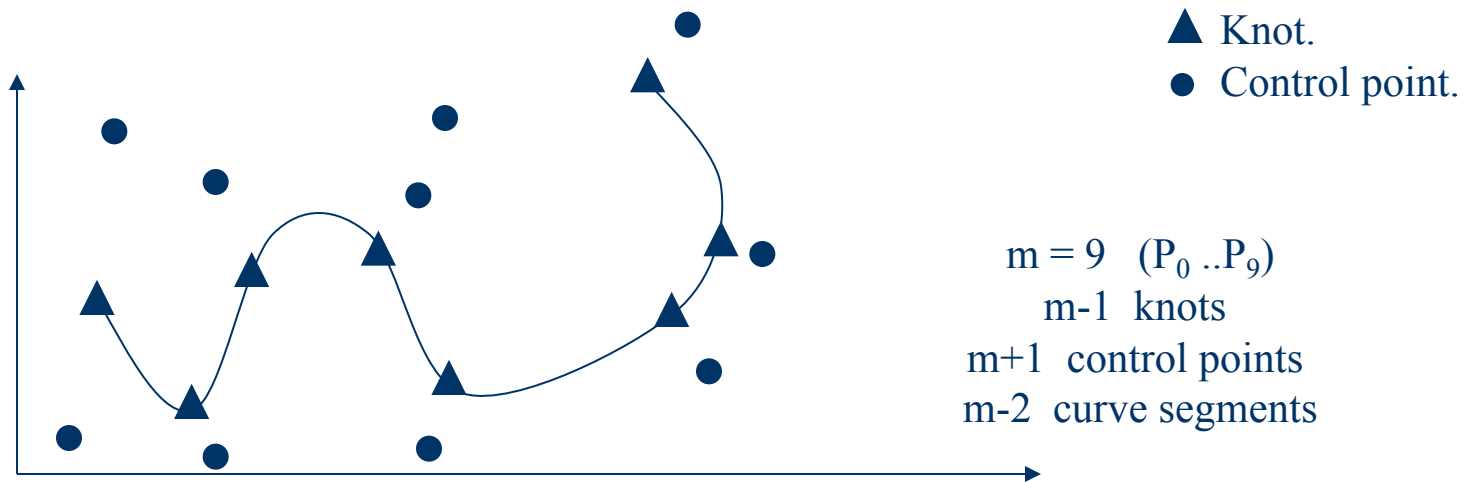
B-spline



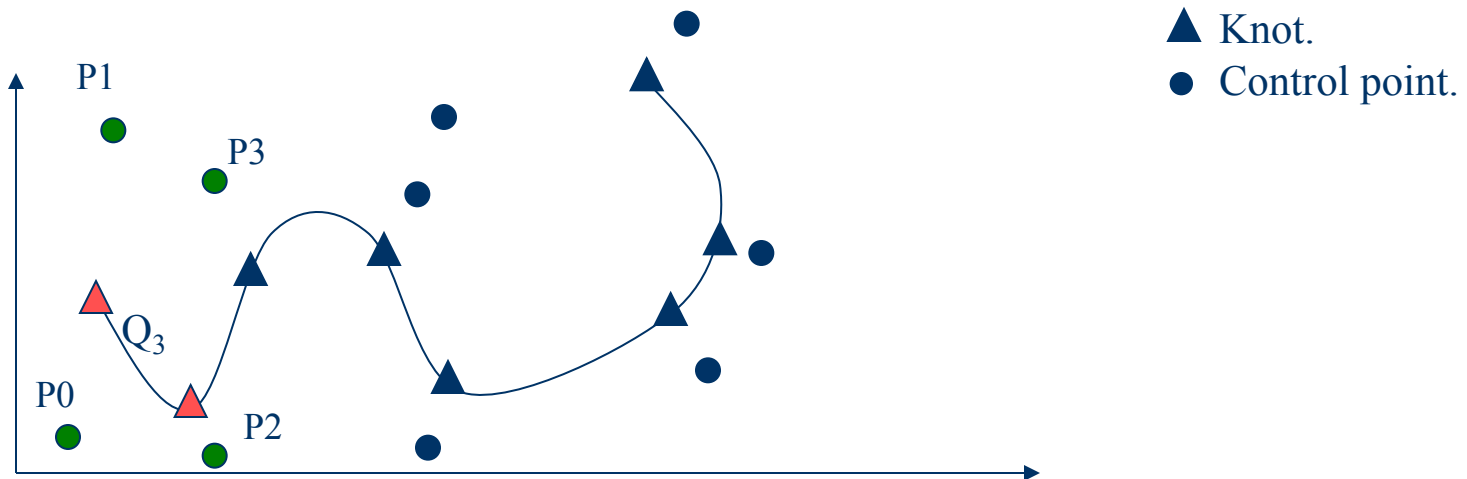
B-spline



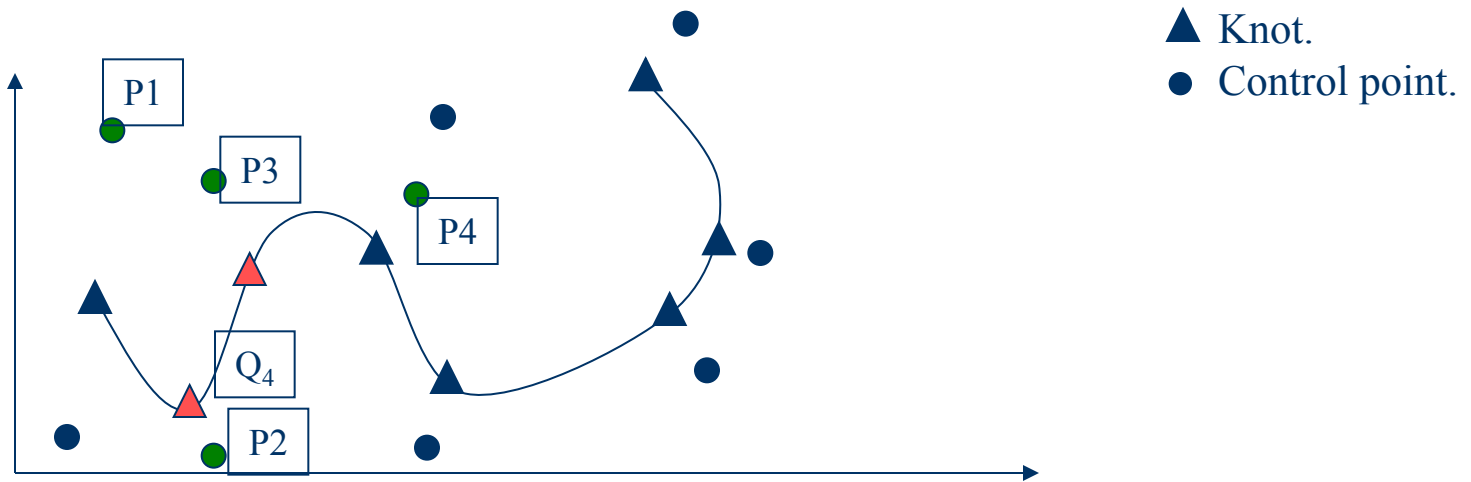
Các đường cong B-Spline



Các đường cong B-Spline

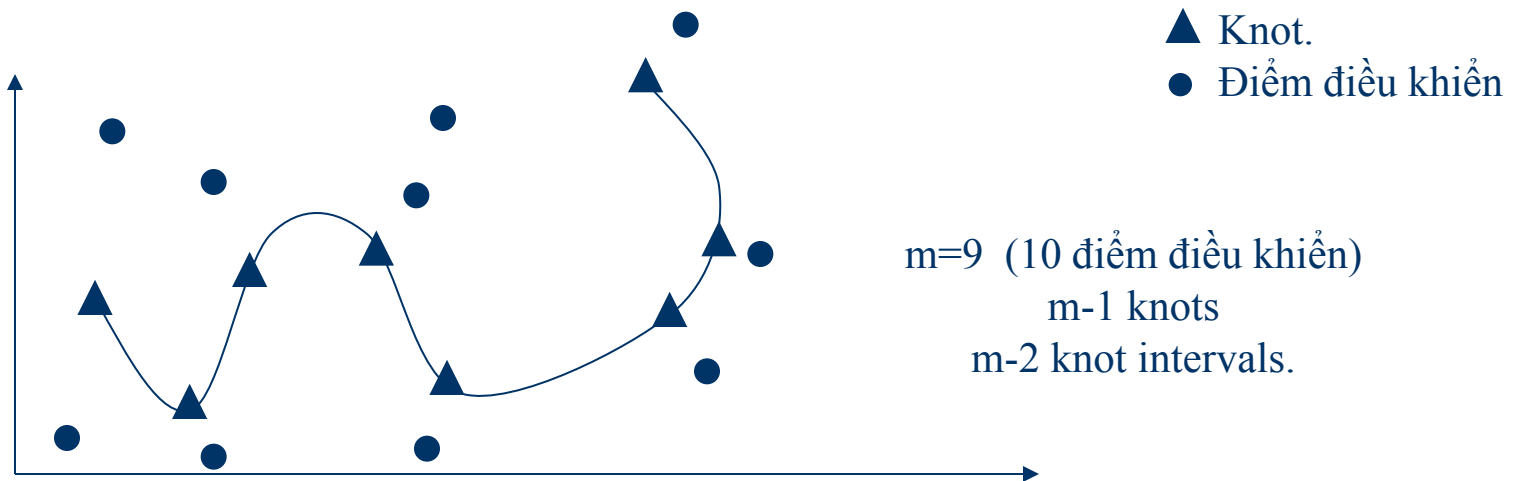


Các đường cong B-Spline



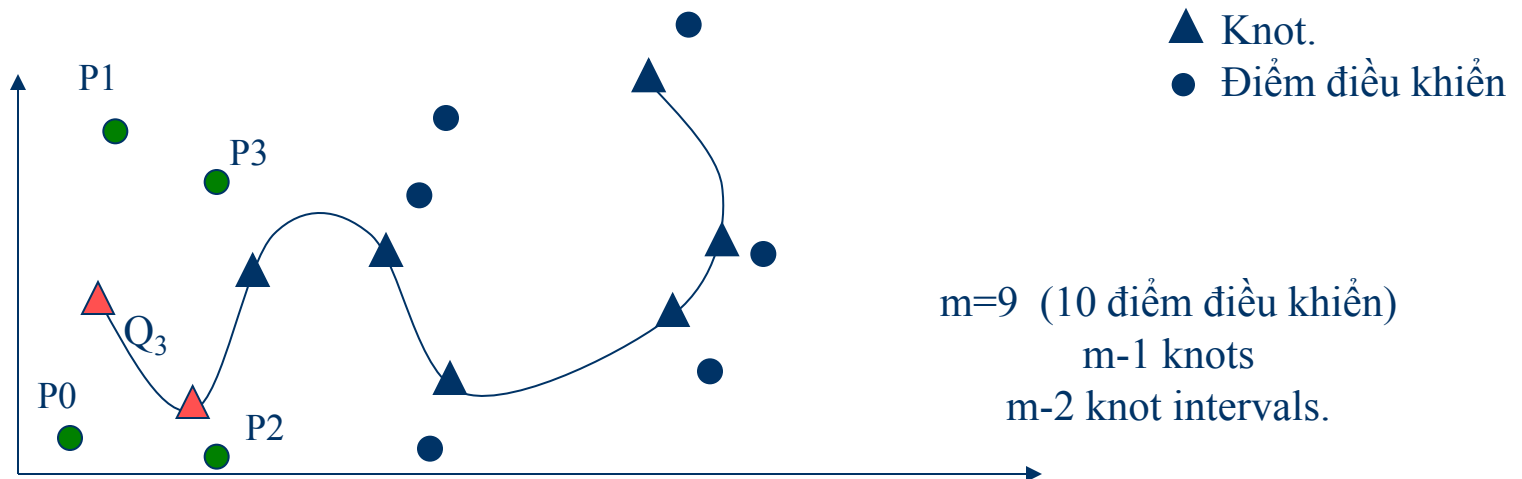
Các đường cong B-Spline

- Với mỗi $i \geq 4$, có một knot giữa Q_{i-1} và Q_i tại $t = t_i$.
- Điểm khởi tạo tại t_3 và t_{m+1} cũng là knot. Ví dụ sau mô tả đường cong với các điểm điều khiển $P_0 \dots P_9$:



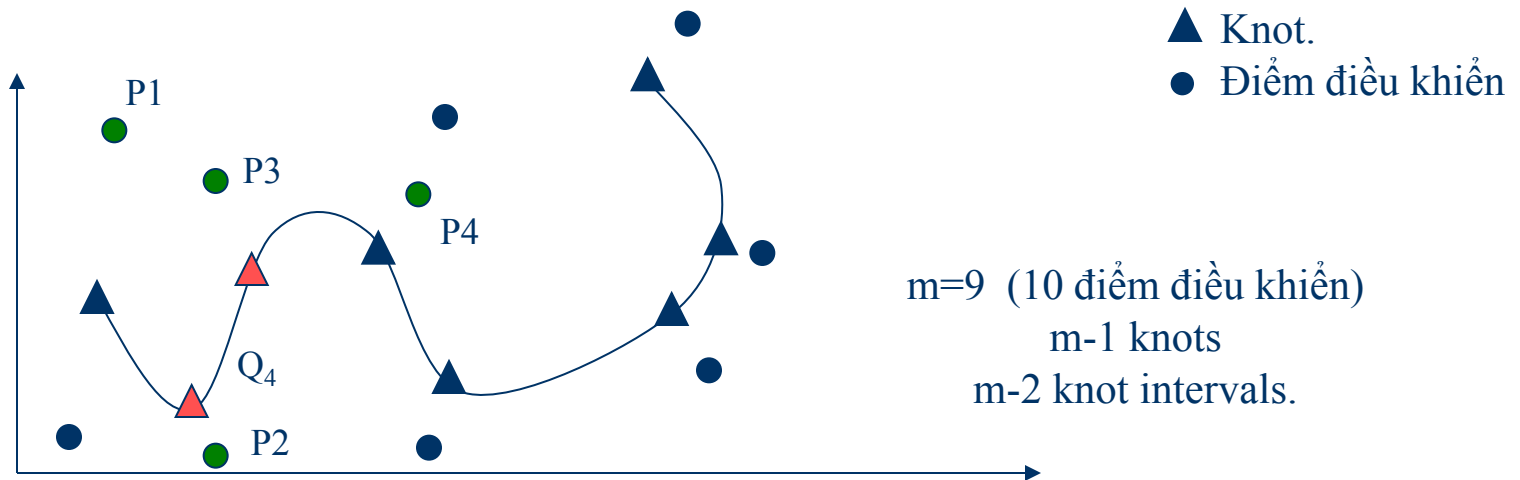
Các đường cong B-Spline

- Đoạn Q_3 được xác định bởi các điểm P_0 đến P_3 với khoảng $t_3 = 0$ đến $t_4 = 1$.



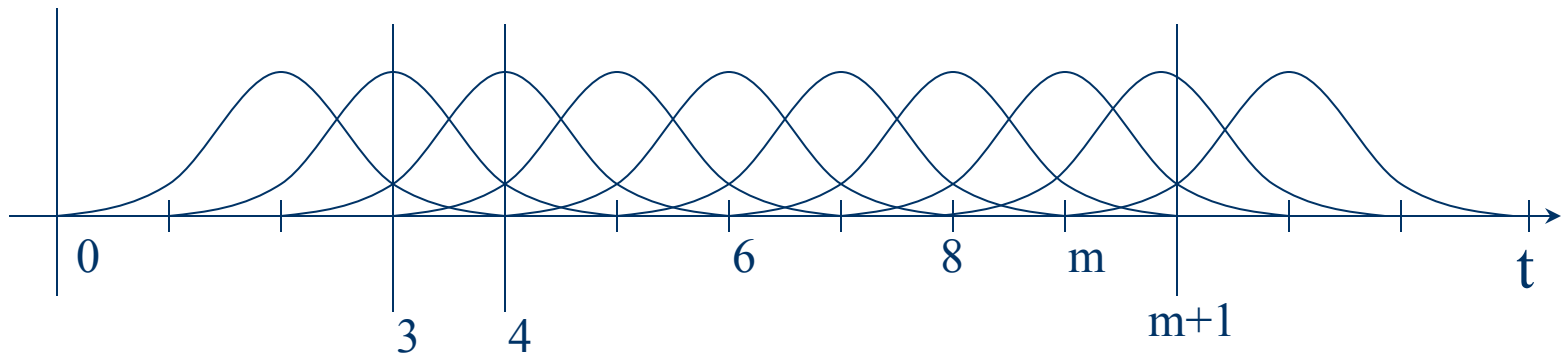
Các đường cong B-Spline

- Đoạn Q_4 được xác định bởi các điểm P_1 đến P_4 trong khoảng $t_4 = 1$ đến $t_5 = 2$.

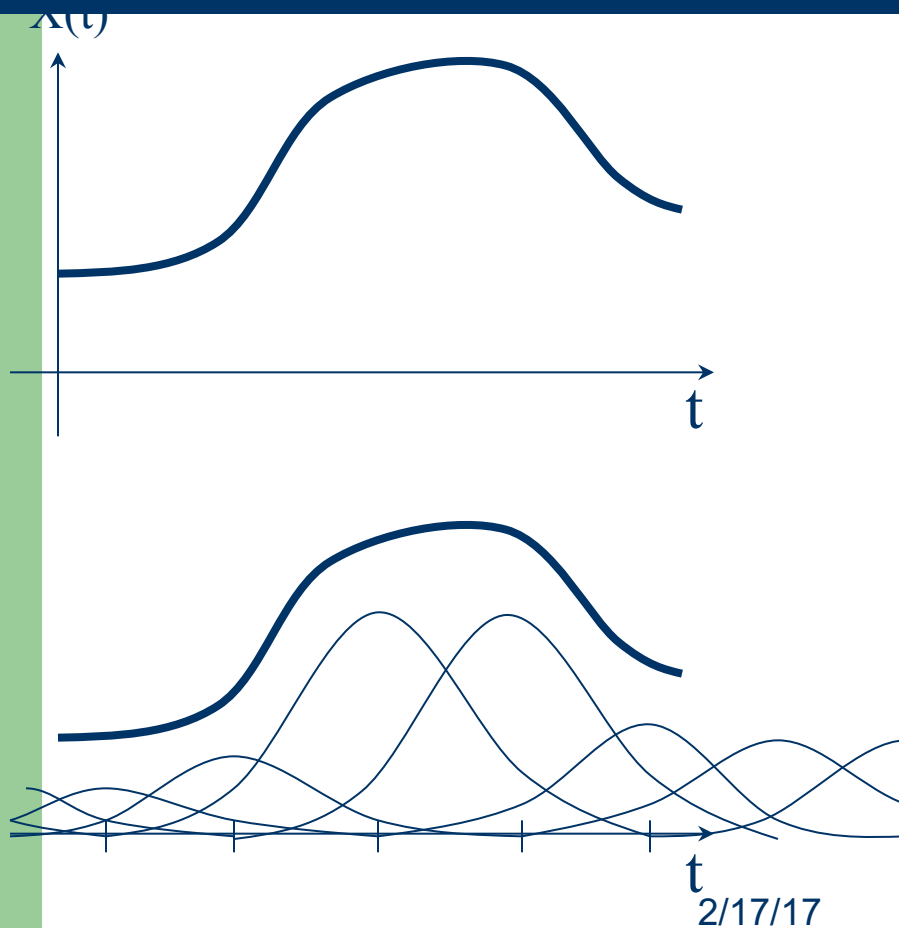


Các đường cong B-Spline

- Có thể thấy khoảng t_3 đến t_4 là khoảng đầu tiên vì đây là đoạn đầu tiên có sự xuất hiện của cả 4 hàm B-Spline.
- t_9 đến t_{10} là khoảng cuối cùng.



Tạo một đường cong



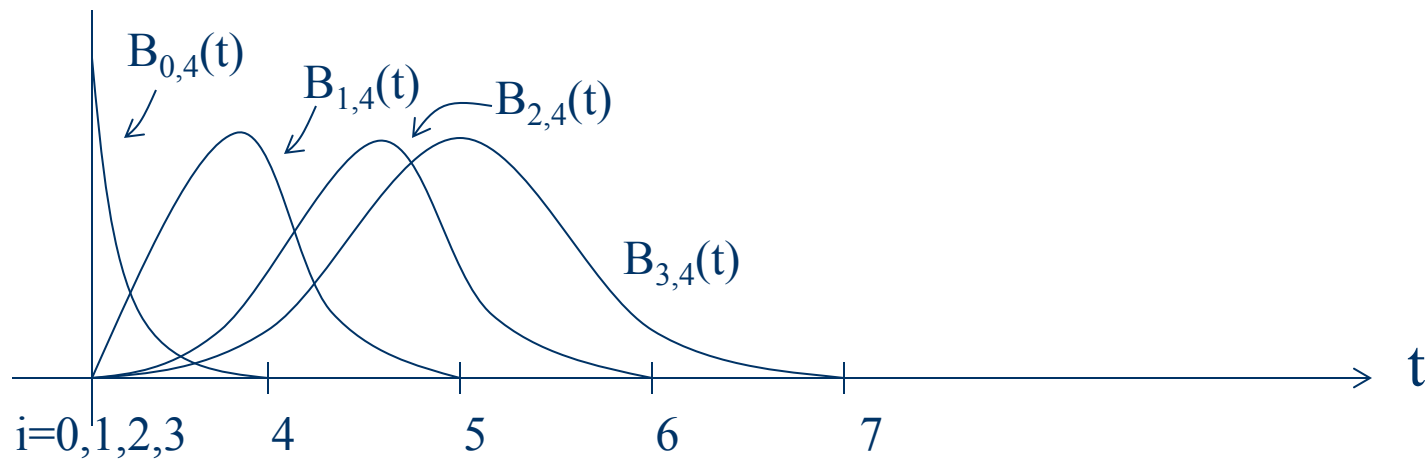
Bên trái là một đường cong được sinh ra.

Chúng ta có thể đường cong này được tạo nên bởi tổng có trọng số của các đường cơ bản B-Splines.

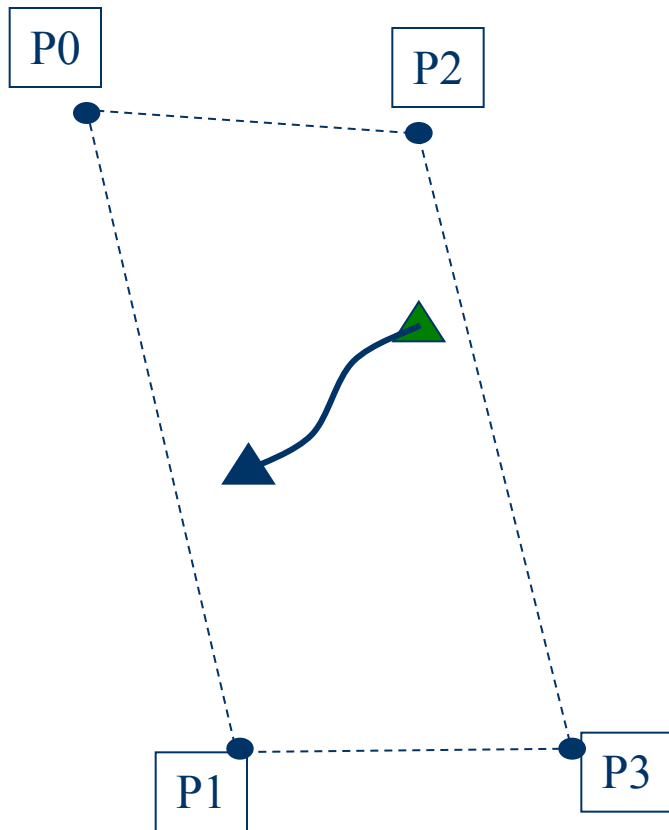
Độ mịn của đường cong B-Spline?

- Độ mịn tăng dần theo bậc của đường B-spline
- Chúng ta cũng có thể làm giảm độ liên tục của đường cong bằng cách có nhiều knot trùng với nhau, ví dụ $t_i = t_{i+1} = t_{i+2} = \dots$

Đường B-Splines với nhiều knots tại một điểm

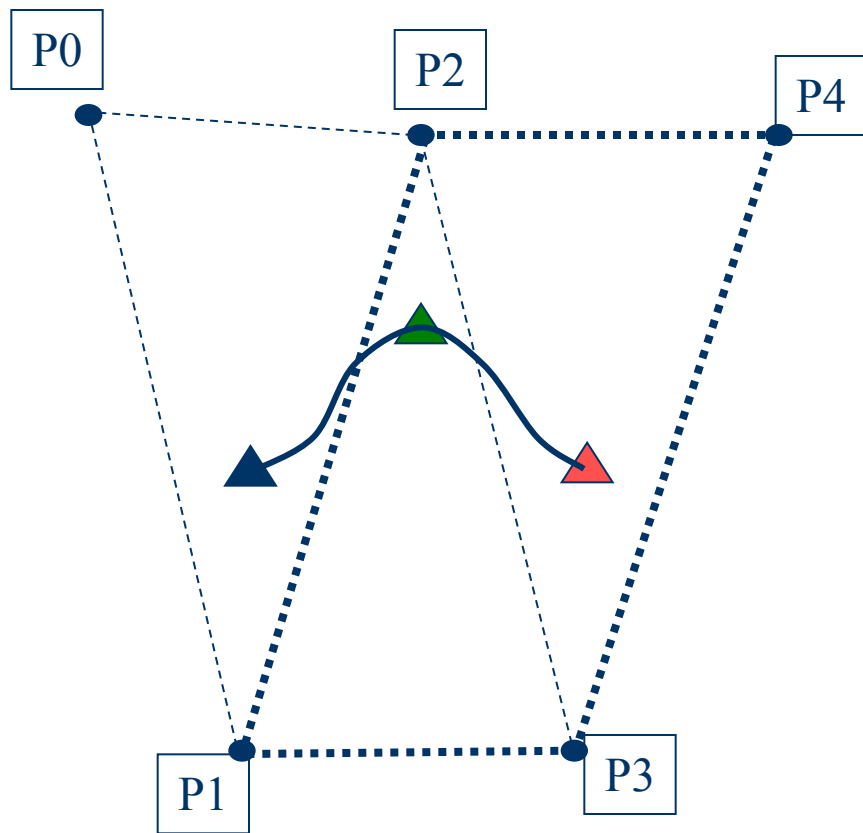


Ví dụ về tính liên tục của B-Spline

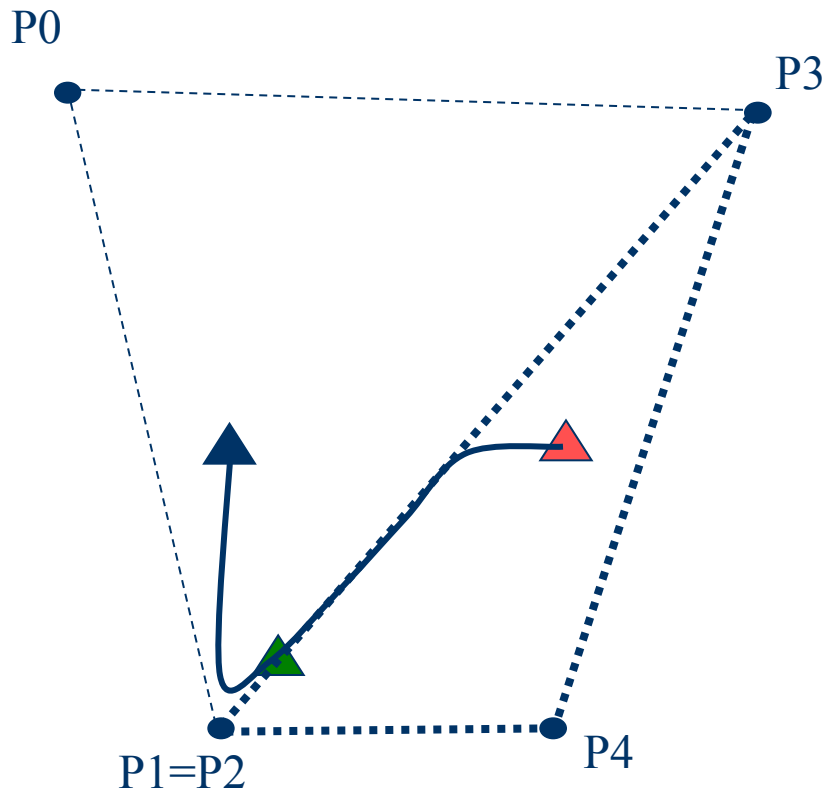


Với 4 điểm điều khiển
cho một đoạn.

Ví dụ về tính liên tục của B-Spline



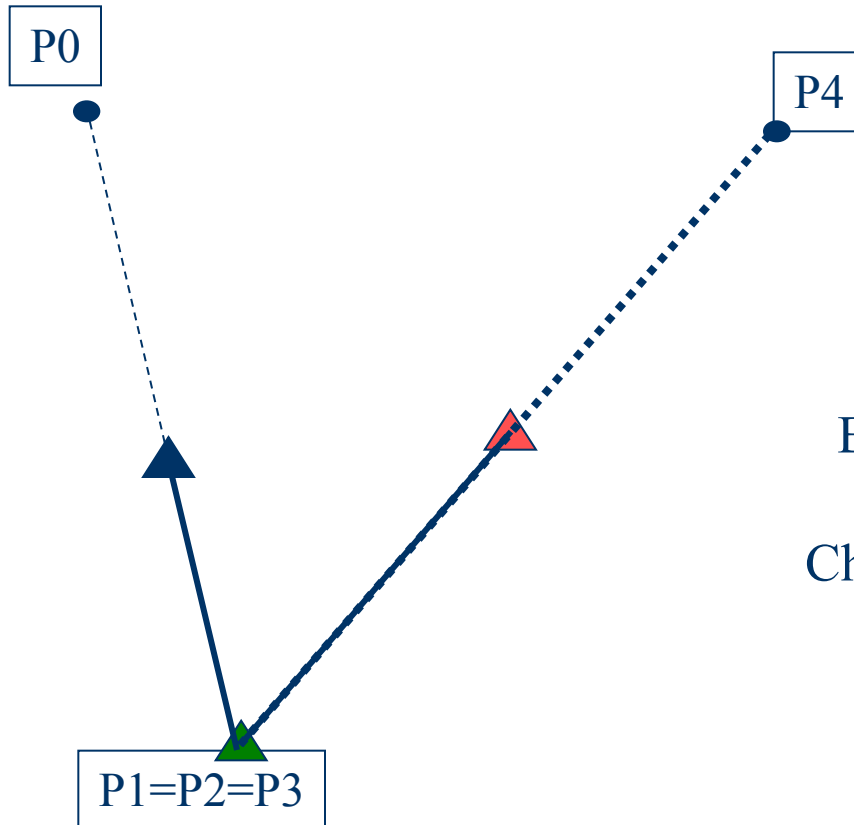
Ví dụ về tính liên tục của B-Spline



Hai knot trùng nhau

Chỉ có tính liên tục C_1

Ví dụ về tính liên tục của B-Spline



Ba knot trùng nhau

Chỉ có tính liên tục C_0

Tổng kết

- Các đường cong bậc 3
- Các đường cong B-splines