Đồ họa máy tính

Các phép biến đổi

Một số khái niệm cơ bản

- Một số đối tượng hình học cơ bản
  - Đại lượng vô hướng *s*
  - Vec-tơ *v*
  - Điểm $p' = p + s * v$
- Các phép biến đổi
  - Các loại biến đổi: quay, tịnh tiến, co dãn.
  - Biểu diễn ma trận
  - Thứ tự
- Mô hình hóa hình học
  - Mô hình hóa phân cấp
  - Các bề mặt đa diện.

Các phép biến đổi

Thế nào là một phép biến đổi?

- $P' = T(P)$

Tại sao phải sử dụng các phép biến đổi?

- Mô hình hóa
  - **Tạo ra các đối tượng với các tọa độ tự nhiên/ tiện lợi**
  - Nhiều phiên bản khác nhau của cùng một mẫu hình
  - **Các mối nối/khung xương – tạo hoạt ảnh robot**
- **Tầm nhìn**
  - **Cửa sổ và thiết bị độc lập với nhau**
  - **Camera ảo: Các phép chiếu song song và chiếu phối cảnh (perspective)**

Các loại phép biến đổi

Liên tục (Bảo tồn lân cận)

Một – một, có nghịch đảo

Phân chia theo các tính chất bất biến và tính chất đối xứng

Isometry (bảo tồn khoảng cách)

- Phản xạ (Reflections) – đảo hai bên trái và phải
- Quay + Tịnh tiến

Similarity (bảo tồn góc)

- Co dãn đồng nhất (Uniform scale)

Affine (bảo tồn các đường thẳng song song)

- Co dãn không đồng nhất (Non-uniform scales), shears or skews

Collineation (đường thẳng giữ là đường thẳng)

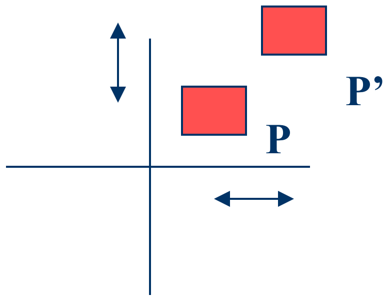
- Chiếu phối cảnh (Perspective)

Tịnh tiến 2D

Xét điểm P là P(x,y),

Tịnh tiến điểm P'(x',y') một khoảng cách d_x theo trục x, d_y theo trục y:

$x' = x + d_x \qquad y' = y + d_y$



Viết theo dạng véc-tơ

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Như vậy

P' = P + T

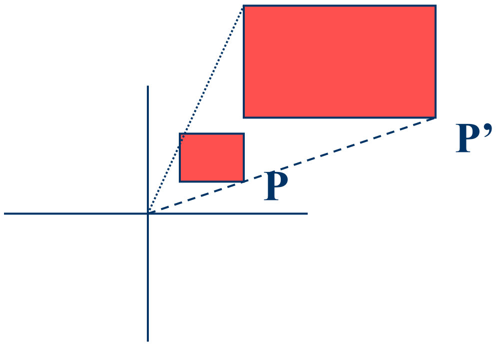
Co dãn 2D theo gốc tọa độ

Xét điểm P là P(x,y),

Co dãn điểm P'(x',y') với tỉ lệ s_x theo trục x, s_y theo trục y:

$x' = x * s_x$ $\quad\quad$ $y' = y * s_y$

Đặt



$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Do đó

$$P' = S \cdot P \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

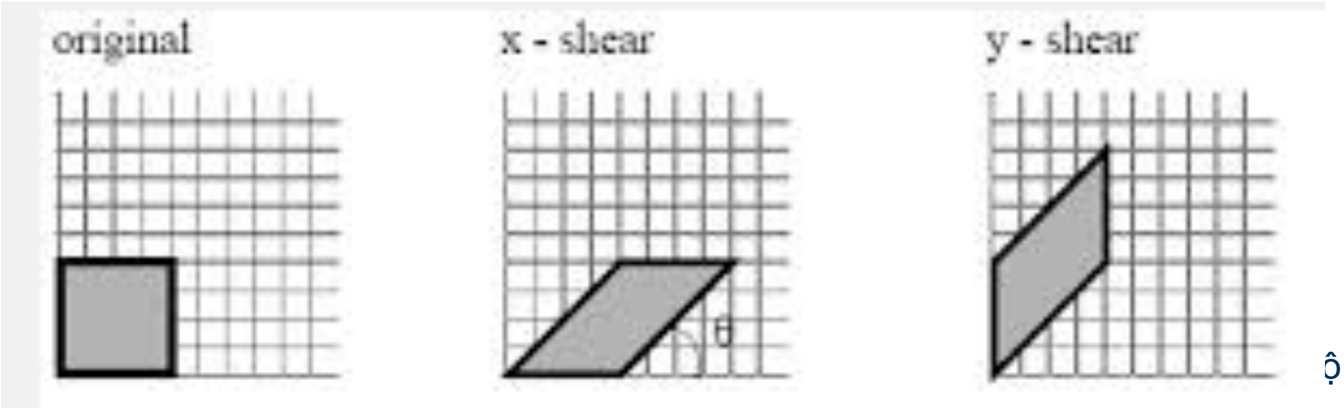
Phép kéo

- Kéo theo chiều x

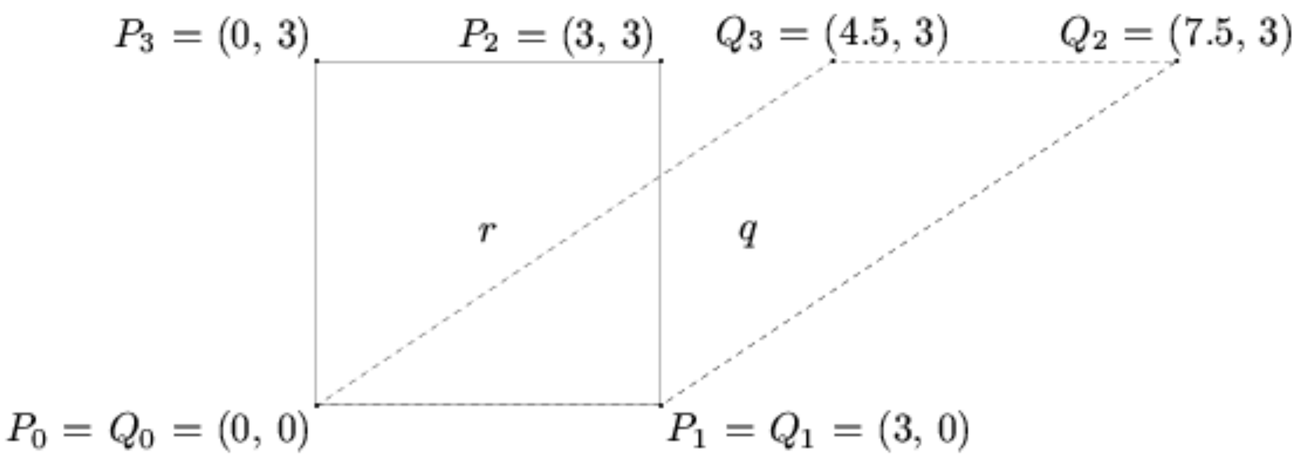
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Kéo theo chiều y

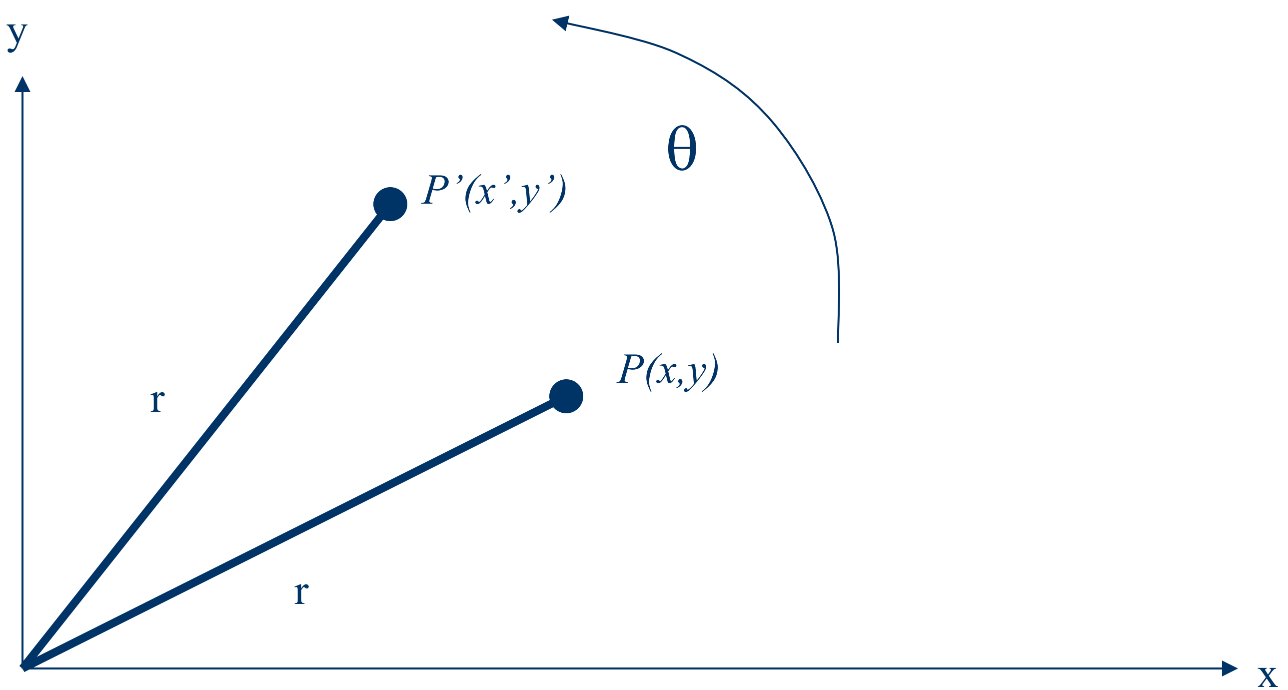
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



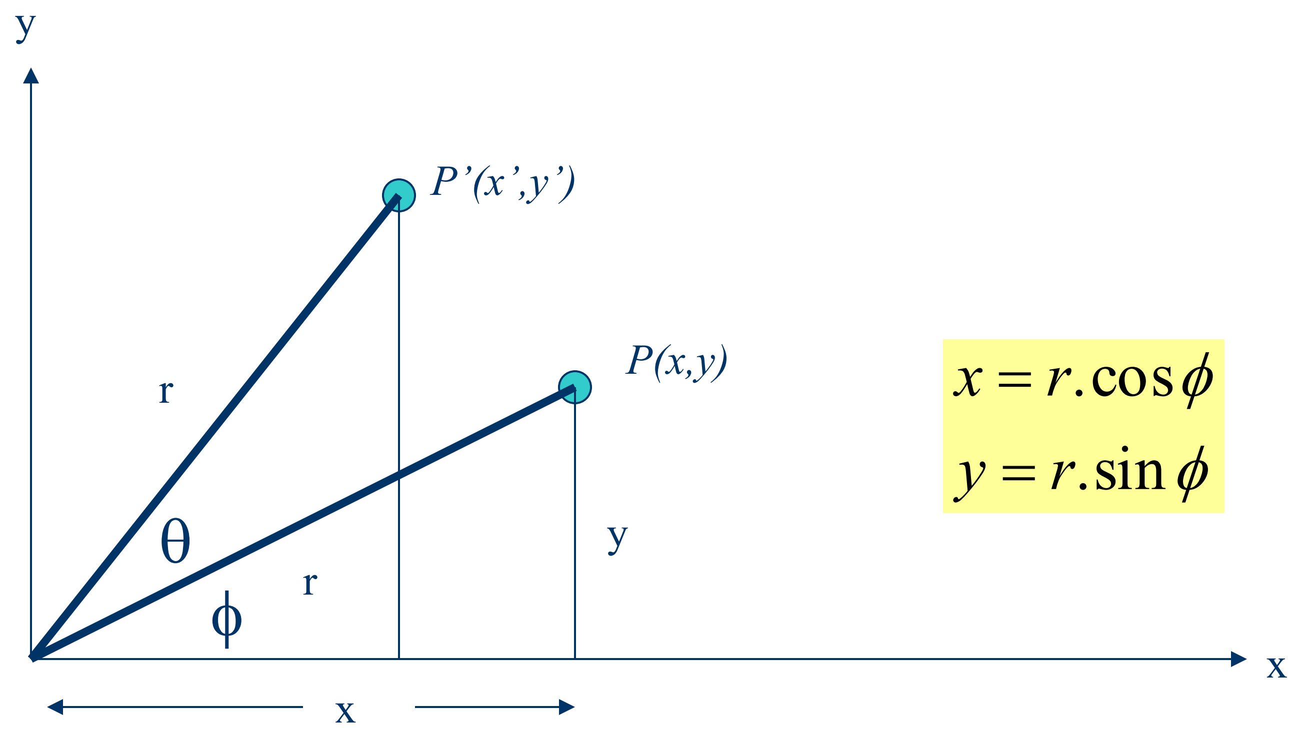
Phép kéo



Quay 2D quanh tâm



Quay 2D quanh tâm

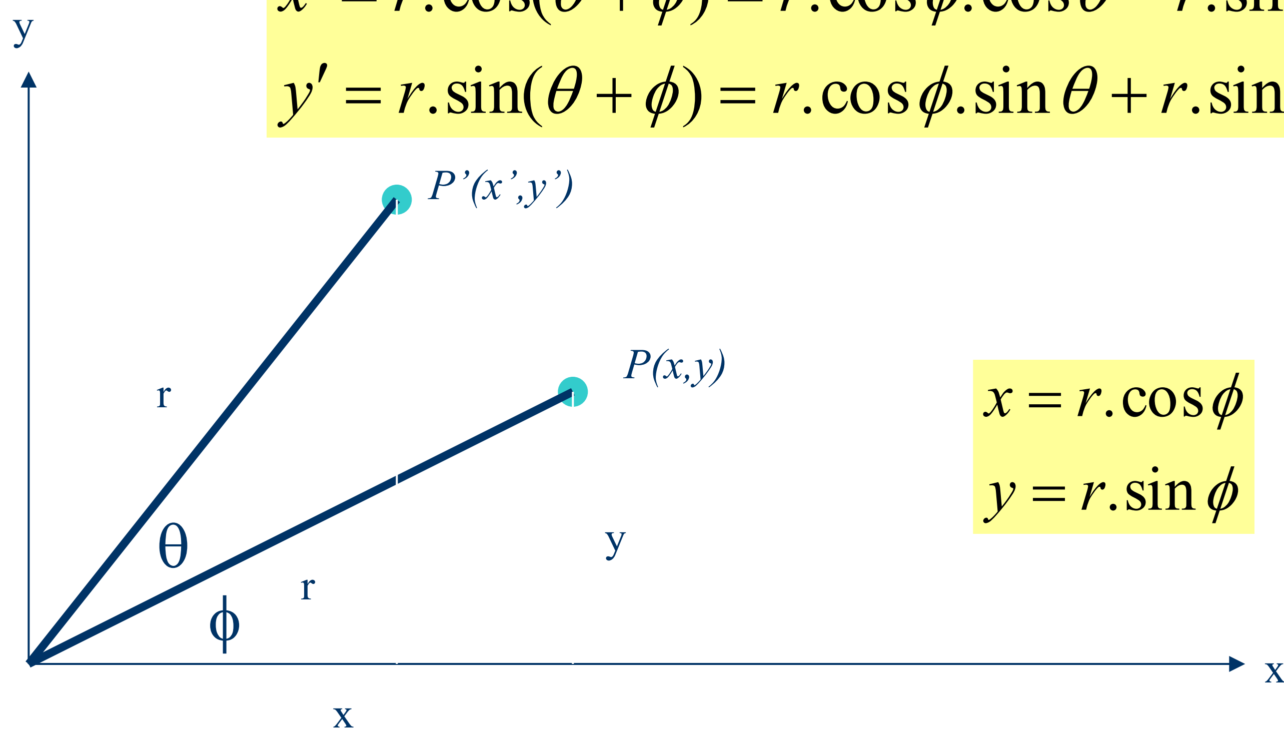


$$x = r.\cos\phi$$
$$y = r.\sin\phi$$

Quay 2D quanh tâm

$$x' = r.\cos(\theta + \phi) = r.\cos\phi.\cos\theta - r.\sin\phi.\sin\theta$$

$$y' = r.\sin(\theta + \phi) = r.\cos\phi.\sin\theta + r.\sin\phi.\cos\theta$$



$$x = r.\cos\phi$$

$$y = r.\sin\phi$$

Quay 2D quanh tâm

$$x' = r.\cos(\theta + \phi) = r.\cos\phi.\cos\theta - r.\sin\phi.\sin\theta$$

$$y' = r.\sin(\theta + \phi) = r.\cos\phi.\sin\theta + r.\sin\phi.\cos\theta$$

Thay :

$$x = r.\cos\phi$$

$$y = r.\sin\phi$$

Cho ta :

$$x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta$$

$$y' = x.\sin\theta + y.\cos\theta$$

Quay 2D quanh tâm

$$x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta$$
$$y' = x.\sin\theta + y.\cos\theta$$

Viết lại dưới dạng ma trận :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad P' = R \cdot P$$

Nhiều phép biến đổi cùng lúc

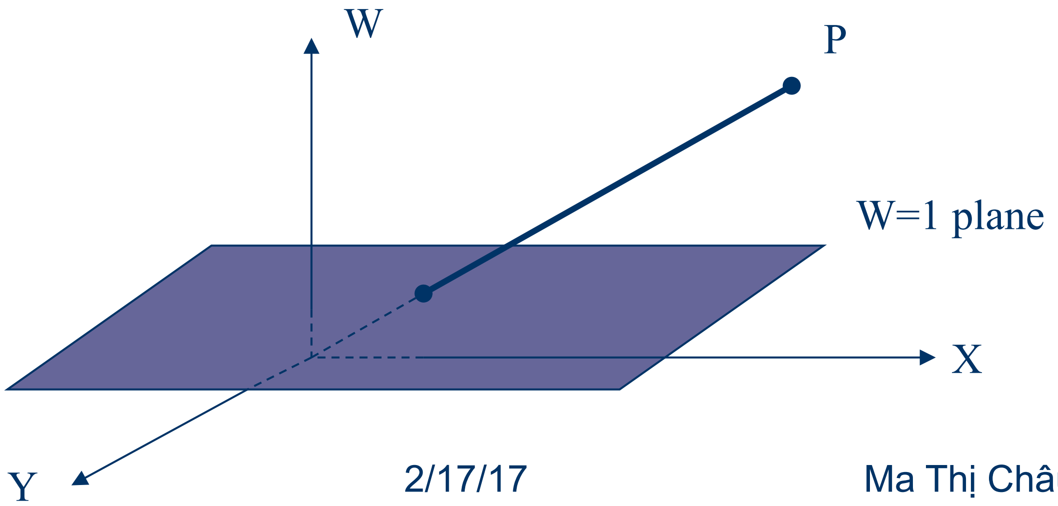
- Tịnh tiến
  - $P' = T + P$
- Co dãn
  - $P' = S \cdot P$
- Quay
  - $P' = R \cdot P$
- Chúng ta muốn các phép biến đổi thể hiện bằng phép nhân để có thể ghép với nhau được $\Rightarrow$ thể hiện điểm bằng tọa độ đồng nhất.

Tọa độ đồng nhất

- Thêm một thành phần tọa độ nữa, W, cho một điểm.
  - *P(x,y,W).*
- Hai tọa độ đồng nhất cùng thể hiện một điểm nếu chúng là tích của nhau với một hằng số
  - (2,5,3) và (4,10,6) thể hiện một điểm.
- Phải có ít nhất một thành phần khác không $\Rightarrow$ (0,0,0) không xác định.
- Nếu $W \neq 0$, chia các tọa độ còn lại cho nó để có tọa độ Đề-Cát (x/W,y/W,1).
- Nếu W=0, điểm đó coi như ở vô cùng.

Tọa độ đồng nhất (…)

- Nếu ta thể hiện (x,y,W) trong không gian 3 chiều, tất cả các tọa độ đồng nhất thể hiện một điểm 2D tạo thành một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.
- Nếu ta đồng nhất hóa một điểm, ta thu được điểm có dạng (x,y,1)
  - Các điểm đồng nhất tạo thành mặt phẳng W=1.



Các phép biến đổi với tọa độ đồng nhất

- Ma trận cho phép tịnh tiến 2D.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$
$$1 = 1$$

Kết hợp các phép biến đổi (Concatenation)

- Nếu ta thực hiện 2 phép tịnh tiến trên với cùng một điểm:

$$P' = P \cdot T(d_{x1}, d_{y1})$$

$$P'' = P' \cdot T(d_{x2}, d_{y2})$$

$$P'' = P \cdot T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot T(d_{x2}, d_{y2}) = P \cdot T(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$$

Do đó :

$$T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot T(d_{x2}, d_{y2}) = T(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$$

Kết hợp các phép biến đổi (…)

$T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot T(d_{x2}, d_{y2})$ là :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính chất của các phép tịnh tiến

1. $T(0,0) = I$

2. $T(s_x, s_y) \cdot T(t_x, t_y) = T(s_x + t_x, s_y + t_y)$

3. $T(s_x, s_y) \cdot T(t_x, t_y) = T(t_x, t_y) \cdot T(s_x, s_y)$

4. $\mathrm{T}^{-1}(s_x, s_y) = T(-s_x, -s_y)$

Dạng đồng nhất của phép co dãn

Ma trận phép co dãn :

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Trong tọa độ đồng nhất :

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kết hợp các phép co dãn

$$S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot S(s_{x2}, s_{y2}):$$

$$\begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dạng đồng nhất của phép quay

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta).$$

$$R^{-1}(\theta) = R^{T}(\theta)$$

Dạng đồng nhất của phép quay (...)

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R^T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos-\theta & -\sin-\theta & 0 \\ \sin-\theta & \cos-\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Các tính chất khác của phép quay

$$R(0) = I$$

$$R(\theta) \cdot R(\phi) = R(\theta + \phi)$$

và

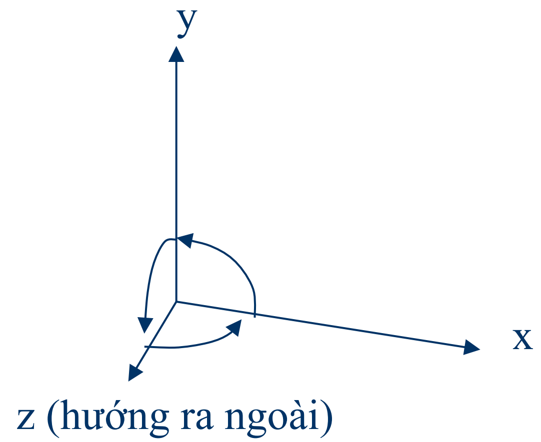
$$R(\theta) \cdot R(\phi) = R(\phi) \cdot R(\theta)$$

Kết hợp các loại phép biến đổi

- Quay và tịnh tiến
  - Góc và khoảng cách được giữ nguyên
- Quay, tịnh tiến và co dãn
  - Góc và khoảng cách không được giữ nguyên
  - Đường thẳng song song vẫn song song
  - *Gọi là các phép biến đổi Affine*

Biến đổi 3D

- Sử dụng tọa độ đồng nhất, giống như trong 2D
- Các ma trận biến đổi có kích thước 4x4
- Sử dụng hệ tọa độ thuận (z hướng ra ngoài)



Tịnh tiến 3D.

Giống như trong 2D:

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Co giãn 3D.

Giống như trong 2D:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quay 3D

- Cần xác định trục quay.
- Quay quanh trục z tương tự như 2D

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quay 3D

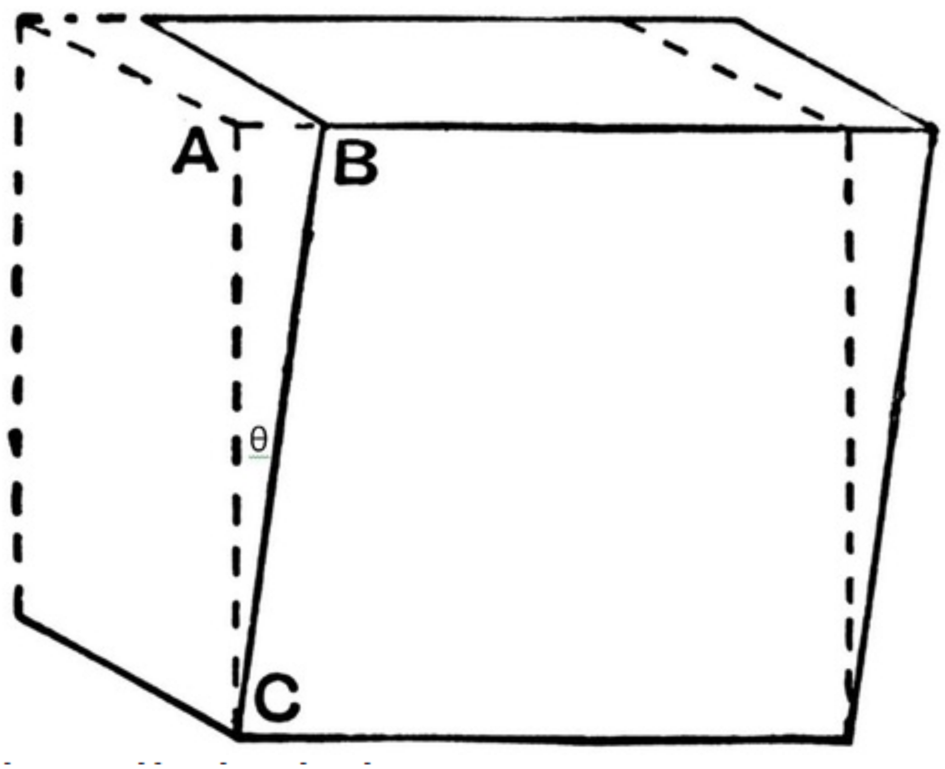
- Quay quanh trục x và y:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quay quanh một trục bất kỳ?

- Khó!
- Tuy nhiên, chúng ta đã biết cách quay quanh trục chính.
- Biến thành phép quay quanh trục chính.
- Cần tịnh tiến một trục quay a bất kỳ để đi qua gốc tọa độ, quay nó để trùng với một trục chính, thực hiện phép quay cần thực hiện, và quay và tịnh tiến lại vị trí ban đầu.

Phép kéo 3D



Phép kéo 3D

$$SH_{xy}(sh_x, sh_y) \quad * \quad P \quad = \quad P'$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z * sh_x \\ y + z * sh_y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tổng kết

- Phép tịnh tiến, quay và co dãn 2D, 3D
- Tọa độ đồng nhất
- Kết hợp các phép biến đổi

Thảo luận cho buổi sau

03 sinh viên

Phép chiếu